

交通流と物理

坂東 昌子 (愛知大学一般教育研究室, bando@aichi-u.ac.jp)

May 21, 2000

1 Introduction

私は、文系大学で自然科学を講義しているが、この授業で、多数集団の面白さを知ってもらおうと、自発磁化の多人数実験を試みた。学生を原子磁石に見立てて、「自発磁化」を体験させる実験である。実験は表はピンク、裏は青の私のテキストを使う。各自好きな色を前方に向ける初期条件空出発して、号令に合わせて同じルールで色を変えていくのである。ルールは(1)前後左右をみて多数決で決める、(2)さらに隣の隣までの多数決で決める、(いずれも同数ならどちらでもよい)といった近接相互作用である。ルール(1)だと、7・8回で、(2)だと4・5回で700人近くの学生が持つテキストの色が揃う¹。実験は大成功、学生たちは参加する授業の楽しさを味わってくれた。「私は階段教室の後ろの席だったが、どんどん教科書が1色に変わっていった」「前後左右を見るより、少し遠い周囲を見て色を合わせる方が色が速く揃う」「はじめは、自発磁化どころか超伝導も超流動も全然分からなかったが、実際自分自身が原子磁石になってみると簡単に納得できた」といった感想にまじって、「自発磁化なんてもっともむずかしいものかと思っていたが、周りとのコミュニケーションの結果なのですね。若者の服装や髪型の流行も同じような現象ですね。」という反応にはうれしくなった。まさに交通流を物理する発想と同じである。相転移は、ミクロには原子分子の集団の話であるが、その相互作用がマクロな系に急激な変化を与える面白い現象で、その理論的解明は近代物理の見事な成功例である。これと同じ現象が、細胞、動物、人間、などの構成子の集団でも起ってもいいのではないか。人間のように個性のある構成子の集団でも、運転するという挙動は訓練によって個性を抑えるから、最も集団運動の処方が使える現象ではなかろうか。南部理論依頼、素粒子屋には相転移は大変なじみが深い。こういう素粒子屋が集まって交通を物理してみようとはじめたのがこの1連の仕事である。今回は、どうやらパターン形成に焦点があるようなので、このあたりを中心に我々の仕事を紹介しよう。

2 交通流の研究

交通流の研究は、モータリゼーションの波が広がった1950年代、米国とヨーロッパで始まった。交通流理論の基本量は、交通量 Q (単位時間に通過する車両の数)、密度 k (単位長さあたりの車両台数あるいは平均車間距離)、速度 v (車の平均速度)の3つである。交通量と密度の関係(基本図とよばれる: $k-Q$ 曲線)の典型的な観測データを図1に示す(但し密度の代わりに道路上での車の占有割合が使われている)。これから、 Q が最大になる臨界

¹ 何度かに一度周囲に関係なく好きな色にかえてよいというルールを作って温度の高い状態のシミュレーションをすると、こんなに早くは揃わない。温度ゼロのシミュレーションだから早く揃ったのである。

密度、 k_0 があり、 $k > k_0$ では自由流領域、 $k < k_0$ では渋滞流領域になり輸送効率が下がっていることが分かる。一方、ドライバーは安全性を保つために密度が高くなると速度を緩めるので $k-v$ の関係は図2のような右下がり曲線になる。これを $v = v(k)$ とすると、交通流が定常的な場合は $Q = kv$ だから、 $Q = kv(k)$ となり、確かに基本図には緩やかな山が存在する。しかし、実測値にあるような鋭い人型の折れ曲がりとは再現しにくい²。また、阪神高速のある特定の地点で観測された基本図は、(図3)は、見事に臨界点付近のデータが欠落している。つまり、交通量が増加してくると、突如として、密度（ここではオキュパンシー）がぐっと増え渋滞が生じる³。どうやら相転移現象として説明できそうではないか。

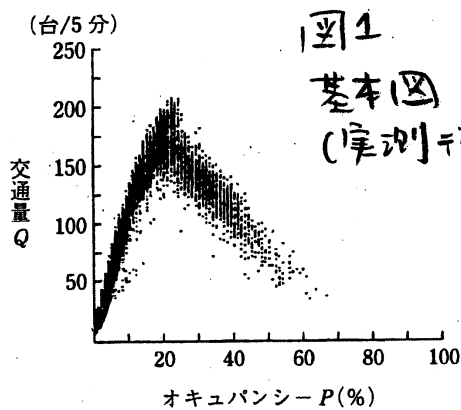
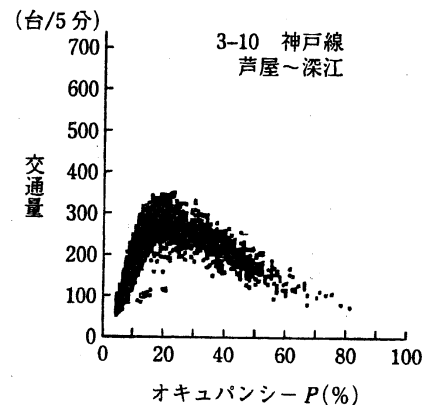
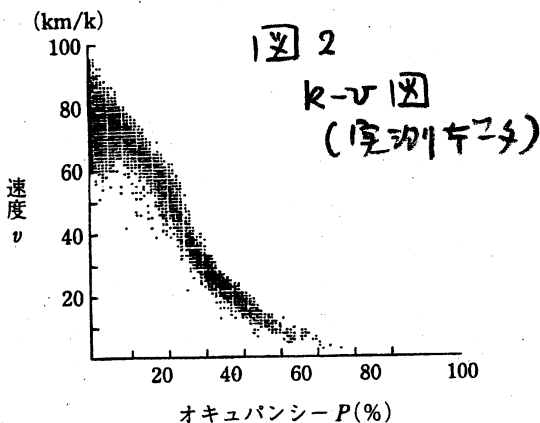
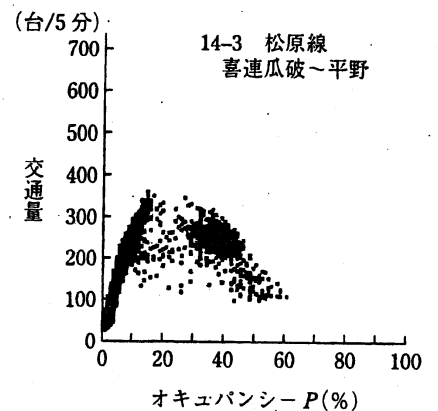


図3 →
基本図
(阪神高速)
下位点
欠落して
いる



3 追従モデル

交通流のミクロスコピックなアプローチでの標準模型である追従モデル (Follow the Car Theory 1960) を紹介しよう。簡単のために、追い越し禁止の1レーン上に車が走行している系を考える。運転者は刺激に反応して加減速する。追従モデルでは、この刺激は直前の車の速度や位置であるとする。最初に考えられたのは、 k 番目の車が次の運動方程式に従うとするものである (Pipes, Newell 等)。

$$\ddot{x}_k(t) = \lambda \Delta \dot{x}_k(t), \quad \Delta x_k(t) = x_{k-1}(t) - x_k(t) \quad (1)$$

$\lambda > 0$ は運転者の刺激反応の強さである。この式で、車が一定の速度で走行している定常流に対して揺らぎが発生しても常に減衰して揺らぎに対して安定になる。これは観測にも矛盾

² 自由流と渋滞流領域とで不連続な $K-V$ 曲線 (例えばエディ曲線) なら基本図を再現することができる。

³ このことは、阪神高速の観測を続けられている松尾氏は、経験上ずっと昔から気がついておられたという。

するので、R.E.Dhanda R.Harman は、刺激に対するドライバーの反応の時間的遅れ (τ) を取り込んで、 $\ddot{x}_k(t+\tau) = \lambda \Delta \dot{x}_k(t)$ とした。同様に安定性を検討すると、 $c = \tau \lambda = \pi/2$ が臨界値にはなるが、臨界密度を出すことはできなかった。これに対して、我々の「最適速度模型 (Optimal Velocity Model: OVM)」では、まず車間距離に応じた最適速度 $V(\Delta x)$ を定義する⁴。

$$\ddot{x}_i(t) = a(\dot{x}_i(t) - V(\Delta x)). \quad (2)$$

この OVM で安定性を線形近似で調べてみる。ここで簡単のために、長さ L の 1 レーンのサーキット上に車が N 台ある場合を考える。自明な解、 $x_k^0 = bk + ct$, $c = V(b)$, $b = L/N$ を一様流解とよんでおく。線形近似をしてこの一様流解の安定性を検討すると、 $f \equiv V'(b) = a/2$ が臨界点で、 $f < a/2$ では安定、 $f > a/2$ では不安定となる。実際に渋滞形成を引き起こすかどうかをみるために、 $a = 1$ として、最適速度を tanh 型、 $V(\Delta x) = \tanh(\Delta x - 2) + \tanh 2$ ととる。これは最適速度の条件を満たす最も簡単な例で、実は成長曲線 (ロジスティック方程式の解) の形である。200 台の車が長さ L サーキット上を車間距離 $b = 2$ 、速度 $c = 1$ で走行している ($N = 200, L = 100$) とすると、一様流解は、 $f = V'(2) = 1$ なので不安定である。その中の 1 台の車の車間距離を $\Delta x = 2 + 0.1$ として揺らぎを与えて時間の推移をシミュレーションした結果が図 4 である。時間が推移すると、密度の濃い部分と薄い部分に分離していく様子が分かる。パターン形成という観点からいうと、この OVM では、一様流から自発的に渋滞粗密波が形成されたのである。さらに面白いのは、この車の動きを位相空間 ($(\Delta x, \dot{x})$) 上にプロットすると、図 5 のように最初一様流であった個々の車が、時間の経緯につれて広がっていき、渋滞が完成した段階では、1 つのリミットサイクル上にすべてのつてしまうことである。このリミットサイクルの端点、 C と F は各々、渋滞領域と自由領域に対応している。ついでに、ベンツ等の企業が持っている Botsh 研究所で、この模型を使って追従車がどんな動きをするかを実測値と比較したグラフをつくってくれたが、これを見ると、ミクロにもこの簡単な方程式が実測値をよく再現していることが分かる。

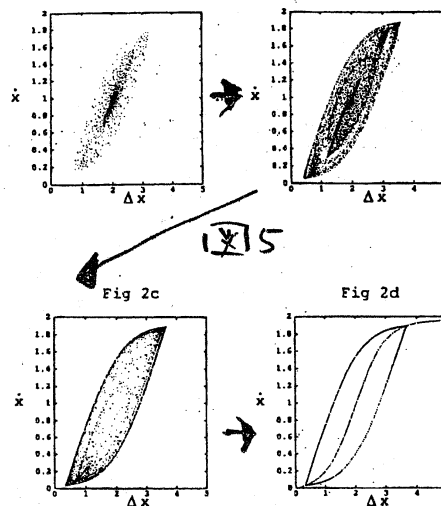
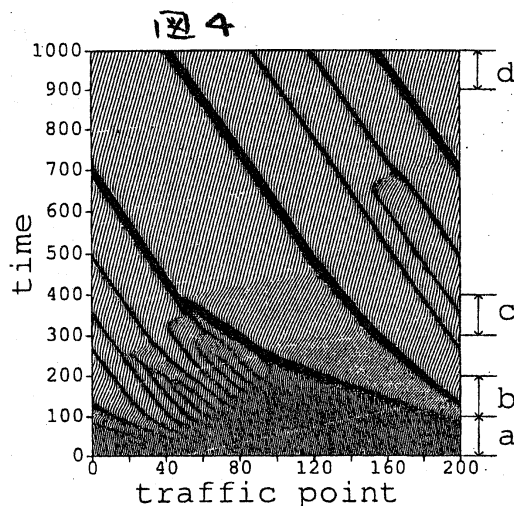
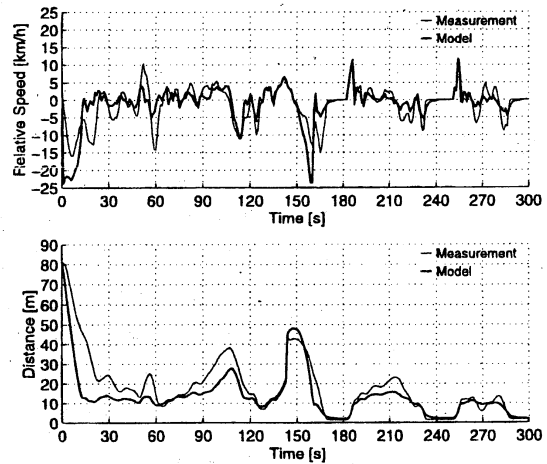
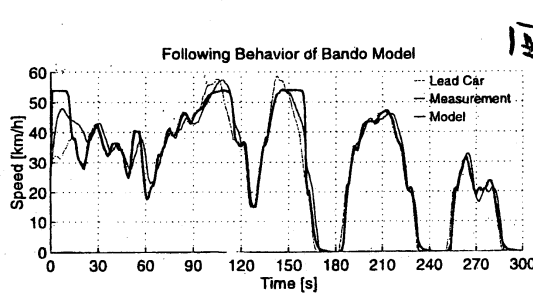


図4. OVMでの不安定点から出発した揺らぎの拡大の様子

図5 $(\Delta x, \dot{x})$ 平面上のリミットサイクル. 時間の経過に伴って $(\Delta x = 2, \dot{x} = 1)$ から周辺に広がって行く。

⁴ 最適速度は、車間距離について単調増加、かつ、最高スピードにはリミットがある関数である

ついでに、ベンツ等の企業が持っている Botsh 研究所で、この模型を使って追従車がどんな動きをするかを実測値と比較したグラフをつくってくれたが、これをみると、ミクロにもこの簡単な方程式が実測値をよく再現していることが分かる。



Bosch 研究所でのミクロ実験
追従挙動は OVM でよく合う。

4 パターン形成に関係して

シミュレーション結果は（とはいえ、私が数値計算をしたわけではなく共同研究者がやってくれたのであるが）、「100000 回繰り返しても同じパターンだったので大丈夫だよ」ということであった。しかし、幾つか疑問が残る。図3をみると、シミュレーション結果は、渋滞領域の数（これをこれからバンチ数と呼ぼう）が4つできた。このバンチ数は、初期条件として1バンチで出発すれば1バンチのままで推移することはすぐわかる。いったいこのバンチ数はどう決まるのだろうか、これが第一の疑問である。

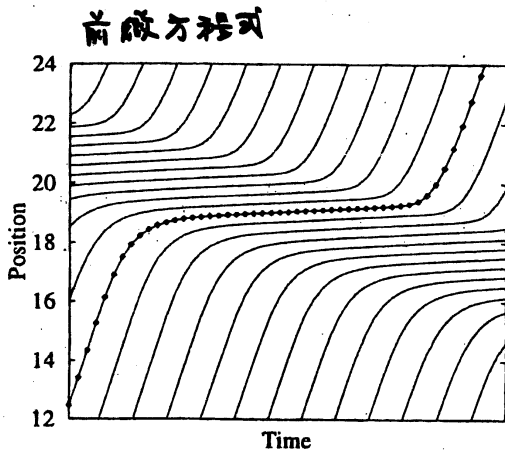


図7.

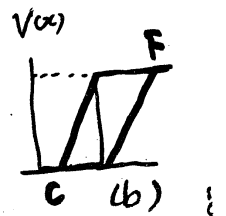
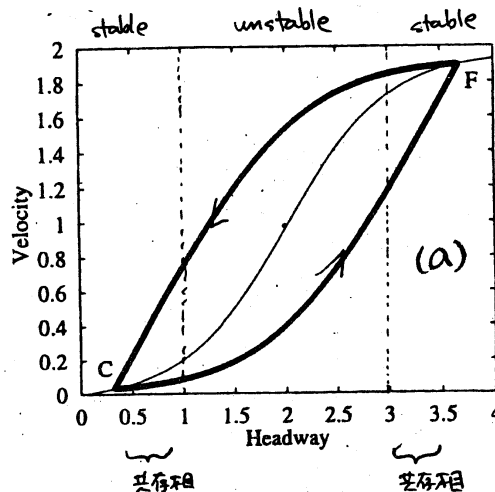


図8

前放方程式
からこのリミット
サイクル (b) は
stop fu. の場合

第二に、位相空間にみられるリミットサイクルの端点 (CとF) は、初期条件やサーキット上の車の数に関係なく決まっているように見える。なら追従方程式から解析的に決まらないのだろうか。車は、安定な渋滞形成後には、ほとんど図7のように同じ振る舞いをする、すなわち、 $x_{n+1}(t) = F(t+T) + v_B T$ と共通の関数 $F(t)$ で書けるはずである。（ここで、 T は後続車が先行車と同じ速度挙動をする時間の差、 v_B は渋滞領域の後退速度）。この式を追従方程式に代入して、

$$\frac{1}{a} \ddot{F}(t) + \dot{F}(t) = V(F(t+T) - F(t)) + v_B T, \quad (3)$$

という微分差分方程式を得る。我々はこれを先行車の轍を踏むという意味で「前轍方程式」と名付けた[?]。これは一般には解析的には解けないが、最適速度関数をステップ関数 ($V(\Delta x) = 0$ (for $\Delta x < b$), $V(\Delta x) = V_0$ (for $\Delta x > b$)、図8参照) ととるとすぐ解けてリミットサイクルも簡単な式になる。もっと複雑な場合には解析的には解けないが、同じようにユニークに決まることがわかるのである[?]。この解析から面白いことが分かった。実は渋滞の長さによってわずかではあるが、渋滞の後退速度が違うのである。ということは、第2の疑問に突き当たる。すなわち、はたして長時間の緩和時間の後には、前に得られた4つの渋滞はどうなるのか? 10000回では分からなかったが、もっとイテレーションを続けていけば、結局1つの渋滞になってしまうように思われるではないか?

5 可積分系の解で拡散系の解をあらわす

さて、ここまでは、私も参加した研究であるが、これを発展させて五十嵐、伊藤、中西は大変面白い発見をした[6]。遅れをとり入れた追従方程式をより一般的化した追従方程式(1990年に Whitham) を考えよう。

$$\dot{x}_k(t + \tau) = V(\Delta x_k), \quad (4)$$

実は、これを τ が微小だとして摂動展開し1次の項までとると結局 OVM と一致する。この方程式は V を tanh タイプにとると、厳密解が楕円テータ関数で記述される粗密波解で、いわゆる可積分系の解となっている。彼らはそこで、OVM が十分な緩和時間の後に形成する解の形を、この可積分系の厳密解(楕円テータ関数)を用いて求めることに成功した。どうやら散逸系に対応している OVM のシステムと、可積分系とに何らかの接点があるらしい。さらに、彼らの論文の中に、実に面白いシミュレーション(9図)が紹介されている。それは、バンチ数に相当する物理量(厳密には保存量ではないのだが)を定義すると、時間経緯とともに、この物理量がパターン形成と関連しながら面白い振る舞いをするのがわかった。つまり車の総台数がきまると、それに対応してまずいくつかのバンチ数が準安定状態になる。ところが、交通流はこのバンチ数の状態で永遠に安定かと思いきや、あるかなり長い時間を経過すると、突如としてより少ないバンチ数に向かって変化し始め、またその少なくなったバンチ数で準安定状態になる。そして、非常に長い緩和時間の後には、例外的な場合を除いて、最終的にはたった1バンチに収斂していく、というシナリオが見えてくる。

問題は、どのような場合にバンチ数が一定のまま

永遠にとどまるか? ということである。答えは

明らかではないか。車の総台数が N のとき、

あるバンチ数 n の渋滞波が実現したとする。

その時、どの渋滞も全く同じ長さの渋滞領域に、

配分されると、サーキット全体は n 個の、

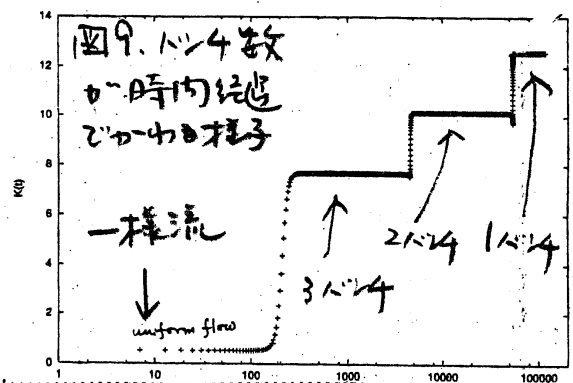
全く同型の渋滞波の繰り返しのパターンになる。

この時は、サーキット全体を n 個の閉じたサー

キットの部分にわかれ、各々 L/n の長さの閉じた、

サーキット上に N/n 台の車が配置された問題

と同等になり、各々の閉じた小さなサーキット上には1バンチの渋滞領域ができているというパターンが形成されるのである。いっておくがたった1台でもこの渋滞中の車の台数に違いがあれば、渋滞領域の長さが違って、渋滞の後退速度がわずかではあっても異なっている、いづれとなりの渋滞と接近して最終的にはバンチ数が減っていく。繰り返しのパターン、すなわち離散的な対称性が厳密に実現したときのみ、準保存量であったバンチ数が、



真の保存量になり、系は可積分系に同等になるのではないだろうか？この点に関しては、彼らもまだ確認していないし、厳密な証明も試みていない。しかし、この可積分系と散逸系との微妙な関係こそ、パターン形成にとって新しい何かを我々に教えてくれそうな気がする。

6 おわりに

交通流の仕事では素人であった私たちが最適速度模型を世に広めようとしていた1993年ころであったろうか。統計数理研究所で講演を頼まれたとき、セミナーでの紹介で、「タイトルは、交通事故を起こす交通模型です。」といわれて、私は、「あら、交通渋滞を引き起こす交通流模型ですよ」と言い直して大笑いになったことがあった。実際には、交通事故も交通渋滞も起こさない方がいいに決まっている。応用面に目の向いていない物理屋だけでは、この交通流模型も実測と厳密に比較して発展させられるほどは利用されないようである。ここには今後考えなければならない問題が含まれている。

ただ、数理科学としての面白さからいうと、実用価値などはさておいて、ここで考察した交通流のパターン形成は、大変単純な1次元のパターンで、この研究会で見せて頂きたいいろいろなファンシイな美しい模様に比べればたいして変哲もない単純なパターンである。それでも自然の自発的構造形成がどうして起るのかについての厳密な解析にはなんらかのヒントを与えているように思われる。いつまでも交通流にこだわらず、そろそろこうしたパターン形成のメカニズムを、もっと面白い自然現象に適用して、エキサイティングな発見をしてみたいと思うこの頃である。それが、性の分化を進化の過程で考える話につながるのだが、枚数もかなり大幅にオーバーしたので、これはまた次の機会に譲ることにしたい。

References

- [1] M.Bando, K.Hasebe, A.Nakayama, A.Shibata adn Y.Sugiyama, 「Dynamical Model of Traffic Congestion and Numerical Calculation」 Physical Review E51(1995),1035.
- [2] M.Bando, K.Hasebe, A.Nakayama, A.Shibata adn Y.Sugiyama, 「Structure Stability of Congestionin Traffic Dynamics」 Japan Journal of Industrial and Mathematical Science 11(1994) 202.
- [3] 「Phenomenological Study of Dynamical Model of Traffic Flow」 J. Phys. I France 5(1995) 1389.
- [4] K.Nakanishi, K.Ito, Y.Igarashi and M.Bando, 「Solvable Optimal Velocity Model and Asymptotic Trajectory」 Physical Review E55(1997) 6519.
- [5] 「交通流理論の新しい流れ」 坂東昌子、中西健一、中山章宏「数理科学」429号（1999年3月号）p66
- [6] 「交通流模型の数理-厳密解構成によるアプローチ」 五十嵐尤二、伊藤克美、中西健一 日本物理学会誌 2000年 55巻（3月号）P204. なお参考文献はこの中に掲載されている。