

壁面が周期的な運動をする場合の
ナビエ・ストークス方程式について

明治大学・工 森本 浩子

はじめに

境界壁が動いている場合のナビエ・ストークス方程式は、
藤田氏及び Sauer 氏によって研究され、Hopf クラスの弱解
の存在が示されている。(Fujita-Sauer [3], [4], Fujita
[2]) この小文では、境界壁が周期的な運動をしている時、
同じ周期を持つ Hopf クラスの弱解が存在することを示す。
与えられる境界条件及び外力は、もちろん壁の運動と同じ周
期を持つものとする。証明の詳細については Morimoto [9]
を見られたい。

境界が固定されている場合の周期的弱解の存在は、2次元
の場合 Prodi [10], Lions [7] によって示された。 n 次元
の場合は、例えば Lions [8] Chap 4 を参照されたい。
我々の場合も、彼らの方法を適用することが出来るが、境界
条件が恒等的に 0 でないので、若干の工夫を要する。

§1. 壁の運動について

流体で充たれている器 $\Omega(t)$ は R^m ($m=2, 3$) の有界領域で、時間 t とともに、周期 $T (>0)$ で動いているとある。 $\Omega(t)$ の境界を $\Gamma(t)$, $\hat{\Omega}_\infty = \bigcup_{-\infty < t < \infty} t \times \Omega(t)$, $\hat{\Gamma}_\infty = \bigcup_{-\infty < t < \infty} t \times \Gamma(t)$ とおく。各 t に於て、 $\Gamma(t)$ は滑らかな $m-1$ 次元超平面であるのみならず、 $\hat{\Gamma}_\infty$ も、後に述べるように滑らかとする。 $\Omega(t)$ には島があってもよいが、その数は常に一定で、消えたり、新たに現われたりはしないものとする。すなわち

仮定 1.1

(i) $\Omega(t+T) = \Omega(t)$, $\Gamma(t+T) = \Gamma(t)$ がすべての $t \in R^1$ に対して成立つ

(ii) $\Gamma(t)$ は j 個の simple closed surfaces から成る。 j は t によらず一定である。

(iii) m 次元空間における距離 $\text{dis}(\Gamma_\alpha(t), \Gamma_{\alpha'}(t))$ ($\alpha \neq \alpha'$) はある正定数 δ_0 より常に大きい。

(iv) $\hat{\Gamma}_\alpha = \bigcup_{0 \leq t \leq T} t \times \Gamma_\alpha(t)$ とする。 R^{m+1} の開集合 U_i ($i=1, 2, \dots, k$) が存在して、 $\hat{\Gamma}_\alpha$ は $\bigcup_{i=1}^k U_i$ で覆われ、各 $\hat{\Gamma}_\alpha \cap U_i$ は、 C^3 級関数 f によって $f(x_1, \dots, x_m, t) = 0$ と表わされる。しかも $\frac{\partial f}{\partial x_\ell}$ ($\ell=1, \dots, m$) は $\hat{\Gamma}_\alpha \cap U_i$ 上で同時に 0 になることはない。

§2. 問題の記述と結果

次の方程式を考えよう

$$(2.1) \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u - \nabla p - (u \cdot \nabla)u + f_0 \quad \text{in } \hat{\Omega}_\infty$$

$$(2.2) \quad \operatorname{div} u = 0 \quad \text{in } \hat{\Omega}_\infty$$

$$(2.3) \quad u = \beta \quad \text{on } \hat{\Gamma}_\infty$$

ここで $u = u(t, x)$ は流速をあらわすベクトル、 $p = p(t, x)$ は圧力、 $f_0 = f_0(t, x)$ は外力、 $\beta = \beta(t, x)$ は境界での速度とある。与えられた f_0 及び β が、 t に関し周期 T を持つとき (この時 f_0, β は T -periodic と呼ぶ)、方程式 (2.1) (2.2) (2.3) をみたす u, p を求める問題を (P_n, π) と呼ぶ。

いくつかの関数空間を準備しよう。 Ω は $\mathbb{R}^m$ の有界領域で境界 $\partial\Omega$ は十分滑らかとする。

$$L_2(\Omega) = \{ f = (f_1, f_2, f_3) ; \int_{\Omega} |f_j(x)|^2 dx < +\infty \}$$

内積を

$$(f, g)_{L_2(\Omega)} = (f, g)_{\Omega} = \sum_{j=1}^3 \int_{\Omega} f_j(x) g_j(x) dx$$

と定義すれば、 $L_2(\Omega)$ は Hilbert 空間である。内積から決まるノルムを $\|f\|_{L_2(\Omega)} = \|f\|_{\Omega}$ などと書く。Sobolev 空間

$$W_2^1(\Omega) = \left\{ f = (f_1, f_2, f_3) \in L_2(\Omega) ; \frac{\partial}{\partial x_j} f \in L_2(\Omega), j=1, 2, 3 \right\}$$

にも上と同様に内積、ノルムを定義する。

$$D_0(\Omega) = \{ \varphi \in C_0^\infty(\Omega) ; \operatorname{div} \varphi = 0 \text{ in } \Omega \}$$

$H_\sigma(\Omega) = D_\sigma(\Omega)$ の $L_2(\Omega)$ に於ける完備化

$H_\sigma^1(\Omega) = D_\sigma(\Omega)$ の $W_2^1(\Omega)$ に於ける完備化。

注意 2.1

$H_\sigma(\Omega)$ の元 φ が適当に定めらるであれば、 2Ω に於て、 φ の法線成分は 0 となるが、 φ は必ずしも 0 ではない。

次に周期関数の空間を導入しよう。 $\hat{\Omega}_\infty, \hat{\Gamma}_\infty$ は既に定義した。 $\hat{\Omega}, \hat{\Gamma}$ は各々 $\hat{\Omega}_\infty, \hat{\Gamma}_\infty$ の一周期分、あなわち

$$\hat{\Omega} = \bigcup_{0 \leq t \leq T} t \times \Omega(t), \quad \hat{\Gamma} = \bigcup_{0 \leq t \leq T} t \times \Gamma(t)$$

とある。

$$\hat{D}_\sigma(\hat{\Omega}_\infty; \pi) = \left\{ \varphi \in C^\infty(\hat{\Omega}_\infty); \operatorname{div} \varphi = 0 \text{ in } \hat{\Omega}_\infty, \right. \\ \left. \hat{\Gamma}_\infty \text{ の近傍で } \varphi \equiv 0, \varphi(t+T) = \varphi(t) \right\}$$

$$\hat{H}_\sigma(\hat{\Omega}_\infty; \pi) = \hat{D}_\sigma(\hat{\Omega}_\infty; \pi) \text{ の } L_2(\hat{\Omega}) \text{ ノルムによる} \\ \text{完備化}$$

$$\hat{H}_\sigma^1(\hat{\Omega}_\infty; \pi) = \hat{D}_\sigma(\hat{\Omega}_\infty; \pi) \text{ のノルム}$$

$$\nu(\varphi) \equiv \|\nabla \varphi\|_{\hat{\Omega}} = \left(\int_{\hat{\Omega}} |\nabla \varphi|^2 dx dt \right)^{1/2}$$

による完備化

仮定 2.2

i) $f_0 \in \hat{H}_\sigma(\hat{\Omega}_\infty; \pi)$

ii) β は $\hat{\Gamma}_\infty$ の近傍で定義された滑らかで T periodic な関数
 $c = c(t, x)$ によって $b(t, x) = \rho_0 c(t, x)$ とかける b の

$\hat{\Gamma}_\infty$ への制限になっている。

注意 2.3

$b|_{\hat{\Gamma}_\infty} = \beta$, $\operatorname{div} b = 0$ となるベクトル b の存在は,

$$\int_{\Gamma(t)} (\beta \cdot n) dS = 0 \quad (n: \text{外向法線})$$

のとき、保証される。(Ladyzhenskaya [6]) 特に

$$\int_{\Gamma_\alpha(t)} (\beta \cdot n) dS = 0 \quad \alpha = 1, \dots, j$$

が成立するとき、適当なベクトル c が存在して、

$$b = \operatorname{rot} c$$

と表わされる。ベクトル b のなめらかさ β 及び Γ のなめらかさから決まる。このような b が1つ求まれば、適当なスカラー関数 $\psi(t, x)$ をとって、 $b^* = \operatorname{rot}(\psi c)$ とおけば、 b^* が再び仮定 2.2 ii) をみたすように出来る。(補題 3.2 参照)

定義 2.4

u が (P_n, π) の弱解であるとは

i) 仮定 2.2 をみたすある b に対して、 $u - b \in \hat{H}_0'(\hat{\Omega}_\infty; \pi)$

$$\text{かつ} \quad \operatorname{ess. sup} \|u(t) - b(t)\|_{\Omega(t)} < +\infty$$

ii) $\hat{D}_0(\hat{\Omega}_\infty; \pi)$ の任意の元 φ に対して、

$$\begin{aligned} F(u, \varphi) &\equiv \int_0^T \{ (u, \varphi_t)_{\Omega(t)} + (u, \Delta \varphi)_{\Omega(t)} + (u, (u \cdot \nabla) \varphi)_{\Omega(t)} \} dt \\ &= - \int_0^T (f_0, \varphi)_{\Omega(t)} dt \end{aligned}$$

定理 2.5

仮定 1.1 及び仮定 2.2 のもとで (P_n, π) の弱解 u が存在す

る。 u はすべて $t \in R^1$ に対して定義され、 $\hat{D}_0(\hat{\Omega}_\infty; \pi)$ の任意の元 φ との内積 $(u(t), \varphi(t))_{\Omega(t)}$ は T -periodic な連続関数となる。

注意 2.6

$$\begin{aligned} (u(t), \varphi(t))_{\Omega(t)} &= (u(0), \varphi(0))_{\Omega(0)} + \\ &+ \int_0^t \left\{ (u(s), \varphi_s(s))_{\Omega(s)} + (u(s), \Delta \varphi(s))_{\Omega(s)} + (u(s), (u \cdot \nabla) \varphi(s))_{\Omega(s)} \right\} ds \\ &+ \int_0^t (f_0(s), \varphi(s))_{\Omega(s)} ds. \end{aligned}$$

$\varphi \in \hat{D}_0(\hat{\Omega}_\infty; \pi)$

が成立つ。さらに、次のエネルギー不等式が成立つ。

$$\|u(t) - b(t)\|^2 + \int_0^t \|\nabla u(s) - \nabla b(s)\|^2 ds \leq C$$

但し C は $\hat{\Omega}$ 及び f_0, b による定数である。

§3. 不等式

この節では、定理 2.5 の証明に必要な不等式をいくつかあげよう。証明は省略する。

R^m の有界領域 B は、なめらかな境界 ∂B を持ち、各 t に於て $\Omega(t)$ を含み、さらに $\text{dis}(\partial B, \Gamma(t)) \geq \delta_0 > 0$ であるとする。 $\hat{B}_\infty = R^1 \times B$, $\hat{B} = [0, T] \times B$ とおく。又、 $\hat{E}_\infty = \hat{B}_\infty - \hat{\Omega}_\infty$, $\hat{E} = \hat{B} - \hat{\Omega}$ とおく。

ε, δ は十分小さい正数、 $\varepsilon < \delta$ とし、

$$\omega_\varepsilon(t; \delta) = \{ x \in \Omega(t); \text{dis}(x, \Gamma(t)) < \delta \}$$

$$\omega_e(t; \delta) = \{x \in B - \overline{\Omega(t)}; \text{dis}(x, \Gamma(t)) < \delta\}$$

$$\omega(t; \varepsilon, \delta) = \{x \in \Omega(t); \varepsilon < \text{dis}(x, \Gamma(t)) < \delta\}$$

とある。又、

$$\hat{\omega}_e(\delta) = \bigcup_{0 \leq t \leq T} t \times \omega_e(t; \delta)$$

$$\hat{\omega}(\delta) = \bigcup_{0 \leq t \leq T} t \times \omega(t; \varepsilon, \delta)$$

とある。

補題 3.1

仮定 1.1 のもとで、次の不等式が、すべての $\varphi \in H_0^1(B)$ とすべての $t \in R^1$ について成立つ

$$i) \quad \|\varphi\|_{\omega(t; \delta)}^2 \leq C \delta \left\{ \|\varphi\|_{\Gamma(t)}^2 + \|\varphi\|_{\omega(t; \delta)} \|\nabla \varphi\|_{\omega(t; \delta)} \right\}$$

$$ii) \quad \delta \|\varphi\|_{\Gamma(t)}^2 \leq C \left\{ \|\varphi\|_{\omega(t; \delta)}^2 + \delta \|\varphi\|_{\omega(t; \delta)} \|\nabla \varphi\|_{\omega(t; \delta)} \right\}$$

$$iii) \quad \left\| \frac{\varphi}{\rho} \right\|_{\omega(t; \varepsilon, \delta)}^2 \leq C \left\{ \frac{1}{\varepsilon} \|\varphi\|_{\Gamma(t)}^2 + \|\nabla \varphi\|_B^2 \right\}$$

ここで、 C は $\varphi, t, \delta, \varepsilon$ によらない定数、 $\rho = \rho(x)$ は x から $\Gamma(t)$ への距離、 $\omega(t; \delta)$ は $\omega_e(t; \delta)$ あるいは $\omega_e(t; \delta)$ である。

補題 3.2

仮定 1.1 が成立しているとする。任意の正数 ε に対して、定数 C 及び仮定 2.2 にみたす関数 $b(t, x)$ が存在して、すべての $\varphi \in H_0^1(B)$, $t \in R^1$ に対して次の不等式が成立つ

$$|((\varphi, \nabla \varphi), b)_B| \leq \varepsilon \|\nabla \varphi\|_B^2 + C(\chi(t, \cdot), \varphi, \varphi)_B$$

但し $\chi = \chi(t, x)$ は $\hat{E}_\infty$ の特性関数、即ち $\hat{E}_\infty$ 上で $\chi \equiv 1$,

$\hat{\Omega}_\infty$ 上で $\chi \equiv 0$ である。

注意 3.3

ナビエ-ストークス方程式の定常問題で、恒等的に 0 でない境界条件がついている場合、上に類似の不等式

$$|((\varphi, \nabla) \varphi, b)_\Omega| \leq 2 \|\nabla \varphi\|_\Omega \quad \varphi \in H_0^1(\Omega)$$

が用いられる。このような b を構成する技巧は Hopf [5] による。補題 3.2 の $b(t, x)$ は、Fujita [1] に従って構成されるが、その際、補題 3.1 の不等式が有用である。

§4. 処罰法

方程式 (2.1) ~ (2.3) は、境界 $\Gamma(t)$ が動いているので直接には考察しにくい。 $\Omega(t)$ を、固定された領域へ写す変換を行って、方程式を変形して問題を考えることも出来るが、ここでは、処罰法と呼ばれる方法で、(2.1) を近似する (良い性質をもった) 方程式をまず考える。処罰法については Lions [8] Chap. 3 参照のこと。

u^n, p^n は、補助領域 $\hat{B}_\infty$ で定義された関数とする。 $\bar{f}_0$ は $f_0 \in \hat{\Omega}_\infty$ の外では 0 とおいて、 $\hat{B}_\infty$ へ拡張したもの、 n は正整数とする。

$$(4.1) \quad \frac{\partial u^n}{\partial t} = \Delta u^n - \nabla p^n - (u^n, \nabla) u^n - n \chi(u^n - b) + \bar{f}_0 \quad \text{in } \hat{B}_\infty$$

$$(4.2) \quad \operatorname{div} u^n = 0 \quad \text{in } \hat{B}_\infty$$

$$(4.3) \quad u^n = 0 \quad \text{on } R' \times 2B.$$

(4.1) ~ (4.3) をみたす T -periodic な u^n, p^n を求める問題を、 $(AP)_n$ と呼ぶ。

注意 4.1

(4.1) は $\hat{\Omega}_\infty$ 上では (2.1) と一致する。

注意 4.2

$u - b = v, \quad u^n - b = v^n$ とおけば、 v, v^n は次の方程式をみたす。

$$(4.4) \quad \frac{\partial v}{\partial t} = \Delta v - \nabla p - (v \cdot \nabla)v - (v \cdot \nabla)b - (b \cdot \nabla)v + f$$

$$(4.5) \quad \frac{\partial v^n}{\partial t} = \Delta v^n - \nabla p^n - (v^n \cdot \nabla)v^n - n \chi v^n - (v^n \cdot \nabla)b - (b \cdot \nabla)v^n + \bar{f}$$

但し $f = f_0 + \Delta b - (b \cdot \nabla)b - b_t, \quad \bar{f} = \bar{f}_0 + \Delta b - (b \cdot \nabla)b - b_t$ 。

$(AP)_n$ をガレルキンの方法に従って解く。 $A = A(B)$ は、 $H_0(B)$ で定義されたストークス作用素、 $\{\varphi_j\}$ は、その固有関数系、 $\varphi_1, \dots, \varphi_m$ が張る m 次元ベクトル空間を Φ_m とする。

(4.5) を考慮して、次の常微分方程式をまず調べよう。

$$(4.6) \quad \begin{aligned} \frac{d}{dt} (w_m(t), \varphi_j) + (\nabla w_m, \nabla \varphi_j) - ((w_m \cdot \nabla) \varphi_j, w_m) \\ + n(\chi w_m, \varphi_j) - ((b \cdot \nabla) \varphi_j, w_m) + ((w_m \cdot \nabla) b, \varphi_j) \\ = (\bar{f}, \varphi_j) \end{aligned} \quad j=1, \dots, m$$

$$(4.7) \quad w_m(0) = w_{m0}$$

但し $(\cdot, \cdot)$ は $L_2(B)$ の内積をあらわす。

補題 3.2 に於て, $\varepsilon = \frac{1}{4}$ としたとき定まる整数 $n_0 > C\frac{1}{\varepsilon}$, 及び関数 $b = b(t, \lambda) \in \mathcal{C}$ とし, 固定する。補題 3.2 及び ポアソンの不等式

$$\|\varphi\|_B^2 \leq \frac{1}{\lambda_0} \|\nabla \varphi\|_B^2 \quad \varphi \in H_0^1(B)$$

を用いて,

$$(4.8) \quad \frac{d}{dt} \|w_m(t)\|^2 + \|\nabla w_m(t)\|^2 + 2(n-n_0)(\chi w_m(t), w_m(t)) \leq \frac{2}{\lambda_0} \|\bar{f}(t)\|^2$$

及び

$$(4.9) \quad \|w_m(t)\|^2 \leq \left\{ \|w_m(0)\|^2 + \frac{2}{\lambda_0} \int_0^t e^{\lambda_0 \tau} \|\bar{f}(\tau)\|^2 d\tau \right\} e^{-\lambda_0 t} \quad \forall t \in [0, T]$$

が (4.8) を満たす $w_m(t)$ に対して成立つ。従って, (4.6)

(4.7) は任意の初期値 $w_{m0} \in \Phi_m$ に対し解 $w_m(t)$ を持つ。

写像 τ_m は, w_{m0} に対し $w_m(T)$ を対応させるものとする。

正の定数 $R \in$

$$R^2 \geq \frac{2}{\lambda_0(e^{\lambda_0 T} - 1)} \int_0^T e^{\lambda_0 t} \|\bar{f}(t)\|^2 dt$$

とすれば, (4.9) より

$$\tau_m : \mathcal{B}_R = \{\varphi \in \Phi_m ; \|\varphi\|_B \leq R\} \rightarrow \mathcal{B}_R$$

であるから, ブラウアーの不動点定理により, τ_m に不動点が存在することが言える。すなわち, 次の命題が成立つ。

命題 4.3

方程式 (4.6) の T -periodic な解 w_m^n が存在して, 評価

$$\begin{aligned} \|w_m^n(t)\|_B^2 + \int_0^t \|\nabla w_m^n(s)\|_B^2 ds + 2(n-n_0) \int_0^t (\chi w_m^n(t), w_m^n(t))_B dt \\ \leq R^2 + \frac{2}{\lambda_0} \int_0^t \|\bar{f}(s)\|_B^2 ds \quad t \in [0, T] \end{aligned}$$

が成立つ。

このようにして得られた $\{w_m^n\}_{m=1}^\infty$ の適当な部分列は、実は $(AP)_n$ の解に収束していることを次に示そう。 $D(A)$ は $A = A(B)$ の定義域、即ち $D(A) = \{u \in W_2^2(B) \cap H_0(B);$

$u=0$ on $\partial B\}$ である。 $D(A)$ は、ノルム $\|Au\|_B$ で Banach 空間になる。 $D(A)$ の共役空間 $D(A)'$ に、ノルム

$$\|f\|_{D(A)'} = \sup_{u \in D(A)} \frac{|(f, u)|}{\|u\|_{D(A)}}$$

を用いて、Banach 空間とみなす。

命題 4.4

$\left\{\frac{d}{dt} w_m^n(t)\right\}_{m=1}^\infty$ は $L_2(0, T; D(A)')$ の有界集合である。

(証明略)

ここで、後にも必要となるコンパクト性に関する補題を述べておく。 X_0, X_1, X_2 は Hilbert 空間とし、作用素 $P: X_0 \rightarrow X_1$, $S: X_0 \rightarrow X_2$ は次の性質を持つとある。

i) P, S は完全連続、線形作用素である。

ii) $Sv=0 \Rightarrow Pv=0 \quad (v \in X_0)$

区間 (α, β) で定義され X_2 に値をとる関数の作る Hilbert 空間 $L_2(\alpha, \beta; X_2)$ を考える。作用素 $\hat{P}, \hat{S}$ を次のように定義する。

$$(\hat{P}v)(t) \equiv Pv(t)$$

$$(\hat{S}v)(t) \equiv Sv(t) \quad v(t) \in L^2(\alpha, \beta; X_0)$$

$$\hat{P}: L_2(\alpha, \beta; X_0) \rightarrow L_2(\alpha, \beta; X_1), \quad \hat{S}: L_2(\alpha, \beta; X_0) \rightarrow L_2(\alpha, \beta; X_2)$$

となる。

補題 4.5 (Fujita-Sauer [4])

$\hat{P}, \hat{S}$ は上に定義された作用素とする。 $\{v_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ が $L_2(\alpha, \beta; X_0)$ の有界集合で、 $\{\frac{d}{dt} \hat{S}v_n\}_{n=1}^{\infty}$ が $L_2(\alpha, \beta; X_2)$ の有界集合であるならば、 $\{\hat{P}v_n\}_{n=1}^{\infty}$ から部分列を選んで $L_2(\alpha, \beta; X_1)$ で強収束するように出来る。

証明は Morimoto [9] を見られたい。

我々の $\{w_m^n\}_{m=1}^{\infty}$ に立ちもうろう。命題 4.3, 4.4 により $\{w_m^n\}$ は $X_0 = H_0^1(B)$, $X_1 = H_0(B)$, $X_2 = (D(A))'$, P, S は injection として補題 4.5 の仮定を満たす。故に、 $\hat{H}_0(\hat{B}_\infty; \pi)$ で強収束する部分列 $\{w_{j_i}^n(t)\}_{j_i=1}^{\infty}$ が選べる。その極限を v^n とすれば、 $u^n = v^n + b$ について次が成立つ。

$$(4.10) \quad u^n - b \in \hat{H}_0^1(\hat{B}_\infty; \pi), \quad \text{ess. sup}_t \|u^n(t) - b(t)\| < +\infty$$

$$(4.11) \quad \int_0^T \{ (u^n, \varphi_t)_B + (u^n, \Delta \varphi)_B + (u^n, (u^n \cdot \nabla) \varphi)_B \} dt \\ = n \int_0^T (X(u^n - b), \varphi)_B dt - \int_0^T (f_0, \varphi)_B dt \\ \varphi \in \hat{D}_0(\hat{B}_\infty; \pi)$$

$$(4.10) \quad (u^n(t), \varphi(t))_B = (u^n(0), \varphi(0))_B + \int_0^t (u^n(s), \varphi_s(s))_B ds + \\ + \int_0^t (u^n, \Delta \varphi)_B ds + \int_0^t (u^n, (u^n \cdot \nabla) \varphi)_B ds +$$

$$+ \int_0^t (\bar{f}_0, \varphi)_B ds - n \int_0^t (\chi(u^n - b), \varphi)_B ds$$

$$\varphi \in \hat{D}_\sigma(\hat{B}_\infty; \pi)$$

$$(4.13) \quad \|v^n(t)\|_B^2 + \int_0^t \|\nabla v^n(t)\|_B^2 dt + 2(n-n_0) \int_0^t (\chi v^n, v^n)_B dt \\ \leq R^2 + \frac{2}{\lambda_0} \int_0^t \|\bar{f}(s)\|_B^2 ds \quad t \in [0, T]$$

$$\text{但し } \bar{f} = \bar{f}_0 + \Delta b - (b \cdot \nabla) b - b_t.$$

§ 5. 定理 2.5 の証明

前節で求めた $\{u^n\}$ は実は (P_1, π) の弱解に収束していることを示す。評価 (4.10) ~ (4.13) により次の収束が成立つ。すなわち、 $\{u^n\}$ の部分列 $\{v^n\}$ が存在して $\varphi \in \hat{D}_\sigma(\hat{\Omega}_\infty; \pi)$ に対し $(v^n(t), \varphi(t))_{\Omega(t)} \rightarrow (v^*(t), \varphi(t))_{\Omega(t)}$ 一樣。

$$v^n \rightarrow v^* \quad \hat{H}_\sigma'(\hat{B}_\infty; \pi) \text{ で弱収束,}$$

v^* は $\text{ess. sup } \|v^*(t)\|_B < +\infty$, $\|v^*\|_{\hat{E}} = 0$ である。

$v^* + b$ の $\hat{\Omega}_\infty$ への制限が定義 2.4 ii) 式を満たすことを言えば定理は証明される。そのために、 $\{v^n\}$ の任意の部分列が、 $\hat{H}_\sigma(\hat{\Omega}_\infty; \pi)$ で強収束する部分列を含むことを言えばよい。

Fujita-Sauer^[4] に従って証明のあらあじを記す。

$$X_0 = \{u \in W_2^1(\Omega); \operatorname{div} u = 0\}, \quad X_1 = H_\sigma(\Omega), \quad X_2 = D(A(\Omega))'$$

とし、 $P: X_0 \rightarrow X_1$, $S: X_0 \rightarrow X_2$ は次のように定義する。

$$Pu = P(\Omega)u \quad u \in X_0$$

$$Su(\varphi) = \langle Su, \varphi \rangle = (u, \varphi)_B \quad u \in X_0, \varphi \in D(A(\Omega)).$$

但し $P(\Omega)$ は $L_2(\Omega)$ から $H_0^1(\Omega)$ への射影である。スカラー α, β 及び領域 $\Omega \in \mathbb{R}^n$, $(\alpha, \beta) \times \Omega \subset \hat{\Omega}_\infty$ となるようにとる。このとき、

補題 5.1

$\{\hat{P}v^n\}$ は $L_2(\alpha, \beta; X_1)$ のコンパクト集合、従って、

$\{P(\Omega)v^n\}$ は $L_2((\alpha, \beta) \times \Omega)$ のコンパクト集合である。

証明

(4.12) 及び (4.13) より $\{v^n\}$ は $L_2(\alpha, \beta; X_0)$ の有界集合、
 $\left\{\frac{d}{dt} \hat{S} v^n\right\}$ は $L_2(\alpha, \beta; X_2)$ の有界集合であること不言である。
 従って補題 4.5 より結論する。

補題 5.2

n に依らない定数 C が存在して

$$\|v^n\|_{\hat{A}} \leq C n^{-\frac{1}{4}}$$

証明

補題 3.1 ii) を $w = w_e$ に対して用いれば

$$\|v^n\|_{\hat{A}}^2 \leq C \left\{ \delta^{-1} \|v^n\|_{\hat{E}}^2 + \|v^n\|_{\hat{E}} \|\nabla v^n\|_{\hat{B}} \right\}$$

(4.13) より

$$\|v^n\|_{\hat{E}} \leq \left\{ \frac{C_1}{2(n-n_0)} \right\}^{1/2}$$

$$\|\nabla v^n\|_{\hat{B}} \leq C_1^{1/2}$$

但し $C_1 = R^2 + \frac{2}{\lambda_0} \int_0^T \|\bar{f}(s)\|_{\hat{B}}^2 ds$ 。従って求める不等式が十分大きい n に対して成立つ。

次の2つの補題は v^n の収束を示すのに役立つ。証明は、Fujita-Sauer [4] を見ればいい。

補題 5.3

$G = (\alpha, \beta) \times \Omega \subset \hat{\Omega}_\infty$ とする。この時、 G によらない定数 C が存在して、不等式

$$\int_\alpha^\beta \|w(t) - P(\Omega)w(t)\|_\Omega^2 dt \leq C \int_\alpha^\beta \|w(t)\|_{2\Omega}^2 dt$$

がすべての $w \in \hat{H}_0^1(\hat{B}_\infty; \pi)$ に対し成立つ。

補題 5.4

$G = (\alpha, \beta) \times \Omega \subset \hat{\Omega}_\infty$, $(\alpha, \beta) \times 2\Omega \subset \hat{\omega}_\varepsilon(\delta)$ とする。

この時、 G と δ に依らない定数 C が存在して、不等式

$$\int_\alpha^\beta \|w(t)\|_{2\Omega}^2 dt \leq C \left\{ \int_\alpha^\beta \|w(t)\|_{\Gamma(t)}^2 dt + \delta \int_\alpha^\beta \|\nabla w(t)\|_B^2 dt \right\}$$

がすべての $w \in \hat{H}_0^1(\hat{B}_\infty; \pi)$ に対し成立つ。

これで定理の証明の準備は整った。 $\hat{\Omega}$ を次のように“細分”する。 $\{t_j\}$ は $[0, T]$ の可算個の稠密な集合とする。

$$G_{j,k,l} = (t_j, t_k) \times \Omega^l(t_j)$$

$$\Omega^l(t_j) = \Omega(t_j) - \overline{\omega_\varepsilon(t_j; \frac{1}{2})}$$

$$= \left\{ x \in \Omega(t_j) ; \operatorname{dis}(x, \Gamma(t_j)) > \frac{1}{2} \right\}$$

$\hat{\Omega}$ の空でない開集合 $G_{j,k,l}$ の全体を $\mathcal{G}$ とおく。補題 5.1 より、必要ならばさらに部分列 $\{v^{n'}\}$ を選んで、すべての

$G \in \mathcal{G}$ に対して $\{P(\Omega)v^{n'}\}$ が $L_2(G)$ で強収束するように出来る。このようにして選んだ部分列は実は $L_2(\hat{\Omega})$ で強収

束していることを以下で示そう。任意の正数 ε が与えられた時, (4.13) を考慮すれば

$$\delta \|\nabla v^n\|_{\hat{B}}^2 < \varepsilon \quad n=1, 2, \dots$$

が成立するような $\delta > 0$ が存在する。この時、有限個の Ω の元

$G_1, G_2, \dots, G_{N(\delta)}$ を選んで

$$i) \quad \hat{\Omega} - \bigcup_{j=1}^{N(\delta)} G_j \subset \hat{\omega}_\varepsilon(\delta)$$

$$ii) \quad \forall x \in \bigcup_{j=1}^{N(\delta)} G_j \text{ は高々2つの } G_j \text{ にしか属さない}$$

と出来る。各 G_j は $(\alpha_j, \beta_j) \times \Omega_j$ と表わされているとする。

$w = v^{n'} - v^{m'}$ とおく。

$$\|w\|_{\hat{\Omega}}^2 \leq \sum_{j=1}^{N(\delta)} \|P(\Omega_j)w\|_{G_j}^2 + \sum_{j=1}^{N(\delta)} \|w - P(\Omega_j)w\|_{G_j}^2 + \|w\|_{\hat{\omega}(\delta)}^2$$

に於て、右辺第一項は $n', m' \rightarrow \infty$ のとき 0 に収束する。

第二項は補題 5.3, 5.4 及び G_j のかたなり具合により、

$$C \{ \|w\|_{\hat{A}}^2 + \delta \|\nabla w\|_{\hat{B}}^2 \}$$

で上から評価される。これはさらに、補題 5.2 と δ の選び方

により $C \left(\frac{1}{\sqrt{n'}} + \frac{1}{\sqrt{m'}} + 2\varepsilon \right)$ でおさえられる。第三項

は補題 3.1 の不等式 i) を用いて

$$\begin{aligned} \|w\|_{\hat{\omega}(\delta)}^2 &\leq C (\delta \|w\|_{\hat{A}}^2 + \delta^2 \|\nabla w\|_{\hat{B}}^2) \\ &\leq C \delta \left(\frac{1}{\sqrt{n'}} + \frac{1}{\sqrt{m'}} + 2\varepsilon \right) \end{aligned}$$

$$\text{従って } \lim_{m', n' \rightarrow \infty} \|w\|_{\hat{\Omega}}^2 \leq C \cdot \varepsilon$$

故に $\{v^{n'}\}$ は $L_2(\hat{\Omega})$ で強収束する。よって定理は証明さ

れた。

引用文献

- [1] H. Fujita : On the existence and regularity of the steady-state solutions of the Navier-Stokes equation, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect I 9 (1961), 59-102
- [2] H. Fujita : 壁面が動くときのナビエ-ストークス方程式について. 数理科学講究録 106
- [3] H. Fujita and N. Sauer : Construction of weak solutions of the Navier-Stokes equations in a non-cylindrical domain, Bull. Amer. Math. Soc. 75 (1965), 465-468
- [4] H. Fujita and N. Sauer : On existence of weak solutions of the Navier-Stokes equations in regions with moving boundary, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. I 17 (1970), 403-420.
- [5] E. Hopf : On nonlinear partial differential equation, Lecture series of symposium on partial differential equations, Univ. of Kansas (1957), 1-32
- [6] O. A. Ladyzhenskaya : The mathematical theory of viscous incompressible flow, Gordon and Breach, New York, 1963.
- [7] J. L. Lions : Sur la régularité et l'unicité des solutions turbulentes des équations de Navier-Stokes,

Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, 30 (1960), 16-23

- [8] J. L. Lions ; Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires , Dunod, Paris , 1969.
- [9] H. Morimoto : On existence of periodic weak solutions of the Navier-Stokes equations in regions with periodically moving boundaries, to appear in J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect I.
- [10] G. Prodi : Qualche risultato riguardo alle equazioni di Navier-Stokes nel caso bidimensionale , Rend. Sem. Mat. Univ. Padova 30 (1960), 1-15.