

$\mathbb{Q}$ 上のガロア群とモノドロミー

東大(理) 伊原康隆

§1 $\text{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ の各元による名前を与えよ!

有理数体 $\mathbb{Q}$ 上の絶対ガロア群 $G_{\mathbb{Q}} = \text{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ はコンパクト完全非連結な位相群で、この群とその数論構造

$$\text{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p) \hookrightarrow G_{\mathbb{Q}} \quad (p \leq \infty)$$

($\mathbb{Q}_p$: p 進体, $-$ は代数閉包, $\mathbb{Q}_{\infty} = \mathbb{R}$, $\hookrightarrow$ は $G_{\mathbb{Q}}$ 共役を除いて定まる) も込めて理解する事は整数論に於る基本的問題の一つと思われます. 特に素数 p の集合, $\log L(s)$ 等を「理解しなおす」と密接に関係している筈です(関数体の場合の Selberg 型ゼータとの関連例 [3] など). しかし、
まだに $G_{\mathbb{Q}}$ の各元による「名前」をつける事すら出来ていません. 数学に於る基本的対象 $\mathbb{Z}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, G_n$ (置換群) 等については各元による名前がついており、それはある程度以上の深い研究には不可欠でしたし、 $\bar{\mathbb{Q}}$ も $\mathbb{C}$ に埋めこむことにより "complex name" がつけられ、それはガウスの和の値決定や虚数乗法論の記述等に不可欠であった事を思い出して下さい.
ここで注意することは、対象 X (集合プラス付加構造) の各元に

よい名前をつけられる事と X が自己同型を (ほとんど) 持たない事は ほぼ対応しているという事で, 例えば n 個の元をもつ有限集合 X は 自己同型群 G_X をもち, 各元 $x \in X$ に canonical な名前はつけられないが, X に linear order を与えれば 自己同型はなくなり, X の元は $1, 2, \dots, n$ という名前がつく. 又 $\overline{\mathbb{Q}}$ は自己同型群 $G_{\overline{\mathbb{Q}}}$ (非常に大きい) をもち, $\overline{\mathbb{Q}}$ の一つの archimedes 素点 ∞ を fix すれば 自己同型群 $\subseteq \{\pm 1\}$ となり, 各元は complex name がつく..... この意味では, $G_{\overline{\mathbb{Q}}}$ は 非アーベル群で (内部) 自己同型を沢山もつから 各元は unique canonical な名前はつけ得ないわけですが, “よい名前” はついてもおかしくない. 又, Neukirch, 内田, 池田, 岩沢 諸氏の研究によって, 「 $G_{\overline{\mathbb{Q}}}$ の自己同型は内部自己同型に限る!」事がわかってます. これは 何か「終わり」であると同時に, 「 $G_{\overline{\mathbb{Q}}}$ の各共役類には必ずよい unique, canonical な名前がつく等だ!」という研究の「出発点」と見なしたいと考えます.

数学に於る基本的対象であるにも拘らず 各元による名前のついていないものは他にも沢山あるでしょうが, ここで一つ, 自由群 F_n の profinite completion $\hat{F}_n$ について触れておきます. これは $G_{\overline{\mathbb{Q}}}$ と $\hat{F}_2$ は密接に関係している (後述) のです. $n \geq 1$ とし, F_n は文字 $x_1, \dots, x_n$ の上の自由群

とします。 $\hat{F}_n$ とは, F_n のすべての有限商群の projective limit
 の事で, これは大きなコンパクト完全非連結な群ですが, $n=1$
 の場合 ($\hat{F}_1 = \hat{\mathbb{Z}} \cong \prod_p \mathbb{Z}_p$) を除くと $\hat{F}_n$ の各元を表示する
 方法は知られていません。 $\hat{F}_n$ は dense な部分群として F_n
 を含み持ちますが, $\hat{F}_n$ の元は $x_1, \dots, x_n$ ($\hat{\mathbb{Z}}$ 乗) の有限積として表わ
 されるものだけではない! (それよりはるかに多い)

§2 大きなガロア表現

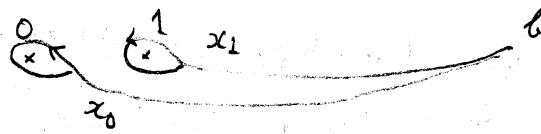
さて, 位相群 $G_{\mathbb{Q}} = \text{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ から (よく知られている) 位相群
 の中への準同型写像を $G_{\mathbb{Q}}$ の「ガロア表現」と呼んでいます。
 一番よく知られているのが, $\mathbb{Q}$ 上の代数多様体 X の i 次元進
 つホモロジー群 $H^i(X \otimes \bar{\mathbb{Q}}, \mathbb{Q}_\ell)$ への $G_{\mathbb{Q}}$ の作用から生ずる表現

$$G_{\mathbb{Q}} \rightarrow \text{GL}_n(\mathbb{Q}_\ell) \quad (n = \dim H^i(X \otimes \bar{\mathbb{Q}}, \mathbb{Q}_\ell))$$

で, これについては 夢のような一連の大予想と部分的な(深い)結果
 が知られています。しかし, これは $G_{\mathbb{Q}}$ の表現としては小さく, $G_{\mathbb{Q}}$ の
 研究というよりは X の研究 (数論というよりは代数幾何) という方向
 で進められている。そこで, むしろ X に対しては 単純で canonical なもの
 (単体の対称性) をとり, $G_{\mathbb{Q}}$ の $\widehat{\pi_1(X)}$ (π_1 は $X \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C}$ の位
 相的 基本群, $\widehat{}$ は π_1 の profinite completion) への作用から
 生ずる 大きな表現を考えて それを $G_{\mathbb{Q}}$ の研究に役立てよう

という考えが出てきます (Belyi, Grothendieck, Deligne, 筆者, ...).
 まずこれはどういう表現なのかを $X = \mathbb{P}^1 - \{0, 1, \infty\}$ の場合に
 ([1] に沿って) 説明します.

まず, 位相的基礎群 $\pi_1 = \pi_1(\mathbb{P}^1 - \{0, 1, \infty\}, \ell)$ の
 基底 ℓ は $\operatorname{Re}(\ell) \gg 0$ とし, $x_0, x_1 \in \pi_1$ を $\square$ のループによって
 定めると, π_1 は x_0, x_1 で生成される指数 2 の自由群であり,
 $x_\infty = (x_0 x_1)^{-1}$ は ∞ のまわりのループ (積 $x_0 x_1$ の定義は, まず x_1 に
 回ってまわるものとする).



次に複素平面 $\mathbb{C}$ の変数 t とし, $\operatorname{Re}(t) \gg 0$ で有型な
 関数であって, $t=0, 1, \infty$ の外で不分岐な global な代数関数
 に解析接続可能なもの全体のつくる体を $M_{\mathbb{C}}$ とする.

$M_{\mathbb{C}}$ は有理関数体 $\mathbb{C}(t)$ の無限次ガウス拡大体で, 例え
 は $t^{1/N}, (1-t)^{1/N}, (1-(1-t)^{1/N})^{1/N}, \dots$ などを含む. $M_{\mathbb{C}}$ に
 π_1 をモノドロミによって作用させる. ($\gamma \in \pi_1$, $f(z) \in M_{\mathbb{C}}$ に対して
 $(\gamma f)(z)$ は $f(z)$ を γ に沿って解析接続して得られる $\operatorname{Re}(t) \gg 0$ 上の
 関数.) この作用により, π_1 の各元は $\operatorname{Gal}(M_{\mathbb{C}}/\mathbb{C}(t))$ の元
 を定め, 従って準同型写像 $\pi_1 \rightarrow \operatorname{Gal}(M_{\mathbb{C}}/\mathbb{C}(t))$ が
 引き起されるが, 左の群は discrete, 右のはキツシリ (profinite) で,

実際, この準同型は同型 $\hat{\pi}_1 \cong \text{Gal}(M_{\mathbb{C}}/\mathbb{C}(t))$ を引き起している ("Riemann の存在定理").

さて各有理数 $a \in \mathbb{Q}$ に対して $t^a = \exp(a \log t)$ ($\log t \in \mathbb{R}$ for $t \in \mathbb{R}, t > 0$) で t^a を定め, $M_{\mathbb{C}}$ の各元を t^{-1} の有理巾を用いて Puiseux 展開する. $M_{\mathbb{C}}$ の元でその Puiseux 係数がすべて $\mathbb{Q}$ (resp. $\bar{\mathbb{Q}}$) に属するもの全体を $M_{\mathbb{Q}}$ (resp. $M_{\bar{\mathbb{Q}}}$) とおくと, 実は $M_{\bar{\mathbb{Q}}} = M_{\mathbb{Q}} \cdot \bar{\mathbb{Q}}$ となる.

$$\begin{array}{ccc} M_{\mathbb{Q}} & \xrightarrow{G_{\mathbb{Q}}} & M_{\bar{\mathbb{Q}}} \\ | & & | \\ \mathbb{Q}(t) & \xrightarrow{\quad} & \bar{\mathbb{Q}}(t) \end{array} \quad \left. \vphantom{\begin{array}{ccc} M_{\mathbb{Q}} & \xrightarrow{G_{\mathbb{Q}}} & M_{\bar{\mathbb{Q}}} \\ | & & | \\ \mathbb{Q}(t) & \xrightarrow{\quad} & \bar{\mathbb{Q}}(t) \end{array}} \right\} \hat{\pi}_1$$

$\text{Gal}(M_{\bar{\mathbb{Q}}}/\mathbb{Q}(t))$ は即ち群 $\text{Gal}(M_{\bar{\mathbb{Q}}}/M_{\mathbb{Q}}) \simeq G_{\mathbb{Q}}$ と正規部分群 $\text{Gal}(M_{\bar{\mathbb{Q}}}/\bar{\mathbb{Q}}(t)) \simeq \hat{\pi}_1$ の半直積となり, 共役によって $G_{\mathbb{Q}}$ が $\hat{\pi}_1$ に作用する. 以下が我々の表現

$$\varphi_{\mathbb{Q}}: G_{\mathbb{Q}} \longrightarrow \text{Aut } \hat{\pi}_1$$

を定義です. Belyi [2] は $\varphi_{\mathbb{Q}}$ が injective である事を証明しました! これによって $G_{\mathbb{Q}}$ は $\text{Aut } \hat{\pi}_1 \cong \text{Aut } \hat{F}_2$ の部分群と見なせるのです.

§3 $G_{\mathbb{Q}}$ と $\hat{F}_2$

まず $G_{\mathbb{Q}}$ の各元は $\mathbb{C}$ 内の 1 の N 乗根全体に作用し、
 $\text{Hom}(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \cong \hat{\mathbb{Z}}$ であることから、準同型写像

$$\chi: G_{\mathbb{Q}} \rightarrow \hat{\mathbb{Z}}^{\times}$$

が引き起されます. ($\sigma \in G_{\mathbb{Q}}$, $\zeta^N = 1$ なら $\sigma(\zeta) = \zeta^{\chi(\sigma) \pmod{N}}$.)

$G_{\mathbb{Q}}$ の各元に名前を—と書きましたが、

$$\text{Full name} = \text{First name} + \text{second name} + \dots$$

という意味でいけば、 $\chi(\sigma)$ は σ の First name (むしろ, last name?)
 とでもいうものでしょう.

さて —, $\pi_1 \simeq F_2 = \langle x_0, x_1 \rangle$ で、 $\sigma \in G_{\mathbb{Q}}$ の $\hat{F}_2$ への
 作用は x_0, x_1 への作用で定まるが、各 $i = 0, 1, \infty$ に
 対し σx_i は $x_i^{\chi(\sigma)}$ と ($\hat{F}_2$ 内で) 共役で、更に強く

$\exists s_\sigma, t_\sigma \in [\hat{F}_2, \hat{F}_2]$ ($[\cdot, \cdot]$ は交換子群) s.t.

$$\sigma(x_0) = (s_\sigma x_1^{\frac{\chi(\sigma)-1}{2}}) x_0 (s_\sigma x_1^{\frac{\chi(\sigma)-1}{2}})^{-1}, \quad \sigma(x_1) = t_\sigma x_1^{\chi(\sigma)} t_\sigma^{-1}$$

$$\sigma(x_\infty) = x_\infty^{\chi(\sigma)}$$

であることがわかります. この s_σ, t_σ を $G_{\mathbb{Q}}$ の元 σ の
 新しい「座標」とみて その満たす性質を調べようというわけです.
 上述 Belyi によって、 $\sigma \rightarrow (s_\sigma, t_\sigma)$ は忠実であるから、 $\hat{F}_2$ の
 各元による名前がつけば $G_{\mathbb{Q}}$ の元にもよ名前がつくし、又
 この写像 (準同型ではない) $\sigma \rightarrow (s_\sigma, t_\sigma)$ の像がわかれば

$G_{\mathbb{Q}}$ の “大きさ” について 別の知見が与えられる可能性がある
わけである。

$\hat{F}_n$ のかわりに F_n の p - l completion F_n^{p-l} (l : 素数)
を考えることも出来, その場合 F_n^{p-l} の各元には「よい名前」
がつけられています。ここで F_n の p - l completion とは, F_n
のすべての 位数 l べきの有限商群 の projective limit のことで
 F_n^{p-l} は $\mathbb{Z}_l$ 上の非可換形式的中級数環 $\Lambda =$
 $\mathbb{Z}_l[[u_1, \dots, u_n]]_{\text{non-comm.}}$ の可逆元のつくる乗法群 $\Lambda^\times$ の中
に $u_i \rightarrow 1 + u_i$ ($1 \leq i \leq n$) によってうめこまれていて, これによ
って F_n^{p-l} の各元は 非可換中級数として「名前」をもっていま
す。 s_σ, t_σ の F_2^{p-l} への projection の与える中級数の
係数を用いた数論への応用については既に研究が進め
られています [1][4][5] (etc) がここでは省略します。

そこで「profinite」に戻って, $\chi(\sigma) = 1$ なる $\sigma \in G_{\mathbb{Q}}$, 即ち
 $\sigma \in \text{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\text{全円分体})$ に制限して, $s_\sigma, t_\sigma \in [\hat{F}_2, \hat{F}_2]$ の満たす
方程式を見つける事を話題にします。

§4 s_σ, t_σ の満す方程式

まず $(\chi(\sigma) = 1 \text{ とした上で})$ $\sigma x_\infty = x_\infty$ より,

$$(1) \quad s_\sigma x_0 s_\sigma^{-1} t_\sigma x_1 t_\sigma^{-1} = x_0 x_1,$$

又 $0, 1, \infty$ を入れかえる置換を用いて容易に次の関係式が示されます。

$$\beta \in \text{Aut } \hat{F}_2 \quad \text{を} \quad \beta: \begin{cases} x_0 \rightarrow x_0^{-1} x_1^{-1} \\ x_1 \rightarrow x_1 \end{cases}$$

$$\gamma \in \text{Aut } \hat{F}_2 \quad \text{を} \quad \gamma: \begin{cases} x_0 \rightarrow x_0 x_1 x_0^{-1} \\ x_1 \rightarrow x_0 \end{cases}$$

で定めるとき,

$$(2) \quad \beta(t_\sigma) = s_\sigma^{-1} t_\sigma, \quad \gamma(t_\sigma) = s_\sigma$$

これからだけで $\sigma \rightarrow (s_\sigma, t_\sigma)$ の像が特徴づけられるか? という
と答は「」です。ここで Grothendieck, Deligne, 織田氏等の
影響によって $\mathbb{P}^1 - \{0, 1, \infty\}$ を $\mathbb{P}^1 - \{0, 1, \infty, \lambda\}$ (4点) の moduli
space とみて, その total space

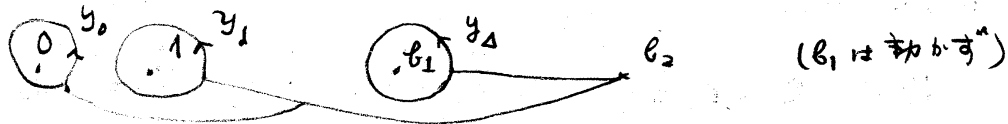
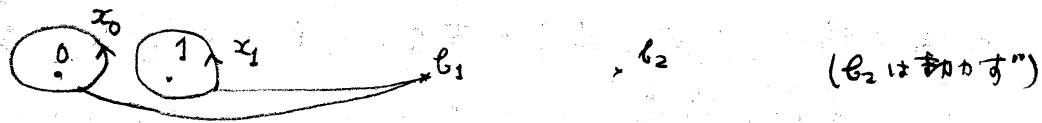
$$Z = X^2 - \Delta_X$$

$$\begin{cases} X = \mathbb{P}^1 - \{0, 1, \infty\} \\ \Delta_X: \text{diagonal} \end{cases}$$

の $\hat{\pi}_1$ での Galois 表現を考察してみます。

Z の基本群は X 上の二本の糸の純組み系群
に他なりません。そこで二本の糸の基底 $b = (b_1, b_2) \in Z$
を $b_1, b_2 \in \mathbb{R}$, $0 \ll b_1 \ll b_2$ ととり, $\pi_1(Z, b)$ の元

$x_0, x_1, y_0, y_1, y_\Delta$ をそれぞれループ



で定めると, $\pi_1(Z, b)$ は部分群 $F_2 \cong \langle x_0, x_1 \rangle$ と正規部分群 $F_3 \cong \langle y_0, y_1, y_\Delta \rangle$ の半直積になります. ここで F_2 の F_3 への作用は「 b_1 の動きによって生ずる F_3 の自己同型」で, 具体的には

$$(M) \begin{cases} x_0 y_0 x_0^{-1} = y_\Delta^{-1} y_0 y_\Delta, & x_0 y_1 x_0^{-1} = (y_\Delta^{-1} y_0^{-1} y_\Delta y_0) y_1 (y_\Delta^{-1} y_0^{-1} y_\Delta y_0)^{-1}, \\ x_0 y_\Delta x_0^{-1} = y_\Delta^{-1} y_0^{-1} y_\Delta y_0 y_\Delta, \\ x_1 y_0 x_1^{-1} = y_0, & x_1 y_1 x_1^{-1} = y_\Delta^{-1} y_1 y_\Delta, \\ x_1 y_\Delta x_1^{-1} = y_\Delta^{-1} y_1^{-1} y_\Delta y_1 y_\Delta. \end{cases}$$

このように, $\pi_1(X)$ が $\pi_1(Z)$ の中に $\langle x_0, x_1 \rangle$ として (proj_1 によって) 入っていますが, $\pi_1(X)$ の $\pi_1(Z)$ への入り方は他にもいろいろあって, 例えは (∞, ∞) のまわりでの local fundamental group

$$\pi_1\left(\bigwedge_{(\infty, \infty)}, b\right) \cong \pi_1(X) \times \mathbb{Z}$$

にも入っています (後述の κ).

さて, $\pi_1(Z, b)$ の profinite completion $\hat{\pi}_1(Z, b)$ は $\hat{F}_2$ と $\hat{F}_3$ の半直積で, (X の場合の方法の延長により) $G_{\mathbb{Q}}$ を $\hat{\pi}_1(Z, b)$ に, この半直積構造を保つように, 作用させることが出来ます. 従って, まず:

(I) 各 $\sigma \in G_{\mathbb{Q}}$ は $\hat{F}_2 = \langle x_0, x_1 \rangle$, $\hat{F}_3 = \langle y_0, y_1, y_{\Delta} \rangle$ に作用する.

(II) この作用は関係式 (M) を保つ.

また, 更に:

(III) σ の $\hat{F}_2$ への作用は, 元の $\hat{\pi}_1$ への作用と同じ.

(IV) σ の $\hat{F}_3$ への作用は $\hat{F}_2$ への作用を $x_i \rightarrow y_i$ ($i=0,1$) でうつしたものを $(\mu\omega)_1$ と $(\mu\omega)_2$ の λ の b の z) 及び σ の (∞, ∞) での local fundamental group への作用を用いて, 次のように表わせる.

$$\begin{aligned} \theta: \hat{F}_2 &\rightarrow \hat{F}_3 \quad \theta: \begin{cases} x_0 \rightarrow y_0 \\ x_1 \rightarrow y_1 \end{cases} \\ \kappa: \hat{F}_2 &\rightarrow \hat{F}_3 \quad \kappa: \begin{cases} x_0 \rightarrow y_{\infty}^{-1} y_{\Delta}^{-1} \\ x_1 \rightarrow y_{\Delta} \end{cases} \end{aligned}$$

で定めると,

$$(3) \quad \begin{cases} \sigma(y_0) = (\kappa(s_{\sigma}) \theta(s_{\sigma})) y_0 (\kappa(s_{\sigma}) \theta(s_{\sigma}))^{-1}, \\ \sigma(y_1) = (\kappa(s_{\sigma}) \theta(t_{\sigma})) y_1 (\kappa(s_{\sigma}) \theta(t_{\sigma}))^{-1}, \\ \sigma(y_{\Delta}) = \kappa(t_{\sigma}) y_{\Delta} \kappa(t_{\sigma})^{-1} \end{cases}$$

一方, (II) より, compatibility

$$(4) \quad \sigma(x_i y_j x_i^{-1}) = \sigma(x_i) \sigma(y_j) \sigma(x_i)^{-1} \quad \left(\begin{array}{l} i=0,1 \\ j=0,1,\Delta \end{array} \right)$$

が成立ち, $x_i y_j x_i^{-1}$ は (M) において y_0, y_1, y_Δ のみで表わせる.

例えば $i=j=0$ とすると (4) は

$$\sigma(y_\Delta^{-1} y_0 y_\Delta) = \sigma(x_0) \sigma(y_0) \sigma(x_0)^{-1},$$

即ち

$$\begin{aligned} & (k(t_\sigma) y_\Delta^{-1} k(t_\sigma)^{-1}) (k(s_\sigma) \theta(s_\sigma) y_0 (k(s_\sigma) \theta(s_\sigma))^{-1} (k(t_\sigma) y_\Delta^{-1} k(t_\sigma)^{-1})^{-1}) \\ &= (s_\sigma x_0 s_\sigma^{-1}) (k(s_\sigma) \theta(s_\sigma) y_0 (k(s_\sigma) \theta(s_\sigma))^{-1} (s_\sigma x_0 s_\sigma^{-1})^{-1}). \end{aligned}$$

このように (3) によって (4) を各 i, j で書きなおす事により, s_σ, t_σ に関する 6 個の方程式が生じます.

$$(16) \quad \sigma(s, t, \chi(s)=1) \rightarrow (s_\sigma, t_\sigma) \text{ の像は (1)(2)}$$

及びこの 6 個の方程式で特徴づけられるか?

この内について, 今の所何もわかっていません.

Profinite を $\mu\omega$ -2 にすると 問題に 2 環的方法が使える, 方程式系もやや簡単になるのですが, それでも今より比較的

やさしい命令を一般化できる [6] 事位です. 尚 Z は

$F_{0,5} P^1 / PGL_2$ と同型のため, 対称群 S_5 が作用して

おり, S_5 -symmetry を用いれば 更に多くの関係が生ずる
 事も可能性として残っています。講演の際 このきっかけの
 脈向を以下述した青藤恭司氏に感謝します。

[文献]

- [1] G.W. Anderson - Y. Ihara, Ann. Math 128 (1988), 271-293
 - " Part 2 (in preparation)
- [2] V.G. Belyi, Math USSR Izv K (1980).2, 247-256
- [3] Y. Ihara, Proc Int'l Congress (1970), Tome 2, 381-389
- [4] " , Ann. Math 123 (1986), 43-106,
- [5] " , Inv. Math 86 (1986), 427-459.
- [6] " , "Automorphisms of pure sphere braid groups
 and Galois representations"
 Preprint 1988 (UTYO-MATH 88-18)