

Hartree 方程式の解の漸近挙動について

大阪大理 和田 健志 (Takeshi Wada)

平成 5 年 9 月 28 日

1 序

本講では、次の非線形 Schrödinger 方程式の解の $t \rightarrow \infty$ における漸近挙動について考える。

$$\begin{aligned} i \frac{\partial}{\partial t} u_j(t, x) &= -\frac{1}{2} \Delta u_j(t, x) + \sum_{k=1, k \neq j}^N (V * |u_k|^2) u_j(t, x), \\ u_j(0, x) &= \phi_j(x) \quad (j = 1, \dots, N) \end{aligned} \quad (1)$$

但し、 $(t, x) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n (n \geq 2)$, $V(x) = |x|^{-\gamma}$, $0 < \gamma < \min(4, n)$ である。この方程式は Hartree 方程式と呼ばれ、量子力学における N 体問題の近似として現れる。

本講を通じ、以下の記号を用いる：

$U(t) = \exp(it\Delta/2)$, $M(t) = \exp(i|x|^2/2t)$. $L^p(\mathbf{R}^n)$ のノルムを $\|\cdot\|_p$ で表す。 ($p = 2$ のときは、 $\|\cdot\|_2$ を単に $\|\cdot\|$ と書く). $L^{2,s}(\mathbf{R}^n) = \{f(x); \|f\|_{2,s} = \|\langle x \rangle^s f\| < \infty\}$, 但し、 $\langle x \rangle = (1 + |x|^2)^{\frac{1}{2}}$ である。 $H^m(\mathbf{R}^n) (m = 0, 1, 2, \dots)$ を通常 Sobolev 空間、すなわち、 $C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ の $\|f\|_{H^m} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \|\nabla^\alpha f\|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$ による完備化とする。 $\mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$ を Schwartz の急減少関数族とする。 $\mathcal{F}f$ は Fourier 変換 $[\mathcal{F}f](\xi) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbf{R}^n} e^{-ix\xi} f(x) dx$ であり、 $\mathcal{F}^{-1}f$ は逆 Fourier 変換である。

N 個の連立方程式を扱うため、上記の空間の N 個の直和を考えることも多いが、同じ記号を用い、その元は $\vec{f}$ の様に、上に矢印をつけて表す。

Hartree 方程式としては、単独の

$$i \frac{\partial}{\partial t} u(t, x) = -\frac{1}{2} \Delta u(t, x) + (V * |u|^2) u(t, x) \quad (2)$$

が主に研究されている ([2, 3, 4, 5, 6]). しかし、解の $t \rightarrow \infty$ における漸近挙動を調べる際には、(1) と (2) の間には、本質的な違いがある。それは (1) においては非線形項が他粒子との相互作用であるのに対し、(2) においては自己相互作用である点で、このことが問題を難しくしている。(2) については、次の結果が知られている ([3, 5]).

[A] $1 < \gamma < \min(4, n)$, $u(0, x) \in H^1 \cap L^{2,1}$ とする。このとき、

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|u(t) - U(t)\psi\| = 0 \quad (3)$$

となる $\psi \in L^2$ が存在する.

[B] $0 < \gamma < 1$, $u(0, x) \in H^1 \cap L^{2,1}$ とする. このとき, (3) を満たす $\psi \in L^2$ は存在しない.

我々は, (1) の場合に, [A], [B] に類似した結果を示したい. しかし, $\gamma = 1$ の近くでは, それを示すのは難しい. 我々が得たのは, [A], [B] より弱い次の結果である.

定理 1. 次の (i) または (ii) のいずれかを仮定する.

(i) $n \geq 2$, $\sqrt{5} - 1 < \gamma < \min(4, n)$, $\phi_j \in H^1 \cap L^{2,1}(j = 1, \dots, N)$,

(ii) $n \geq 3$, $4 - 2\sqrt{2} < \gamma < \sqrt{5} - 1$, $\phi_j \in H^1 \cap L^{2,2}(j = 1, \dots, N)$.

このとき,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|u_j(t) - U(t)\psi_j\| = 0. \quad (4)$$

を満たす $\psi_j \in L^2(j = 1, \dots, N)$ が存在する.

定理 2. $n \geq 2, \gamma < 1$ または $n \geq 3, \gamma \leq 1$ とし, $\phi_j \in H^1 \cap L^{2,1}(j = 1, \dots, N)$ であって, $\{\phi_j\}$ のうち少なくとも 2 つは恒等的には 0 でない関数とする. このとき, (4) を満たす $\psi_j \in L^2(j = 1, \dots, N)$ は存在しない.

注意. うえの定理で, $\{\phi_j\}$ のうち少なくとも 2 つは恒等的には 0 でない関数であるという仮定は必要である. なぜなら, たとえば $\phi_1 \not\equiv 0, \phi_2 \equiv \dots \equiv \phi_N \equiv 0$ とすると, $u_1(t) = U(t)\phi_1, u_2 = \dots = u_N = 0$ となるからである.

2 準備

予備定理 2.1 (The Gagliardo - Nirenberg inequality). $1 \leq p, q, r \leq \infty$, j, m は整数で, $0 \leq j < m$ とすると,

$$\sum_{|\alpha|=j} \|\nabla^\alpha u\|_p \leq C \left(\sum_{|\beta|=m} \|\nabla^\beta u\|_r \right)^a \|u\|_q^{1-a} \quad (5)$$

である. 但し, $\frac{1}{p} - \frac{j}{n} = a(\frac{1}{r} - \frac{m}{n}) + (1-a)\frac{1}{q}$ であって, a は次の範囲に属する: $m - j - \frac{n}{r}$ が非負の整数のときは $\frac{j}{m} \leq a < 1$, それ以外のときは, $\frac{j}{m} \leq a \leq 1$ である.

予備定理 2.2. $0 < \gamma < n, 1 < p, q < \infty, 1 + \frac{1}{q} = \frac{\gamma}{n} + \frac{1}{p}$ とする. このとき,

$$\| |x|^{-\gamma} * \phi \|_q \leq C \|\phi\|_p \quad (6)$$

が成り立つ.

予備定理 2.3.

$$\int_{R^n} \int_{R^n} \frac{|\phi(x)|^2 |\psi(x)|^2}{|x-y|^\gamma} dx dy \leq C \|\phi\|_q^2 \|\psi\|_q^2. \quad (7)$$

但し, $q = 4n/(2n - \gamma)$ である.

証明. Hölder の不等式と予備定理 2.2. により,

$$\begin{aligned} \int_{R^n} \int_{R^n} \frac{|\phi(x)|^2 |\psi(x)|^2}{|x-y|^\gamma} dx dy &\leq \|V * |\phi|^2\|_{\frac{q}{q-2}} \|\psi\|_q^2 \\ &\leq C \|\phi\|_q^2 \|\psi\|_q^2. \end{aligned}$$

予備定理 2.4.

$$\|V * |\phi|^2\|_\infty \leq C \|\phi\|_{r_1} \|\phi\|_{r_2}. \quad (8)$$

但し, $2 < r_1 < 2n/(n-\gamma) < r_2 < 2n/(n-2)$ (∞ if $n=2$), $\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} = 1 - \frac{\gamma}{n}$ である.

証明. $l > 0$ をひとつ固定しておく. Hölder の不等式により,

$$\begin{aligned} \int_{R^n} V(x-y) |\phi(y)|^2 dy &\leq \int_{|x-y|>l} + \int_{|x-y|<l} \\ &\leq \left(\int_{|x-y|>l} |x-y|^{-\gamma r_1/(r_1-2)} dy \right)^{(r_1-2)/r_1} \|\phi\|_{r_1}^2 \\ &\quad + \left(\int_{|x-y|<l} |x-y|^{-\gamma r_2/(r_2-2)} dy \right)^{(r_2-2)/r_2} \|\phi\|_{r_2}^2 \\ &\leq (l^{-b} \|\phi\|_{r_1}^2 + l^b \|\phi\|_{r_2}^2) \end{aligned}$$

ここで, $b > 0$ である. $l^b = \|\phi\|_{r_1}/\|\phi\|_{r_2}$ となる様に l を選べば, (8) を得る.

3 定理 1 の証明

予備定理 3.1. (i) $\vec{\phi} \in H^l$ ($l \in N$) のとき, (1) と同値な積分方程式

$$U(-t)u_j(t) = \phi_j - i \int_0^t U(-\tau) \sum_{k=1, k \neq j}^N (V * |u_k|^2) u_j(\tau) d\tau \quad (j = 1, \dots, N) \quad (9)$$

は一意的な解 $\vec{u}(t) \in C(R; H^l) \cap C^1(R; H^{l-2})$ を持つ. 更に, $\vec{\phi} \in L^{2,m}$ ($m \in N$) であれば, $U(-t)\vec{u}(t) \in C(R; L^{2,m})$ となる.

(ii) $\vec{u}(t)$ は次の関係式を満たす.

$$\|u_j(t)\| = \|\phi_j\| \quad (j = 1, \dots, N), \quad (10)$$

$$E(\vec{u}(t)) = \sum_{j=1}^N \|\nabla u_j(t)\|^2 + P(\vec{u}(t)) = E(\vec{\phi}). \quad (11)$$

但し, $P(\vec{u}(t)) = \sum_{j,k=1}^N \int_{R^n} \int_{R^n} |u_j(x)|^2 |u_k(y)|^2 / |x-y|^\gamma dx dy$ である.

(iii) 更に, $\vec{\phi} \in L^{2,1}$ であれば, $\vec{u}(t)$ は

$$\sum_{j=1}^N \|x U(-T) u_j(t)\|^2 + t^2 P(\vec{u}(t)) = \sum_{j=1}^N \|x \phi_j\|^2 + \int_0^t \tau P(\vec{u}(\tau)) d\tau \quad (12)$$

を満たす.

証明. (2) の場合とほぼ同じである (例えば, [4] を見よ).

これらは, それぞれ L^2 -norm, エネルギーの保存則及び pseudo-conformal conservation law と呼ばれる.

定理の証明の為に、次の変換を施す.

$$v_j(t) = \mathcal{F}M(t)U(-t)u_j(t). \quad (13)$$

このとき, (1) は

$$i \frac{\partial}{\partial t} v_j(t, x) = -\frac{1}{2t^2} \Delta v_j(t, x) + \frac{1}{t^\gamma} \sum_{k=1, k \neq j}^N (V * |v_k|^2) v_j(t, x) \quad (j = 1, \dots, N). \quad (14)$$

と変換される. (10), (12) はそれぞれ

$$\|v_j(t)\| = \text{constant}, \quad (15)$$

$$\frac{1}{t^2} \frac{d}{dt} \sum_{j=1}^N \|\nabla v_j(t)\|^2 + \frac{1}{t^\gamma} \frac{d}{dt} P(\vec{v}(t)) = 0 \quad (16)$$

と同値である. (16) により, 次の評価が得られる.

$$\sum_{j=1}^N \|\nabla v_j(t)\|^2 \leq \begin{cases} Ct^{2-\gamma} & (\gamma < 2) \\ C & (\gamma \geq 2), \end{cases} \quad (17)$$

$$P(\vec{v}(t)) \leq C. \quad (18)$$

但し, $t \geq 1$ である. $\gamma > 2$ のときは, (18) を直接 (16) から導くことはできない. しかし, (17) と予備定理 2.1., 予備定理 2.3. を使うことにより, (18) を示すことができる.

まず, 定理 1 を (i) のもとで示す. $w_j = s\text{-}\lim_{t \rightarrow \infty} v_j(t) \in L^2$ が存在すれば,

$$\|U(-t)u_j(t) - \mathcal{F}^{-1}w_j\| \leq \|\mathcal{F}M(t)U(-t)u_j(t) - w_j\| + \|w_j - \mathcal{F}M(t)\mathcal{F}^{-1}w_j\|$$

であって, 第一項は明らかに 0 に収束する. 第二項の

$$\|(1 - M(t))\mathcal{F}^{-1}w_j\|$$

は Lebesgue の収束定理により 0 に収束するから,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|u_j(t) - U(t)\mathcal{F}^{-1}w_j\| = 0$$

である. 従って, $s\text{-}\lim_{t \rightarrow \infty} v_j(t)$ が存在することを示せば十分である. (14) と (15) により,

$$\begin{aligned} & \|v_j(t) - v_j(s)\|^2 \\ &= -2\operatorname{Re}(v_j(t) - v_j(s), v_j(s)) \\ &= -2\operatorname{Im} \left\{ \int_s^t \frac{1}{2\tau^2} (\nabla v_j(\tau), \nabla v_j(s)) d\tau \right. \\ & \quad \left. + \int_s^t \frac{1}{\tau^\gamma} \sum_{k=1, k \neq j}^N ((V * |v_k|^2) v_j(\tau), v_j(s)) d\tau \right\}. \end{aligned} \quad (19)$$

$\sqrt{5}-1 < \gamma < 2$ のとき, (17) により

$$\begin{aligned} \text{I} &\leq C \|\nabla v_j(s)\| \int_s^t \|\nabla v_j(\tau)\| d\tau \\ &\leq C s^{1-\frac{\gamma}{2}} \int_s^t \tau^{-1-\frac{\gamma}{2}} d\tau = C(s^{1-\gamma} - s^{1-\frac{\gamma}{2}} t^{-\frac{\gamma}{2}}) \rightarrow 0 \quad (s, t \rightarrow \infty). \end{aligned}$$

$\gamma < 2$ のとき, Hölder の不等式, 予備定理 2.4., (17) 及び (18) により,

$$\begin{aligned} \text{II} &\leq \int_s^t \frac{1}{\tau^\gamma} \sum_{k=1, k \neq j}^N \|((V * |v_k|^2)v_j(\tau))\| d\tau \|v_j(s)\| \\ &\leq C \int_s^t \frac{1}{\tau^\gamma} \sum_{k=1, k \neq j}^N \|(V * |v_k|^2)\|_\infty^{\frac{1}{2}} P(\vec{v})^{\frac{1}{2}} d\tau \\ &\leq C \int_s^t \frac{1}{\tau^\gamma} \sum_{k=1}^N (\|v_k\|_{r_1} \|v_k\|_{r_2})^{\frac{1}{2}} d\tau \\ &\leq C \int_s^t \frac{1}{\tau^\gamma} \sum_{k=1}^N (\|\nabla v_k\|^\gamma \|v_k\|^{2-\gamma})^{\frac{1}{2}} d\tau \\ &\leq C \int_s^t \tau^{\frac{\gamma}{2}(1-\frac{\gamma}{2})} d\tau \end{aligned}$$

$\sqrt{5}-1 < \gamma < 2$ であれば, これは, $s, t \rightarrow \infty$ のとき 0 に収束する. $\gamma \geq 2$ のときは, $s\text{-}\lim_{t \rightarrow \infty} v_j(t)$ の存在を示すのはより簡単である. 実際, このとき, 第一項は先程と同じ様に評価できるし, 第二項は

$$\begin{aligned} &C \int_s^t \sum_{k=1, k \neq j}^N \|v_k(\tau)\|_q^2 \|v_j(\tau)\|_q d\tau \|v_j(s)\|_q \\ &\leq C(\sup_{t \geq 1} \|\vec{v}(t)\|_{H^1})^4 \int_s^t \frac{1}{\tau^\gamma} d\tau \rightarrow 0 \quad (s, t \rightarrow \infty). \end{aligned}$$

となるからである (予備定理 2.4. の証明を見よ).

(ii) の場合には, 少し工夫がいる. まず, つぎの予備定理を示す.

予備定理 3.2. $\vec{\phi} \in H^1 \cap L^{2,2}$ とする. $t \geq 1$ に対し,

$$\|\Delta v_j(t)\|^2 \leq C t^{(\gamma^2 - 8\gamma + 10)/(2-\gamma)} \quad (20)$$

が成り立つ.

証明. $\vec{\phi} \in H^1 \cap L^{2,2}$ であれば, $\vec{v} \in C((0, \infty); H^2) \cap C^1((0, \infty); L^2)$ である. (14) の両辺に Δ を作用させると,

$$i \frac{\partial}{\partial t} \Delta v_j(t, x) = -\frac{1}{2t^2} \Delta^2 v_j(t, x) + \frac{1}{t^\gamma} \sum_{k=1, k \neq j}^N \Delta[V * |v_k|^2] v_j(t, x) \quad (j = 1, \dots, N). \quad (21)$$

これに $\Delta \bar{v}_j$ をかけて積分し, 虚部をとれば,

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \sum_{j=1}^N \|\Delta v_j(t)\|^2 = \frac{1}{t^\gamma} \text{Im} \sum_{k=1, k \neq j}^N \int_{R^n} \Delta[(V * |v_k|^2) v_j] \Delta \bar{v}_j dx.$$

予備定理 2.1., 予備定理 2.2. 及び (17) により,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \sum_{j=1}^N \|\Delta v_j(t)\|^2 &\leq Ct^{-\gamma} \left(\sum_{j=1}^N \|\Delta v_j(t)\|^2 \right)^{\frac{4-\gamma}{2}} \left(\sum_{j=1}^N \|\nabla v_j\| \right)^{\gamma} \\ &\leq Ct^{-\gamma+\gamma(1-\frac{\gamma}{2})} \left(\sum_{j=1}^N \|\Delta v_j(t)\|^2 \right)^{\frac{4-\gamma}{2}} \end{aligned} \quad (22)$$

この微分不等式を解けば, (20) を得る.

注意. $\Delta^2 v_j$ を考える為には, $v_j \in H^4$ が必要であるが, regularizing technique により, $v_j \in H^2$ という仮定の下で上の予備定理を示すことができる.

予備定理 3.3. $1 < \gamma < 4/3$, $\vec{\phi} \in H^1 \cap L^{2,2}$ とする. $t \geq 1$ に対し,

$$\|v_j(t)\|_p \leq C \quad (23)$$

が成り立つ. 但し, $\frac{1}{2} - \frac{(\gamma-1)(2-\gamma)}{n(6-4\gamma)} < \frac{1}{p} \leq \frac{1}{2}$ とする.

証明. (14) の両辺に $|v_j|^{p-2}\overline{v_j}$ をかけて積分し, 虚部をとると

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \|v_j\|_p^p &= \frac{-1}{2t^2} \operatorname{Im} \int_{R^n} \Delta v_j |v_j|^{p-2} \overline{v_j} dx \\ &= \frac{1}{2t^2} \operatorname{Im} \int_{R^n} \nabla v_j \nabla (|v_j|^{p-2} \overline{v_j}) dx \\ &\leq \frac{C}{t^2} \int_{R^n} |\nabla v_j|^2 |v_j|^{p-2} dx \\ &\leq \frac{C}{t^2} \|\nabla v_j\|_p^2 \|v_j\|_p^{p-2}. \end{aligned}$$

ここで, Hölder の不等式を用いた. 予備定理 2.1., 予備定理 3.2. により,

$$\begin{aligned} \|\nabla v_j\|_p &\leq C \|\Delta v_j\|^{\frac{n}{2}-\frac{n}{p}} \|\nabla v_j\|^{1-\frac{n}{2}+\frac{n}{p}} \\ &\leq Ct^\rho \end{aligned}$$

が成り立つ. 但し

$$\rho = \left(\frac{n}{2} - \frac{n}{p}\right) \frac{\gamma^2 - 8\gamma + 10}{2(2-\gamma)} + \left(1 - \frac{n}{2} + \frac{n}{p}\right) \left(1 - \frac{\gamma}{2}\right).$$

である. 従って,

$$\frac{d}{dt} \|v_j(t)\|_p^p \leq Ct^{-2+2\rho} \|v_j(t)\|_p^{p-2}.$$

p が予備定理の条件を満たしていれば, この微分不等式を解くことにより予備定理の主張を得る.

注意. $v_j(t, x) = (it)^{\frac{n}{2}} M(t) u_j(t, tx)$ であるから, この結果は $\|v_j\|_p \leq Ct^{-\frac{n}{2}+\frac{n}{p}}$ を意味する. これは, 自由粒子の場合と同じ減衰評価である.

定理の証明を続けよう.

(ii) の場合の定理 1 の証明. (i) の場合と同じ様に, (19) の右辺を評価していく. 第一項は先程と同じであるので, 第二項だけ考えれば良い. 予備定理 3.3. により, $\|v_j(s)\|_\eta = O(s^\nu)$ ($\frac{1}{\eta} = \frac{1}{2} - \frac{(\gamma-1)(2-\gamma)}{n(6-4\gamma)}$, ν は任意の正数) であるから, $\tau^{-\gamma} \|V * |v_k|^2 v_j(\tau)\|_{\eta'} = O(\tau^{-1-\varepsilon})$ ($\varepsilon > 0$) を示せば十分. Hölder の不等式, 予備定理 2.2., と (18) により,

$$\begin{aligned}
 & \|V * |v_k|^2 v_j(\tau)\|_{\eta'} \\
 & \leq \| (V * |v_k|^2)^{\frac{1}{2}} v_j \| \| (V * |v_k|^2)^{\frac{1}{2}} \|_{\frac{2\eta}{\eta-2}}^{\frac{1}{2}} \\
 & \leq P(\vec{v})^{\frac{1}{2}} \|V * |v_k|^2\|_{\frac{\eta}{\eta-2}}^{\frac{1}{2}} \\
 & \leq C \|v_k\|_\mu \left(\frac{1}{\mu} = 1 - \frac{1}{\eta} - \frac{\gamma}{2n} \right). \tag{24}
 \end{aligned}$$

予備定理 2.1. より,

$$\|v_k\|_\mu \leq C \|\nabla v_k\|^a \|v_k\|_\eta^{1-a},$$

但し $\frac{1}{\mu} = a(\frac{1}{2} - \frac{1}{n}) + (1-a)\frac{1}{\eta}$ であるから, (24) の右辺は

$$C_\nu \tau^{a(1-\frac{\gamma}{2})+\nu}$$

で評価される. 但し ν は任意に小さくとれる正数である. 従って

$$-\gamma + a(1 - \frac{\gamma}{2}) < -1.$$

であればよく, これを整理すると,

$$2\gamma^3 - 19\gamma^2 + 40\gamma - 24 > 0$$

となる. $4 - 2\sqrt{2} < \gamma < \sqrt{5} - 1$ のとき, この式は成り立っている.

4 定理 2 の証明

証明. 矛盾により示す. $w_j = s\text{-}\lim_{t \rightarrow \infty} v_j(t) \in L^2 (j = 1, \dots, N)$ が存在すると仮定すると, (15) により $\|v_j\| = \|w_j\|$ が成り立つ. まず, $\psi \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$ に対し,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (V * |v_k|^2 v_j(t), \psi) = (V * |w_k|^2 w_j, \psi). \tag{25}$$

が成り立つことを示す.

$$\begin{aligned}
 & |(V * |v_k|^2 v_j, \psi) - (V * |w_k|^2 w_j, \psi)| \\
 & \leq |(V * (|v_k|^2 - |w_k|^2) v_j, \psi)| + |(V * |w_k|^2 (v_j - w_j), \psi)| \\
 & = A + B.
 \end{aligned}$$

Fubini の定理と Hölder の不等式により,

$$\begin{aligned}
 A &\leq \int_{R^n} \left(\int_{R^n} V(x-y)(|v_k(y)|^2 - |w_k(y)|^2) dy \right) |v_j(x)| |\psi(x)| dx \\
 &= \int_{R^n} (|v_k(y)|^2 - |w_k(y)|^2) \left(\int_{R^n} V(x-y) |v_j(x)| |\psi(x)| dx \right) dy \\
 &\leq \|(|v_k| + |w_k|)(|v_k| - |w_k|)\|_1 \|V * (|v_j| |\psi|)\|_\infty \\
 &\leq C(\|v_k\| + \|w_k\|) \|v_k - w_k\| (\|\psi\|_{\alpha+\delta} + \|\psi\|_{\alpha-\delta}).
 \end{aligned}$$

但し $\alpha = 2n/(n-2\gamma)$ であって, δ は任意に小さくとれる. $\|v_j(t)\|$ は保存されるから,

$$A \leq C \|v_k(t) - w_k\| \rightarrow 0 \quad (t \rightarrow \infty)$$

である. B についても同様に,

$$B \leq C \|w_k\|^2 \|v_j(t) - w_j\| (\|\psi\|_{\alpha+\delta} + \|\psi\|_{\alpha-\delta}) \rightarrow 0 \quad (t \rightarrow \infty).$$

さて, $\{\phi_j\}$ に関する仮定により, $\sum_{k=1, k \neq j}^N (V * |w_k|^2) w_j \neq 0$ となる j が存在し, $\psi \in S(R^n)$ を

$$Im \sum_{k=1, k \neq j}^N (V * |w_k|^2) w_j, \psi > 0. \quad (26)$$

となる様を選ぶことができる. $w_j - v_j(t)$ と ψ の内積をとれば,

$$\begin{aligned}
 &Re(w_j - v_j(t), \psi) \\
 &= Im \left\{ - \int_t^\infty \frac{1}{2\tau^2} (v_j(\tau), \Delta w) d\tau + \int_t^\infty \frac{1}{\tau^\gamma} \sum_{k=1, k \neq j}^N (V * |v_k|^2 v_j(\tau), \psi) d\tau \right\}.
 \end{aligned}$$

第一項は,

$$\int_t^\infty \frac{1}{2\tau^2} \|v_j(\tau)\| d\tau \|\Delta w\| = \frac{C}{t} \rightarrow 0 \quad (t \rightarrow \infty)$$

となる. (26) により, 第二項は, 十分大きな t に対し,

$$\begin{aligned}
 &Im \int_t^\infty \sum_{k=1, k \neq j}^N (V * |v_k|^2 v_j(\tau), \psi) d\tau \\
 &\geq \frac{1}{2} Im \sum_{k=1, k \neq j}^N (V * |w_k|^2) w_j, \psi \int_t^\infty \frac{1}{\tau^\gamma} d\tau \rightarrow \infty \quad (t \rightarrow \infty)
 \end{aligned}$$

となる. 故に $\lim_{t \rightarrow \infty} Re(w_j - v_j(t), \psi) = \infty$ であるが, これは矛盾である.

注意. $n = 2, \gamma = 1$ のときは, $\alpha = \infty$ となってしまう. 従って, 上の証明は適用できない.

参考文献

- [1] A. Friedman: *Partial Differential Equations*. Holt-Rinehart and Winston, New York, 1969.
- [2] J. Ginibre and G. Velo: On a class of nonlinear Schrödinger equations with nonlocal interaction. *Math. Z.* 170 (1980), 109–136.
- [3] N. Hayashi and T. Ozawa: Scattering theory in the weighted $L^2(\mathbf{R}^n)$ spaces for some Schrödinger equations. *Ann. Inst. Henri Poincaré, Physique Théorique*, 48 (1988), 17–37.
- [4] N. Hayashi and T. Ozawa: Smoothing effect for some Schrödinger equations. *J. Funct. Anal.* 85 (1989), 307–348.
- [5] N. Hayashi and Y. Tsutsumi: Scattering theory for Hartree type equations. *Ann. Inst. Henri Poincaré, Physique Théorique*, 46 (1987), 187–213.
- [6] H. Nawa and T. Ozawa: Nonlinear scattering with nonlocal interaction. *Commun. Math. Phys.* 146 (1992), 259–275.
- [7] E. M. Stein: *Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions*. Princeton Univ. Press, Princeton math. Series 30, 1970.