

箱の中の熱対流—解の分岐

同志社大・工 水島 二郎 (Jiro MIZUSHIMA)
同志社大・工 足立 高弘 (Takahiro ADACHI)

1 はじめに

水平流体層における熱対流の発生とその安定性や鉛直流体層における自然対流の安定性の研究は、主に無限に広い流体層の仮定のもとで行われてきた (例えば Clever & Busse [1], Mizushima & Gotoh [2] 参照).

3 次元的に有限な直方体容器中でのベナール対流の発生は Davis [3] により行われた. 彼は直方体容器中で発生する熱対流の形として短い辺に平行なロール形が選ばれることを線形安定性理論により見いだした.

Velte[4] は流れ場が 2 次元的であると仮定し, ベナール対流の発生を調べた. 2 次元矩形容器中でのベナール対流の発生に関するより詳しい研究は最近でも Lee, Schultz & Boyd [5] や Mizushima [6] により活発に行われている.

2 次元矩形容器が水平面より θ 傾いたときの影響は Cliffe & Winters [7] により調べられ, 下面の温度がわずかでも上面よりも高いときには常に対流が発生することが示された. すなわち, $\theta = 0$ のときにみられるピッチフォーク分岐は θ の変化に対して構造不安定であり不完全ピッチフォーク分岐となることが明らかになった. 特別な場合として, 容器を 90° 傾けた場合は, 容器の側面からの加熱により水平方向の温度勾配が存在するが, このときにも自然対流は温度勾配の大小によらず常に存在する. この自然対流の線形安定性は Gelfgat & Tanasawa [8] により調べられ, ホップ分岐が生じることが示された.

ここでは, 矩形容器中に満たされた流体を下から加熱したときに発生する熱対流および容器が水平面から傾いて置かれているときに発生する自然対流の安定性について詳しく調べる. 流体運動は 2 次元的であると仮定し. 上下面および左右両面の境界は滑りなしの固体境界で完全熱伝導物質でできていると仮定する.

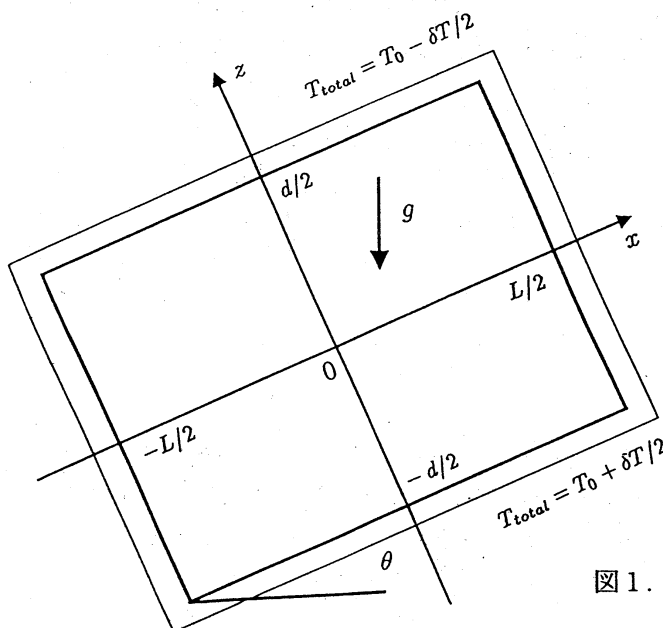


図 1. 座標系. 下面から加熱, 上面を冷却.

2 基礎方程式と境界条件

高さ d , 幅 L の矩形容器に満たされた流体を考える。容器は水平面から角度 $\theta(\text{rad})$ 傾いて置かれており、上下面および左右両面は完全熱伝導性をもつ固体壁でできているものとする。容器の一辺 ($\theta = 0$ のときは下面) を一定の温度 $T_0 + \delta T/2$ 、対辺をそれよりも低い温度 $T_0 - \delta T/2$ に保つ。座標系は図 1 に示すように箱の中心を通り、箱の加熱面に平行に x 軸、それと垂直に z 軸をとる。流れ場は 2 次元的であると仮定する。このとき、浮力項を除いては流体の物質的な性質は変わらないとするブジネスク近似を用いると、流れ関数 ψ と、温度の熱伝導解からのずれ T を支配する方程式は、無次元形で次のように書くことができる。

$$\frac{\partial \Delta \psi}{\partial t} - P \Delta^2 \psi + P Ra \sin \theta - P Ra \left(\frac{\partial T}{\partial z} \sin \theta - \frac{\partial T}{\partial x} \cos \theta \right) = J(\psi, \Delta \psi), \quad (1)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} - \Delta T + \frac{\partial \psi}{\partial x} = J(\psi, T). \quad (2)$$

ここで、温度 T は流体が静止していると仮定したときの熱伝導解からのずれであり、流体中の各点の温度は熱伝導状態での線形分布 $-z$ をつけ加えて $T_{\text{total}}(x, z) = -z + T(x, z)$ と表される。また、 $J(f, g)$ および Δ はそれぞれ次式で定義されるヤコビアンおよび (x, z) 平面における 2 次元ラプラシアンである。

$$J(f, g) \equiv \frac{\partial(f, g)}{\partial(x, z)}, \quad \Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

流れの場を特徴づける無次元パラメータは、水平方向からの容器の傾き θ 、矩形容器のアスペクト比 $A = L/d$ 、および次式で定義されるレイリー数 Ra およびプラントル数 P である。

$$Ra = \frac{\gamma g \delta T d^3}{\nu \kappa}, \quad P = \frac{\nu}{\kappa}. \quad (3)$$

以下では、 $P = 7$ (水) の場合についての結果を詳しく述べる。また、 κ は流体の熱拡散係数、 ν は動粘性係数、 γ は熱膨張係数、 g は重力加速度である。

容器の上下面および左右両面は完全熱伝導性をもつ固体壁でできているものと仮定しているので境界条件は

$$\begin{aligned} \psi = \frac{\partial \psi}{\partial z} = 0, \quad T = 0 \quad \text{at} \quad z = \pm 1/2, \\ \psi = \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0, \quad T = 0 \quad \text{at} \quad x = \pm A/2, \end{aligned} \quad (4)$$

となる。

3 静止状態の線形安定性

容器が水平に置かれている場合、レイリー数 Ra が小さいあいだは流体は静止状態にあり、レイリー数がある臨界値を超えると対流が発生する。静止状態の線形安定性を調べることで臨界条件を求める。臨界状態における線形方程式は、(1), (2) 式において非線形項を省略し、安定性の交替が成立することを考慮すると次のように表せる。

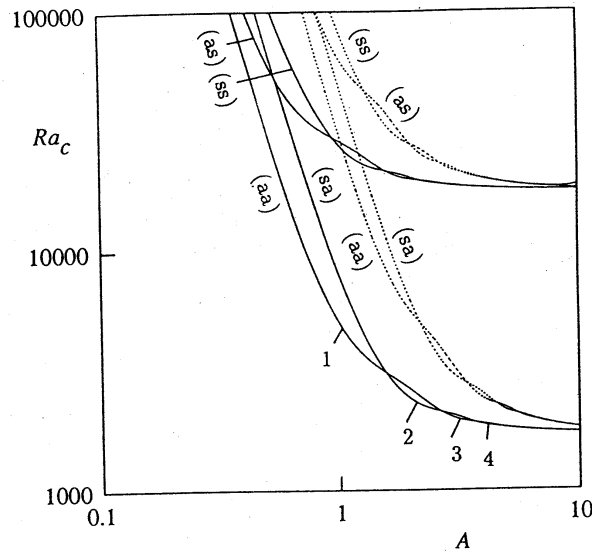


図2. 静止状態における臨界レイリー数.
実線は第一モード, 破線は第二モード.

$$\Delta^2 \psi = Ra \frac{\partial T}{\partial x}, \quad (5)$$

$$\Delta T = \frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (6)$$

方程式 (5), (6) を (4) 式の境界条件のもとで解くことにより, 臨界レイリー数 Ra_c およびその固有関数を求めることができる. 数値計算においては, チェビシエフ多項式展開およびフーリエ展開を用い, ガラーキン法およびコロケーション法によりレイリー数 Ra を固有値とする固有値問題を解く. 方程式 (5) および (6) 式と境界条件 (4) を満たす解は x 方向および z 方向に対する対称性すなわち, $Z_2 \times Z_2$ 対称性によって, 以下に示すような異なるパリティをもつ4つのモードに分類できる.

(aa) モード: 流れのパターンは渦が x 方向および z 方向ともに奇数個あり, 固有関数は $\psi(e, e), T(o, e)$ で表される.

(sa) モード: 流れのパターンは渦が x 方向に偶数個, z 方向に奇数個あり, 固有関数は $\psi(o, e), T(e, e)$ で表される.

(as) モード: 流れのパターンは渦が x 方向に奇数個, z 方向に偶数個あり, 固有関数は $\psi(e, o), T(o, o)$ で表される.

(ss) モード: 流れのパターンは渦が x 方向および z 方向ともに偶数個あり, 固有関数は $\psi(o, o), T(e, o)$ で表される.

ただし, 上の分類でたとえば $\psi(e, e)$ は ψ が x 方向および z 方向ともに偶関数で表されることを示している.

パリティの異なる4つのモードについて数値計算の結果得られた臨界レイリー数を図2に示す. 図2ではアスペクト比 $0.1 < A < 10$ について, 第二不安定モードまでの臨界レイリー数をグラフにした. 図中の数字は x 方向の渦の個数を表している. アスペクト比 A が小さいときは (aa) モードが臨界レイリー数を与え, A の値が 1.57 よりも大きくなると臨界モードは (sa) モードとなる. さらに A の値を大きくすると (aa) モードと (sa) モードが交互に臨界モードとなり, (as) モードと (ss) モードは A のどの値においても臨界モードとなることはない. (aa) モードと (sa) モードの中立曲線は互いに交わるが, 同じ対称性を

持った曲線は決して交わらない. たとえば, (aa) モードの第一および第二不安定モードは互いに交わることはない. これは, 固有値の反発が起きているためと考えられる. (aa) と (sa) の二つのモードが交わる場所の A の間隔はほぼ一定で, $\Delta A \simeq 1.0$ である. これは, x 方向の渦の大きさが 1 であり, A が 1 増加すると x 方向の渦の数が 1 増加することを示している. $A \rightarrow \infty$ の場合には無限に広い流体層における臨界レイリー数 $Ra_c = 1707.8$ に近づく. $A \ll 1$ の場合には縦長の容器になるが, 臨界モードは (aa) モードであるので縦には細長い一つの渦ができており, 二つ以上の渦ができることはない.

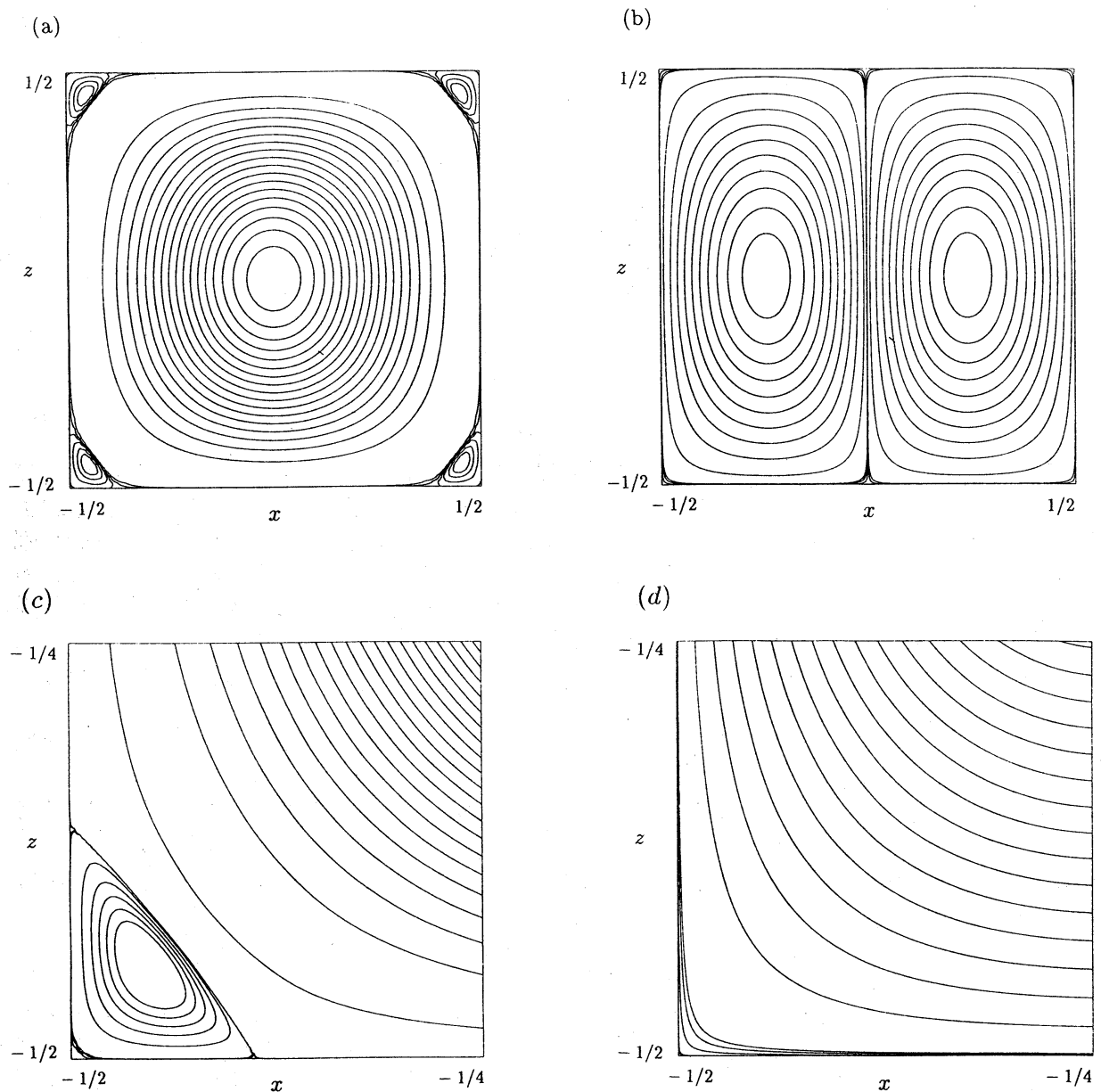


図 3. 臨界状態における (a): 流れ場と (b): 温度場. (c), (d) は (a), (b) を拡大したもの.

次に、 $A = 1$ の場合の臨界点における流れ場と温度場のパターンを図 3 に示す。図 3 (a) は攪乱の流線を (b) は等温度線を表している。図 3 (a) より対流は中央に大きな反時計回り (又は時計回り) の循環流が生じており、四つ角にそれぞれ小さい渦があることが分かる。図 3 (b) において等温度線は二つの同心円群でできており、右側の同心円群の中央の温度が高く左側の同心円群の中央の温度が低い。図 3 (c) と (d) はそれぞれ図 3 (a) と (b) の拡大図である。流れ場においてコーナーを拡大してみると小さな渦が存在していることが分かる。しかし、温度場においてコーナーを拡大してみても、そのような渦は認められない。これは、流れ場におけるこの小さな渦が、温度差によって生ずる浮力によって発生するものではなく、中心に存在する大きな渦の影響で発生するものと考えられる。また、この小さな渦はさらに小さな渦を励起させると考えられ、コーナーに近づくほど、大きさと強さが指数関数的に減少した渦が存在することが予想される。そのような渦はモハット渦と呼ばれている。ここでは、モハット渦が二つ目まで確認できた。

4 非線形平衡解

容器が水平に置かれている場合には、熱伝導状態における不安定性の結果として、 $Ra > Ra_c = 5011.7$ で対流が発生する。一方、容器が傾いている場合にはどんなに小さな $Ra > 0$ でも対流が生じる。ここでは、それらの対流の非線形平衡解を数値的に求める。平衡状態においては (1), (2) において $\partial/\partial t = 0$ とおくことができ、平衡解 $(\bar{\psi}, \bar{T})$ が満たす方程式は次のようになる。

$$-P\Delta^2\bar{\psi} + PRa \sin \theta - PRa\left(\frac{\partial \bar{T}}{\partial z} \sin \theta - \frac{\partial \bar{T}}{\partial x} \cos \theta\right) = J(\bar{\psi}, \Delta\bar{\psi}), \quad (7)$$

$$-\Delta\bar{T} + \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial x} = J(\bar{\psi}, \bar{T}). \quad (8)$$

(7), (8) 式を、(4) 式の境界条件のもとで解くことにより平衡解 $(\bar{\psi}, \bar{T})$ が求められる。

今後は、 $A = 1$ の場合のみを取り扱うことにする。このとき、静止状態における線形安定性解析の結果より、水平に置かれた箱の中で静止している流体は、(aa) モードが、最も早く不安定になる。(aa) モードは、レイリー数 $Ra = 5011.7$ でピッチフォーク分岐を起こし対流が発生するが、この (aa) モードは自分自身との非線形相互作用により (ss) モードを励起する。したがって、平衡解は (aa) モードと (ss) モードを線形結合したモードすなわち以下に示すような、流れ関数が原点に関して Z_2 対称性を持つモード (s-モード) となる。

$$\bar{\psi}(-x, -z) = \bar{\psi}(x, z), \quad \bar{T}(-x, -z) = -\bar{T}(x, z). \quad (9)$$

容器を傾けた場合にも (7), (8) 式の平衡解として (9) 式で表されるような、流れ場が原点に関して Z_2 対称性を持つモードが生じると予想される。

定常解の振幅を特徴づける量として、次式で定義される $(x, z) = (1/4, 1/4)$ における z 方向の速度 w_1 およびヌセルト数 Nu を用いることにする。

$$w_1 = -\frac{\partial \bar{\psi}}{\partial x} \quad \text{at } (x, z) = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right), \quad (10)$$

$$Nu - 1 = -\int_{-1/2}^{1/2} \frac{\partial \bar{T}}{\partial z} dx \quad \text{at } z = -\frac{1}{2}. \quad (11)$$

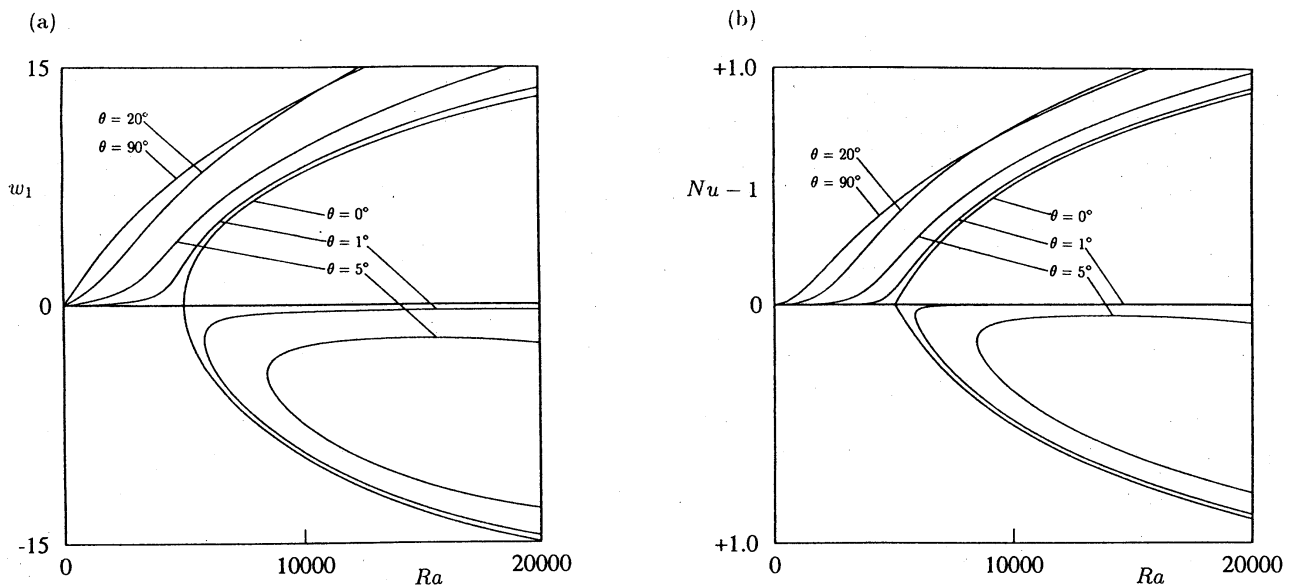


図4. 振幅の分岐. (a): z 方向の速度 w_1 , (b): ヌセルト数 $Nu - 1$.

図4に平衡解の分岐図, (a)に w_1 , (b)に $Nu - 1$ を $\theta = 0^\circ, 1^\circ, 5^\circ, 20^\circ, 90^\circ$ の場合について示す. $Nu - 1$ は常に正の値をもつが, 図4 (b) では図4 (a) との対応がわかりやすいように $w_1 < 0$ に対応する平衡解は下側に描いてある. $\theta = 0^\circ$ の場合には, 振幅の分岐は完全熊手型分岐となる. しかしながら, この熊手型分岐は θ の変化に対して構造不安定であり, $\theta \neq 0$ では不完全分岐となる. すなわち, 容器が水平に置かれているときは臨界点 $Ra = 5011.7$ までは対流は発生しないが, 水平から少しでも傾くと対称性が破れて対流が発生することが分かる. 対流の回転方向は, 容器が水平に置かれている場合には一意的に決まらないが, 容器が傾いた場合には, 容器の傾いた方向に一致する. したがって, 容器が傾いたときの平衡解は, 原点から出るなめらかな遷移分枝と, サドルノード点でつながる2つの分枝との合計3つの分枝で表されるが, 容器をゆっくりと熱した場合には容器の傾いた方向にゆっくり対流が発生しなめらかな遷移分枝上の解になる. サドルノード点でつながる2つの分枝のうち上側分枝は常に不安定であり, 下側分枝は新たな不安定性が生じるまでは安定である. 下側分枝は, 対流の回転方向が容器の傾きの方向と反対であることを表すが, 下側分枝に移るには刺激が必要であるので, 普通には下側分枝は通らないものと考えられる. 下側分枝のサドルノード点は $\theta = 1^\circ$ のとき $Ra_{SN} = 5858.3$ であり, $\theta = 5^\circ$ では $Ra_{SN} = 8444.5$ となり, 傾きが大きくなるにつれ増加する.

5 平衡解の安定性

平衡解 $(\bar{\psi}, \bar{T})$ の線形安定性を調べるため, 流れ関数および温度を平衡解と攪乱の和として次式のようにおく.

$$\begin{aligned}\psi &= \bar{\psi} + \psi', \\ T &= \bar{T} + T'.\end{aligned}\tag{12}$$

ここで, $\psi'(x, z, t)$ および $T'(x, z, t)$ の時間依存性を $\psi' = \hat{\psi} e^{\lambda t}$ および $T' = \hat{T} e^{\lambda t}$ と仮定する. ここで, λ は線形増幅率を表す. 平衡解の安定性は, この λ の符号によって決定される. すなわち, λ の実部を $\text{Re}(\lambda)$ 虚部を $\text{Im}(\lambda)$ とすると, $\text{Re}(\lambda) < 0$ なら攪乱は減衰するので平衡解は安定, $\text{Re}(\lambda) > 0$ なら攪乱は増幅するので平衡解は不安定, $\text{Re}(\lambda) = 0$ なら攪乱は

減衰も増幅もしないので中立安定である。また、 $\text{Re}(\lambda) = \text{Im}(\lambda) = 0$ のとき、解はピッチフォーク分岐を生じ、 $\text{Re}(\lambda) = 0$ のとき $\text{Im}(\lambda) \neq 0$ ならば、解は振動数 $f = \text{Im}(\lambda)/(2\pi)$ をもったホップ分岐を生じる。

(12) 式を (1), (2) 式に代入し、攪乱 $(\hat{\psi}, \hat{T})$ について線形化を行うと、攪乱を支配する方程式は

$$\lambda \Delta \hat{\psi} - P \Delta^2 \hat{\psi} - P Ra \left(\frac{\partial \hat{T}}{\partial z} \sin \theta - \frac{\partial \hat{T}}{\partial x} \cos \theta \right) = J(\hat{\psi}, \Delta \bar{\psi}) + J(\bar{\psi}, \Delta \hat{\psi}), \quad (13)$$

$$\lambda \hat{T} - \Delta \hat{T} + \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial x} = J(\hat{\psi}, \bar{T}) + J(\bar{\psi}, \hat{T}), \quad (14)$$

となる。攪乱 $(\hat{\psi}, \hat{T})$ の境界条件は (4) 式と同じである。

前節で求めた流れ場は原点に関して Z_2 対称性を持つモード (s-モード) であった。その場合には、攪乱を次に示すように、流れ場が原点に関して Z_2 対称性を持つモード (s-モード) と Z_2 反対称性を持つモード (a-モード) に分けて考えることができる。

s-モード:

$$\psi(-x, -z) = \psi(x, z), \quad T(-x, -z) = -T(x, z).$$

a-モード:

$$\psi(-x, -z) = -\psi(x, z), \quad T(-x, -z) = T(x, z).$$

このとき、s-モードは (aa) モードと (ss) モードの線形結合で表され、a-モードは (sa) モードと (as) モードの線形結合で表される。このように、s-モードと a-モードを分けたとき、それぞれを独立に取り扱うことができる。

なめらかな遷移分枝上の各平衡解に対する中立曲線を図 5 (a) に示す。実線はホップ分岐を表わし、破線はピッチフォーク分岐を表わす。このとき、臨界レイリー数は s-モードと a-モードが交互に与えていることが分かる。a-モードはホップ分岐を与える場合とピッチフォーク分岐を与える場合がある。このことを分かりやすく説明するために、図 6 に攪乱の線形増幅率を示す。この図から分かるように $\theta = 10.7^\circ$ を境にしてピッチフォーク分岐を与えるモードが減衰攪乱となり、ホップ分岐を与えるモードがより不安定となるためである。図 5 (a) では、s-モードとホップ分岐を与える a-モードは $\theta = 12.3^\circ, 61.8^\circ, 75.7^\circ, 81.5^\circ, 86.3^\circ$ において 5 度交わっている。これらの交点を図中に 1, 2, ..., 5 のように数字で示した。したがって、 $\theta < 10.7^\circ$ のとき流れ場は、a-モードの攪乱に対して不安定になりピッチフォーク分岐が起こる。 $\theta > 10.7^\circ$ のとき、1 番目の交点までは流れ場は、s-モードの攪乱に対して不安定になりホップ分岐が起こる。以下、s-モードと a-モードが交互に不安定になりホップ分岐が起こる。 $\theta = 90^\circ$ においては、a-モードが臨界レイリー数 $Ra_c = 557.3167 \times 10^4$ を与え、ホップ分岐が起きる。Gelfgat & Tanasawa[8] が同じように $\theta = 90^\circ$ における臨界レイリー数を求めているが、彼らは s-モードのみの攪乱を考え、a-モードの攪乱を考えなかったが、実際には a-モードがより不安定であることが分かった。彼らが求めた臨界レイリー数 $Ra_c = 556. \times 10^4$ は、本研究における s-モードの値と一致している。

次に、サドルノード点から出る下側分枝上の各平衡解に対する中立曲線を $\theta \leq 12^\circ$ の場合について図 5 (b) に示す。臨界レイリー数は、a-モードが与えピッチフォーク分岐が起こる。容器の傾きが増加すると臨界点 Ra_c は減少し、サドルノード点 Ra_{SN} は増加することがわかる。このことから、下側分枝における安定な領域は容器の傾きの増加とともに減少することがわかる。 $\theta = 7.79^\circ$ で、臨界レイリー数とサドルノード点が交わることから、下側分枝における安定な領域は消滅し、それ以上容器の傾きを大きくした場合には平衡解は

すべて不安定であり，サドルノード分枝解が実現されることはない．また，サドルノード点から出る上側分枝上の平衡解はすべて不安定である．

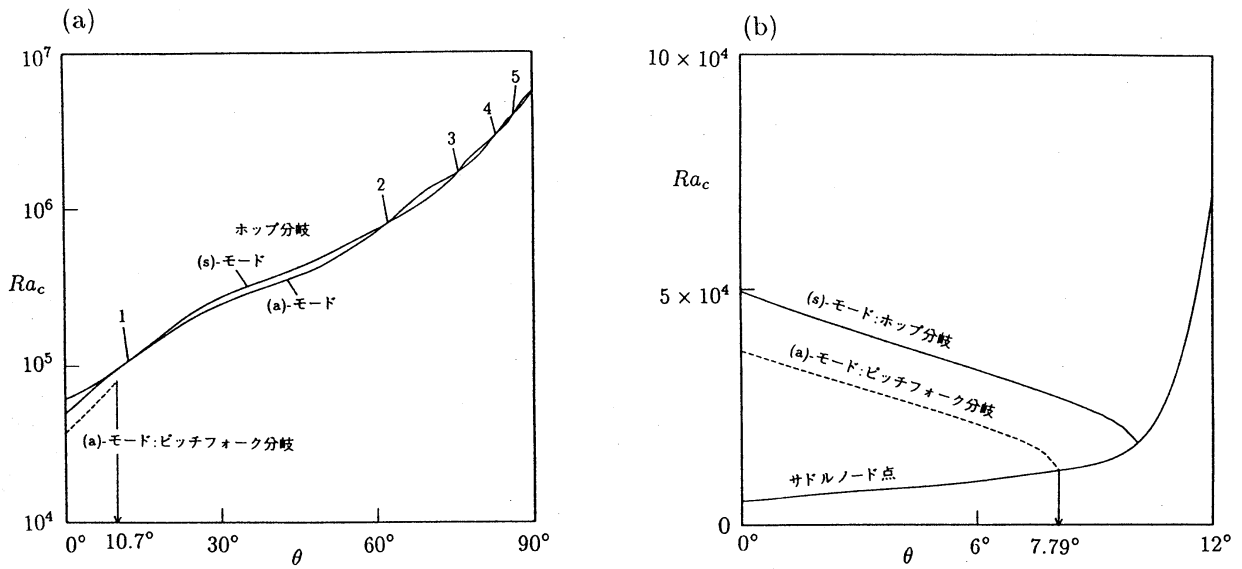


図5. 中立曲線. (a):なめらかな遷移分枝解の臨界レイリー数. 実線はホップ分岐, 破線はピッチフォーク分岐. (b):下側サドルノード分枝解の臨界レイリー数

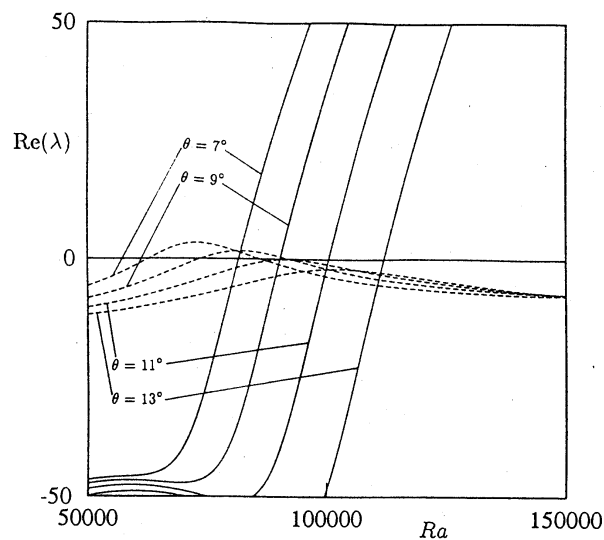


図6. なめらかな遷移分枝解に対する a-モードの線形増幅率. 実線はホップ分岐, 破線はピッチフォーク分岐.

6 結論および今後の展望

本報告では2次元性を仮定し、熱対流の発生および解の分岐について詳しく研究を行った。ここで取り扱った2次元流は、断面が正方形である非常に長いダクトの中で実現されるものと考えられる。Davis[3]が示しているように、そのような長いダクトでは、短い面に平行にロールが発生する。したがって、現実の現象に対応した流れを調べるためには、3次元流としての取り扱いが必要となる。しかしながら、ダクトの短い面を水平から傾けたときには、その回転方向に対流が発生する。この場合には、2次元流としての取り扱いで十分であろうと思われる。しかし、3次元攪乱に対してはどのようなことが生ずるかという疑問は残る。ここではプラントル数を $P=7$ に限定して、ホップ分岐およびピッチフォーク分岐を調べたが、プラントル数がより小さい場合には容器が水平に置かれているときにもホップ分岐が起こることが予想される。さらには、弱非線形理論を用いた局所分岐理論なども今後の課題といえよう。

References

- [1] Clever, R.M. & Busse, F.H. 1974 *J. Fluid Mech.* **65**, 625-645.
- [2] J. Mizushima & K. Gotoh 1976 *J. Fluid Mech.* **52**, 1206-1214.
- [3] S. H. Davis 1967 *J. Fluid Mech.* , **30**, 465-478.
- [4] W. Velte 1964 *Arch. Ration. Mech. Analysis*, **16**, 97-124.
- [5] N. Y. Lee, W. W. Schultz & J. P. Boyd 1989 *Int. J. Heat Mass Transfer* **32**, 513-520.
- [6] J. Mizushima 1995 to appear in *J. Phys. Soc. Japan*
- [7] K. A. Cliffe & K. H. Winters 1984 *J. Comp. Phys.* **54**, 531-534.
- [8] A. Yu. Gelfgat & I. Tanasawa 1994 *Numer. Heat Transfer, Part A* **25**, 627-648.