

Schur 型の多重ポリログ関数の積分表示について

東北大学理学研究科 角野裕太*

Yuta Kadono

Mathematical Institute, Tohoku University

Abstract

多重ゼータ値と多重ゼータスター値の組合せ論的補間として、Nakasuji-Phuksuwan-Yamasaki [2] によって導入された Schur 多重ゼータ値がある。この Schur 多重ゼータ値には、Jacobi-Trudi 公式と呼ばれる、各成分が多重ゼータ値である行列式を用いた表示が知られている。今回、無理数論で古くから研究されてきた、Beukers 型積分を用いて、反復積分表示とは見かけ上異なる、ribbon 型の Schur 多重ゼータ値の積分表示を与えた。また、その積分を別の方法で級数へ展開することにより、ribbon 型の Schur 多重ゼータ値の Jacobi-Trudi 公式の別証明を与える。

1 Schur 多重ゼータ値

分割 $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_r)$ s.t. $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_r > 0$ に対して、

$$D(\lambda) := \{(i, j) \in \mathbb{Z}^2 \mid 1 \leq i \leq r \text{ and } 1 \leq j \leq \lambda_i\}$$

を λ に対応する **Young diagram** と呼び、その全ての **bottom** と **corner** の部分集合をそれぞれ

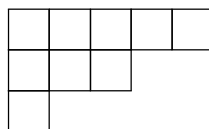
$$B(\lambda) := \{(i, j) \in D(\lambda) \mid (i+1, j) \notin D(\lambda)\},$$

$$C(\lambda) := \{(i, j) \in B(\lambda) \mid (i, j+1) \notin B(\lambda)\}$$

と表すことにする。この Young diagram は、**Young 図形** に対応させることができる。例えば、 $\lambda = (5, 3, 1)$ に対して、Young diagram は、

$$D(\lambda) = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1)\}$$

であり、対応する Young 図形は



*E-mail address: hebigami.math@gmail.com

となる。以下では常に、この同一視を用いる。また、集合 X に対して

$$\mathrm{YT}(\lambda, X) = \{\mathbf{k} = (k_{i,j}) \mid (i, j) \in D(\lambda) \text{ and } k_{i,j} \in X\}$$

を形が λ の X 上の **Young tableaux** と呼び、特に

$$\mathrm{SSYT}(\lambda) := \left\{ \mathbf{m} = (m_{i,j}) \in \mathrm{YT}(\lambda, \mathbb{N}) \mid \begin{array}{l} m_{i,j} < m_{i+1,j} \text{ and } m_{i,j} \leq m_{i,j+1} \\ m_{i,j} < m_{i+1,j+1} \end{array} \right\}$$

の元を **semi-standard Young tableaux** と呼ぶ。

次に、 $D(\mu) \subsetneq D(\lambda)$ を満たす分割 λ, μ に対して、

$$D(\lambda/\mu) := D(\lambda) \setminus D(\mu)$$

を **skew Young diagram** と呼び、これに対しても、bottoms の集合や Young tableaux などは同様に定義する。本稿では常に、**ribbon** と呼ばれる以下の 2 条件を満たす skew Young diagram に限定して議論する。

- 対応する Young 図形の各箱は、少なくとも 1 個の他の箱に辺で隣接する。

- 田の字型  を含まない。

以下では、特に断りが無い限り ν を列の数が c 、行の数が r の ribbon とする。**ribbon** 型の **Schur 多重ゼータ値** (以下、単に Schur MZVs) は、 $(i, j) \in C(\nu) \implies k_{i,j} > 1$ を満たすインデックス $\mathbf{k} \in \mathrm{YT}(\nu, \mathbb{N})$ (以下、収束インデックス) に対して、多重級数

$$\zeta_\nu(\mathbf{k}) := \sum_{(m_{i,j}) \in \mathrm{SSYT}(\nu)} \prod_{(i,j) \in D(\nu)} \frac{1}{m_{i,j}^{k_{i,j}}},$$

で定義される。特に、

$$\begin{aligned} \zeta(\mathbf{k}) &:= \zeta_\nu \left(\begin{array}{|c|} \hline k_1 \\ \hline \vdots \\ \hline k_r \\ \hline \end{array} \right) = \sum_{0 < m_1 < \dots < m_r} \frac{1}{m_1^{k_1} \dots m_r^{k_r}}, \\ \zeta^*(\mathbf{k}) &:= \zeta_\nu \left(\begin{array}{|c|c|c|} \hline k_1 & \dots & k_c \\ \hline \end{array} \right) = \sum_{0 < m_1 \leq \dots \leq m_r} \frac{1}{m_1^{k_1} \dots m_c^{k_c}} \end{aligned}$$

をそれぞれ、**多重ゼータ値** (以下、MZVs)、**多重ゼータスター値** (以下、MZSVs) と呼ぶ。この意味で、Schur MZVs は MZVs と MZSVs の組合せ論的補間である。この Schur MZVs に関して、以下の Jacobi-Trudi 公式が成り立つことが知られている。

定理 1.1 (Jacobi-Trudi 公式 (ribbon ver.) , Nakasuji-Phuksuwan-Yamasaki'18 [2]). 任意の収束インデックス $\mathbf{k} \in \mathrm{YT}(\nu, \mathbb{N})$ に対して、

$$\zeta_\nu(\mathbf{k}) = \det [\zeta(a_{j-1}, a_{j-2}, \dots, a_{j-(\nu'_i-i+j)})]_{1 \leq i, j \leq s}$$

が成り立つ。ただし、 $a_l = k_{i, i+l}$ で、 $\nu'_i - i + j = 0$ であれば $\zeta(\dots) = 1$ 、 $\nu'_i - i + j < 0$ であれば $\zeta(\dots) = 0$ と解釈する。

つまり、Schur MZVs は各成分が 0, 1, もしくは MZVs であるような行列式を用いて表すことができる。例えば、

$$\zeta_\nu \left(\begin{array}{|c|c|c|} \hline & 1 & 2 \\ \hline 4 & 3 & \\ \hline \end{array} \right) = \begin{vmatrix} \zeta(4) & \zeta(1, 3, 4) & \zeta(2, 1, 3, 4) \\ 1 & \zeta(1, 3) & \zeta(2, 1, 3) \\ 0 & 1 & \zeta(2) \end{vmatrix} \\ = \zeta(2, 1, 3, 4) - \zeta(4)\zeta(2, 1, 3) - \zeta(1, 3, 4)\zeta(2) + \zeta(4)\zeta(1, 3)\zeta(2)$$

が成り立つ。

また、通常の MZVs と同様に Schur MZVs に対応する **ribbon 型の Schur 多重ポリログ関数**（以下、単に Schur MPLs、cf. [1]）をインデックス $\mathbf{k} \in \text{YT}(\nu, \mathbb{N})$ に対して、

$$\text{Li}_{\mathbf{k}}(\mathbf{z}) := \sum_{(m_{i,j}) \in \text{SSYT}(\nu)} \prod_{(i,j) \in D(\nu)} \frac{z_{i,j}^{m_{i,j}}}{m_{i,j}^{k_{i,j}}},$$

で定義する。ただし、 $\mathbf{z} = (z_{i,j}) \in \text{YT}(\nu, \mathbb{C})$ with $|z_{i,j}| < 1$ である。定義から、 $\mathbf{k}$ が収束インデックスであれば、 $\mathbf{z}$ の全ての成分を 1 に近づける極限 $\mathbf{z} \rightarrow \mathbf{1}$ を考えると、Schur MPLs は Schur MZVs となる。

2 Beukers 型の積分と多重ゼータスター値の積分表示

1978 年に Apéry は、 $\zeta(3)$ が無理数であることを示した。翌年、Beukers は 単位立方領域上の積分を用いて、 $\zeta(3)$ が無理数であることを再証明した。この Beukers による証明を、他の奇数点でのリーマンゼータ値の無理数性の証明へ拡張する試みが数多く行われてきた。中でも、Vasilenko は任意の自然数 $n \in \mathbb{N}$ と非負整数 $\sigma \in \mathbb{N}_0$ に対して、多重積分

$$V_n(\sigma) = \int_{[0,1]^n} \frac{\prod_{i=1}^n x_i^\sigma (1-x_i)^\sigma}{(1-x_1+x_1x_2-\cdots+(-1)^n x_1x_2\cdots x_n)^{\sigma+1}} dx_1 dx_2 \cdots dx_n$$

を定義し、以下の式が成り立つことを示した（see [3]）。

- $V_3(0) = 2\zeta(3)$, $V_5(0) = 2\zeta(5)$
- $V_{2k}(0) \in \langle \zeta(2), \zeta(4), \dots, \zeta(2k) \rangle_{\mathbb{Q}}$

さらに、Vasil'ev は $V_n(0)$ の母関数を考察することで、以下の定理を示した。

定理 2.1 (Vasil'ev [4]). 任意の $k \in \mathbb{N}$ に対して、

$$V_{2k}(0) = 2(1 - 2^{1-2k})\zeta(2k), \quad V_{2k+1}(0) = 2\zeta(2k+1)$$

が成り立つ。

その後、Zlobin は漸化式

$$Q_0 = 1, \quad Q_j = 1 - x_{w_{j-1}+2} \cdots x_{w_j} (1 - x_{w_{j-1}+1} Q_{j-1})$$

によって定義される多項式 Q_j を被積分関数に持つ多次元平方領域上の積分

$$Z_0^{(\sigma)}(\mathbf{k}) := 1, Z_j^{(\sigma)}(\mathbf{k}) := \int_{[0,1]^{w_j}} \frac{(1-Q_j)^\sigma}{Q_j} dx_1 \cdots dx_{w_j}.$$

が MZSVs の積分表示 $\zeta(k_1, \dots, k_c) = Z_c^{(0)}(k_1, \dots, k_c)$ を与えることを示した (see [3])。ここで、 $w_j := k_1 + \cdots + k_j$ である。今回、この Zlobin の積分 $Z_j^{(\sigma)}(\mathbf{k})$ を参考に、Schur MPLs の積分表示を導入した。

3 主定理

漸化式

$$a_{r+1,1} := 1,$$

$$a_{r,1} := a_{r,1}(\mathbf{z}, \mathbf{x}) = 1 - z_{r,1} x_{r,1,1} \cdots x_{r,1,k_{r,1}},$$

$$a_{i,j} := a_{i,j}(\mathbf{z}, \mathbf{x}) = \begin{cases} 1 - z_{i,j}(1 - a_{i+1,j})x_{i,j,1} \cdots x_{i,j,k_{i,j}}, & (i+1, j) \in D(\nu) \\ 1 - z_{i,j}(1 - x_{i,j,1} a_{i,j-1})x_{i,j,2} \cdots x_{i,j,k_{i,j}}, & (i, j-1) \in D(\nu) \end{cases}$$

によって多項式 $a_{i,j}$ を定義する。ただし、各 (i, j) に対して、 $z_{i,j}$ は $|z_{i,j}| < 1$ を満たす複素変数である。この $a_{i,j}$ に対して、多重積分

$$I_{r+1,1}^{(\sigma)}(\mathbf{k}; \mathbf{z}) := 1, \\ I_{i,j}^{(\sigma)}(\mathbf{k}; \mathbf{z}) := \int_0^1 \cdots \int_0^1 \frac{(1-a_{i,j})^\sigma}{a_{i,j}} \prod_{\substack{(p,q) \in D_{i,j}(\nu) \\ (p,q) \notin B(\nu)}} \left(\frac{1-a_{p+1,q}}{a_{p+1,q}} \right) \prod_{(p,q) \in D_{i,j}(\nu)} dx_{p,q}$$

を考える。ただし、 $(i, j) \in D(\nu)$ に対して、 $D_{i,j}(\nu) = \{(p, q) \in D(\nu) \mid i \leq p \leq r, 1 \leq q \leq j\}$ とする。この時、主定理は以下である。

定理 3.1 (Schur MPLs の Beukers 型の積分表示). 任意の $\mathbf{k} \in \text{YT}(\nu, \mathbb{N})$ と $\mathbf{z} \in \text{YT}(\nu, \mathbb{C})$, with $|z_{i,j}| < 1$ に対して、

$$I_{i,j}^{(0)}(\mathbf{k}; \mathbf{z}) = \text{Li}_{\mathbf{k}}(\mathbf{z}) \prod_{(i,j) \in D(\nu)} \frac{1}{z_{i,j}}$$

が成り立つ。

この定理において、収束インデックス $\mathbf{k}$ に対して、辺々 $\mathbf{z} \rightarrow \mathbf{1}$ の極限を考えると Schur MZVs に対する積分表示が得られる。さらに、1列のみもしくは1行のみの ribbon ν に特殊化すると、Zlobin の結果を含む既存の結果が得られる。また、上記の積分を定理 3.1 とは異なる方法で級数へ展開することにより 2 つ目の主定理を得る。

定理 3.2. 任意の $\mathbf{k} \in \text{YT}(\nu, \mathbb{N})$ と $\mathbf{z} \in \text{YT}(\nu, \mathbb{C})$, with $|z_{i,j}| < 1$ に対して、

$$I_{1,c}^{(0)}(\mathbf{k}; \mathbf{z}) = \prod_{(p,q) \in D(\lambda)} \frac{1}{z_{p,q}} \sum_{i=0}^{c-1} (-1)^{c+i-1} \sum_{0=j_0 < j_1 < \cdots < j_i < j_{i+1}=c}$$

$$\times \prod_{l=0}^i \text{Li}_{\mathbf{k}_{j_{l+1}}, \dots, \mathbf{k}_{j_l+1}}(\mathbf{z}_{j_{l+1}}, \dots, \mathbf{z}_{j_l+1}) \quad (3.1)$$

が成り立つ。ただし $\mathbf{k}_j := (k_{r_j, j}, \dots, k_{r_{j+1}, j})$, $\mathbf{z}_j := (z_{r_j, j}, \dots, z_{r_{j+1}, j})$ とおいた。

この定理も、収束インデックス $\mathbf{k}$ に対して、辺々 $\mathbf{z} \rightarrow \mathbf{1}$ の極限を考えることができる。また、式 (3.1) の右辺は、Jacobi-Trudi 公式の行列式の余因子展開と等価であることが示せる。よって、定理 3.1 と合わせると ribbon 型の Schur MZVs に対する Jacobi-Trudi 公式の別証明が得られる。

注意 3.3. 名古屋大学大学院多元数理科学研究科 Henrik Bachmann 先生から、Schur MPLs にも Jacobi-Trudi 公式が成り立つことがすぐにわかるので、定理 3.2 は定理 3.1 から直接導出できることのご指摘をいただいた。

謝辞

2023 年度 RIMS 共同研究（公開型）「解析的整数論とその周辺」での講演機会をくださいました研究代表者の安福 悠 先生（日本大学）、研究副代表者の中筋 麻貴 先生（上智大学／東北大学）に心より感謝申し上げます。

References

- [1] Y. BABA, *Study on multiple poly-bernoulli numbers*, 上智大学大学院理工学研究科修士論文, (2023).
- [2] M. NAKASUJI, O. PHUKSUWAN, AND Y. YAMASAKI, *On Schur multiple zeta functions: a combinatoric generalization of multiple zeta functions*, Adv. Math., 333 (2018), pp. 570–619.
- [3] С. А. ЗЛОБИН (S. A. ZLOBIN), *Кратные интегралы и обобщенные полилогарифмы*, PhD thesis, Ломоносов Москощ Стате Университы, 2005.
- [4] D. V. VASIL'EV, *Some formulas for the Riemann zeta function at integer points*, Vestnik Moskov. Univ. Ser. I Mat. Mekh., (1996), pp. 81–84.