

函数方程式に対するCG法の適用について

大阪大学工学部 都田艶子

(Tsuyako Miyakoda)

[1]はじめに.

連立一次方程式の解法としてよく使われるCG法は、そのまま函数方程式に対する解法として適用できる。

我々は、2点境界値問題を解くことを目的として、それと等価なフレドホルム型積分方程式を解くことを考え、積分方程式に対し、CG法を適用した例を報告する。

[2]境界値問題と積分方程式

常微分方程式

$$\begin{aligned} L[u] &= p_0(x)u'' + p_1(x)u' + p_2(x)u = f(x) \\ x &\in I = [a, b] \end{aligned} \quad (1)$$

境界条件 $B_1[u] = 0$, $B_2[u] = 0$

を考える。ただし

$p_0(x)$, $p_1(x)$, $p_2(x)$ は滑らかな函数

$p_0(x)$ は I で正, $f(x)$ は I で連続とする。今、

$$D = \{u; u \in C^2(I), B_1[u] = 0, B_2[u] = 0\}$$

とし、これに対して次のような函数の集合を設定する。

$$D^* = \{v; v \in C^2(I), p_0(vu' - uv') + (p_1 - p_0')uv \Big|_a^b = 0, \\ \text{for } u \in D\}$$

$v \in D^*$ である条件は、共役な境界条件で、次のように書く。

$$B_1^*[v] = 0, B_2^*[v] = 0.$$

境界値問題が自己共役であるとは $L = L^*$, $D = D^*$ であるときである。(1) に対する green 函数 $g(x, \xi)$ は次を満たす。

$$L[g] = \delta(x - \xi), \quad a < x, \xi < b$$

$$B_1[g] = 0, B_2[g] = 0.$$

そして、共役な green 函数 $h(x, \eta)$ は次を満たすものとして定義する。

$$L^*[h] = \delta(x - \eta), \quad a < x, \eta < b$$

$$B_1^*[h] = 0, B_2^*[h] = 0.$$

すると、これらより次の式が成り立つ。

$$\int_a^b (h L[g] - g L^*[h]) dx = h(\xi, \eta) - g(\eta, \xi) = 0 \\ a < \xi, \eta < b$$

よって、

$$h(\xi, \eta) = g(\eta, \xi)$$

つまり、自己共役な境界値問題であれば

$$g(x, \xi) = g(\xi, x), \quad a < x, \xi < b$$

が成り立つ。

そこで、自己共役な境界値問題

$$\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{du}{dx}\right) + q(x)u = f(x)$$

$$B_1[u] = \alpha u(a) + \alpha' u'(a) = 0 \quad (2)$$

$$B_2[u] = \beta u(b) + \beta' u'(b) = 0$$

$$\text{ここで、 } f(x) = \lambda \sigma(x) u + s(x)$$

$$\lambda: \text{実数}$$

$\sigma(x)$; 連続, 非負の実数値函数

$s(x)$; I 上で可測な実数値函数

とすると、この解は green 函数を用いて

$$u(x) = \lambda \int_a^b g(x, \xi) \sigma(\xi) u(\xi) d\xi + \int_a^b g(x, \xi) s(\xi) d\xi \quad (3)$$

と書ける。

$$K(x, \xi) = \sqrt{\sigma(x)} g(x, \xi) \sqrt{\sigma(\xi)}$$

$$r(x) = \sqrt{\sigma(x)} \int_a^b g(x, \xi) s(\xi) d\xi$$

$$y(x) = \sqrt{\sigma(x)} u(x)$$

とすると、(2)の解を表わす積分方程式は次のようになる。

$$y(x) = \lambda \int_a^b K(x, \xi) y(\xi) d\xi + r(x) \quad (4)$$

以下、解く方程式として考えるのは、この形の積分方程式とする。

[3] 線型方程式に対するCG法

一般的に方程式を次のように書く

$$Lx = f \quad (5)$$

ここで、

L : 線型, 自己共役, 正值な作用素, $\mathcal{D} \rightarrow \mathcal{R}$

($\mathcal{D}, \mathcal{R}$ はともに Hilbert 空間 H の部分空間)

f : 与えられた Hilbert 空間の元

とすると, L は連続な逆作用素 $L^{-1}: \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{D}$ をもち, (5)

は唯一解 $u = L^{-1}f \in \mathcal{D}$ をもつ.

今, x を真の解 u のある近似としたとき,

$$r = f - Lx \quad (6)$$

$$y = u - x$$

$$E(x) = (y, r) = (u - x, L(u - x)) \quad (7)$$

とすると, 任意の $x \in \mathcal{D}$, $h \in H$ に対し,

$$SE(x, h) = \frac{\partial}{\partial t} E(x + th) \Big|_{t=0} = -2(r, h)$$

$$\sup_{\|h\|=1} SE(x, h) = 2\|r\|$$

これより, 誤差函数として考える汎函数 $E(x)$ の gradient は r であると考えられる.

さて, B_n, x_n を

$\{B_n\}$; $\mathcal{D}$ に収束する有限次元の単調増加な閉部分空間
の列

$$\{x_n\}; x_n \in B_n, E(x_n) = \min \{E(x), x \in B_n\}$$

としたとき.

$$r_n = f - Lx_n = L(u - x_n)$$

に対して、次のことが成り立つ.

$$(r_n, z) = 0 \text{ on } B_n, \text{ for } \forall z \in \mathcal{D} \quad (8)$$

$$x_n \rightarrow u \ (n \rightarrow \infty), \text{ (ノルムの意味で)}$$

今、 u に対する任意の近似 x_0 とし、列 $\{v_n\}$ を次のように定める。

$$v_0 = r_0 = f - Lx_0 \quad (9)$$

$$v_n = L^n r_0, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

この $\{v_n\}$ は線型一次独立であり、 B_n を $\{v_0, \dots, v_{n-1}\}$ によって張られる部分空間とする。 $\{v_i\}$ より、直交系 $\{p_i\}$ を

$$(Lp_i, p_j) = 0 \ (i \neq j) \quad (10)$$

となるように構成する。(Schmidtの直交化法)。すると、

$\{p_0, \dots, p_{n-1}\}$ はまた B_n を張る。

$\mathcal{D}$ を可分と仮定する。

$\mathcal{D}$ には少なくとも一つの線型独立な列 $\{p_n\}$ が存在し、各 B_n は $\{p_0, \dots, p_{n-1}\}$ で張られ、 $\bigcup_{n=0}^{\infty} B_n = \mathcal{D}$ となる。

そこで、

$$u = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i p_i \quad (11)$$

$$x_n = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i p_i, \quad x_n \in B_n \quad (12)$$

とすると,

$$x_n = x_{n-1} + \alpha_{n-1} p_{n-1}$$

$$(L(u - x_n), p_{n-1}) = 0 \text{ より}$$

$$\alpha_{n-1} = (r_{n-1}, p_{n-1}) / (L p_{n-1}, p_{n-1})$$

$$f = L x_{n-1} \quad r_{n-1} = f - L x_{n-1}$$

$$r_n = f - L x_n = r_{n-1} - \alpha_{n-1} L p_{n-1}$$

そこで, $\{p_n\}$ を $\{L^n r_0\}$ より構成すると

$$p_0 = r_0 \text{ とし}$$

$$p_n = L^{n-1} r_0 - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(L^{n-1} r_0, L p_k)}{(L p_k, p_k)} p_k \quad (13)$$

となるが、これはまた直交系の三項漸化式の関係を用いると

$$p_n = -\alpha_{n-1} L p_{n-1} + (1 - \beta_{n-1}) p_{n-1} + \beta_{n-2} p_{n-2} \\ \beta_{n-1} = \frac{(r_n, L p_{n-1})}{(L p_{n-1}, p_{n-1})}, \quad \beta_{-1} = 0 \quad (14)$$

と書け. $p_0 = r_0$, $p_1 = r_1 - \beta_0 p_0$ より

$$p_n = r_n - \beta_{n-1} p_{n-1} \quad (n \geq 2)$$

とできる。このとき次のそれぞれの関係式が成り立つ。

$$(r_i, r_k) = 0, \quad i \neq k$$

$$(p_n, r_k) = (r_n, r_k) \quad (15)$$

$$p_n = (r_n, r_n) \sum_{i=0}^n r_i / (r_i, r_k)$$

$$(p_n, p_k) = ((r_n, r_n) / (r_k, r_k)) (p_k, p_k)$$

以上より、反復公式は以下のようになる。

x_0 : 初期値

$$r_0 = f - Lx_0, \quad p_0 = r_0$$

$$x_{k+1} = x_k + \alpha_k p_k, \quad \alpha_k = \frac{(r_k, p_k)}{(Lp_k, p_k)} \quad (16)$$

$$r_{k+1} = r_k - \alpha_k L p_k$$

$$p_{k+1} = r_{k+1} + \beta_k p_k, \quad \beta_k = \frac{(r_{k+1}, r_{k+1})}{(r_k, r_k)}$$

誤差関数 $E(x)$ に対しては、以下のことがいえる。

$$\mu(z) = \frac{(Lz, z)}{(z, z)}, \quad \nu(z) = \frac{(L^{-1}z, z)}{(z, z)}, \quad z \in D$$

とすると、 $0 < m \leq \mu(z) \leq M$, $0 < \frac{1}{M} \leq \nu(z) \leq \frac{1}{m}$ (m, M はそれぞれ L のスペクトルの最大下界と最小上界)。

$$\begin{aligned} \frac{E(x_{n+1})}{E(x_n)} &= \frac{(y_{n+1}, Ly_{n+1})}{(y_n, Ly_n)} \\ &= 1 - \frac{2\alpha_n(p_n, Lp_n) - \alpha_n^2(p_n, Lp_n)}{(y_n, Ly_n)} \\ &= 1 - \frac{\alpha_n}{\nu(r_n)} \end{aligned}$$

α_n は次の関係式を満たす。

$$\frac{1}{M} \leq \frac{1}{\mu(r_n)} \leq \alpha_n \leq \frac{1}{\mu(p_n)} \leq \frac{1}{m}$$

$$\text{よって、} E(x_{n+1}) \leq \left(1 - \frac{m}{M}\right) E(x_n)$$

<1>かえすと。

$$E(x_{n+1}) \leq \left(1 - \frac{m}{M}\right) E(x_n) \leq \left(1 - \frac{m}{M}\right)^{n+1} E(x_0) \quad (17)$$

$$E(x_{n+1}) = (y_{n+1}, Ly_{n+1}) \geq m(y_{n+1}, y_{n+1})$$

$$E(x_{n+1}) = (L^{-1}r_{n+1}, r_{n+1}) \geq \frac{1}{M}(r_{n+1}, r_{n+1})$$

より、さらに次のことがいえる。

$$(y_{n+1}, y_{n+1}) \leq \frac{1}{m} E(x_{n+1}) \leq \frac{1}{m} \left(1 - \frac{m}{M}\right)^{n+1} E(x_0) \quad (18)$$

$$(r_{n+1}, r_{n+1}) \leq \frac{1}{M} E(x_{n+1}) \leq \frac{1}{M} \left(1 - \frac{m}{M}\right)^{n+1} E(x_0) \quad (19)$$

[4] 非線型境界値問題

今、解くべき方程式を次のようなものとする。

$$y''(x) = f(x, y(x)), \quad x \in I = [a, b] \quad (20)$$

$$\text{境界条件 } B_1[y] = 0, B_2[y] = 0$$

この解は

$$g''(x) = 0, B_1[g] = 0, B_2[g] = 0$$

を満たす green 函数を用いて、次のような積分方程式となる。

$$y(x) = \int_a^b g(x, t) f(t, y(t)) dt \quad (21)$$

これは、Hammerstein 型の積分方程式として知られるものである。

以下、問題 (20) を解くことを、積分方程式 (21) を解くことに帰着させて考察を進める。 $[a, b]$ を $[-1, 1]$ とする。このとき green 函数は次のようなものとなる。

$$g(x, t) = \begin{cases} \frac{1}{2}(x+1)(t-1) & , x < t \\ \frac{1}{2}(x-1)(t+1) & , x \geq t \end{cases} \quad (22)$$

積分方程式を一般的に書いて、次のようにする。

$$y(x) - \int_{-1}^1 k(x, t) f(t, y(t)) dt = 0 \quad (23)$$

このとき、 $k(x, t)$ は対称、正値、2乗可積分 であるものである。

Hammerstein 積分演算子 H として

$$H(y) = \int_{-1}^1 k(x, t) f(t, y(t)) dt \quad (24)$$

とおく。ここで

$f(t, u)$; 連続, $-1 \leq t \leq 1$, $-\infty < u < \infty$.

この演算子は2つの演算子の積で書ける。

$$H = KF \quad (25)$$

$$\text{ただし, } K(y) = \int_{-1}^1 k(x, t) y(t) dt$$

$$F(y) = f(s, y(s)), \quad -1 \leq s \leq 1$$

これでわかるように、 K は線型演算子, $F'(y_0) = f'_y(s, y_0(s)) \cdot I$

もまた線型演算子である。よって

$$H'(y_0) = K F'(y_0) = K f'_y(s, y_0(s)) \cdot I \quad -1 \leq s, t \leq 1$$

$$H'(y_0)(y) = \int_{-1}^1 k(s, t) f'_y(t, y_0(t)) y(t) dt \quad (26)$$

H' は線型演算子である。

(23) を解くために、次の条件を付け加える。

1. $f(t, u)$; $-1 \leq t \leq 1$, $-\infty < u < \infty$ で連続, u について偏

微分可能

$$2. |f(t, u)| < M + N|u|, \quad M; K(s, t) \text{の最大固有値} \\ N > 0 \quad (27)$$

$$3. \left| \frac{\partial f}{\partial u} \right| \leq c < M$$

[5] 非線型積分方程式に対するCG法

解く方程式 (23) を次のように書く。

$$J(y) = y - H(y) = 0 \quad (28)$$

 J は H から H への y についての連続な写像である。

次のことを仮定する。

 K ; 対称, 完全連続, 正值の線型演算子 F ; 連続な potential 演算子 $H'_y = KF'_y$ は条件 (27) より, 有界な線型演算子であり、次が成り立つ。

$$(KF'_y(h), h) = (h, KF'_y(h)), \quad h, h \in H \quad (29)$$

ゆえに、ある汎関数 $g(y)$ が存在して、 F の Frechet 微分が y について存在する領域で、 $\text{grad } g = J$ となるものがある。そこで、 $\text{grad } g(y) = J(y) = 0$ となる y を求めることに問題を帰着させることができる。

線型の場合に準じて、近似解の列を

$$y_{k+1} = y_k + c_k p_k \quad (30)$$

 c_k ; 実数

p_k : J で定義されたある点列

ど計算するものとする。このとき $\frac{d}{dc} g(y+cp) = 0$ なる C を求めることは $(J(y+cp), p) = 0$ なる C を求めることに一致する。

$$(J(y+cp), p) \doteq (J(y) + cJ_y'(p), p) = 0$$

より $C = -(J(y), p) / (J_y'(p), p)$ とする。

$\{p_k\}$ は J_y' に関して共役になるように定めることにすれば、反復公式は線型の場合に準じて、次のようにできる。

y_0 : 初期値

$$r_0 = -J(y_0), \quad p_0 = r_0$$

$$y_{k+1} = y_k + c_k p_k, \quad c_k = -\frac{(J(y_k), p_k)}{(J_{y_k}'(p_k), p_k)} \quad (31)$$

$$r_{k+1} = -J(y_{k+1})$$

$$p_{k+1} = r_{k+1} + b_k p_k, \quad b_k = -\frac{(r_{k+1}, J_{y_{k+1}}'(p_k))}{(p_k, J_{y_{k+1}}'(p_k))}$$

これによる数値例を (表1), (表2), (表3) に示す。例題は次のものである。^[7]

$$(\text{例1}) \quad y''(x) = \frac{3}{8}y(x)^2 + \frac{3}{8}y(x)(3x-5) - \frac{3}{32}(3x-5)^2$$

$$y(-1) = y(1) = 0$$

解<方程式

$$y(x) - \int_{-1}^1 g(x,t) \left\{ \frac{3}{8}y(t)^2 + \frac{3}{8}y(t)(3t-5) - \frac{3}{32}(3t-5)^2 \right\} dt = 0$$

1つの真の解 $y(x) = 16/(x+3)^2 + (3x-5)/2$.

[表 1]

(例 1) $N=15$, Gauss-Chebyshev 積分公式

反復回数 8

		y_n (近似値)	r_n	$u - y_n$ (誤差)
1	$x =$	-0.689951325193848865D-02	0.8085122D-09	0.1427045D-02
2	$x =$	-0.582201309028894751D-01	0.3666695D-08	0.9733238D-02
3	$x =$	-0.151735587118359855D+00	0.5513701D-08	0.2128331D-01
4	$x =$	-0.276252530705659402D+00	0.6643924D-08	0.3291880D-01
5	$x =$	-0.418673264460276057D+00	0.7870028D-08	0.4333961D-01
6	$x =$	-0.564179436795575723D+00	0.8463432D-08	0.5289895D-01
7	$x =$	-0.696527312877439297D+00	0.7089547D-08	0.6319714D-01
8	$x =$	-0.798592848312280279D+00	0.3827241D-08	0.7637062D-01
9	$x =$	-0.853388416571218431D+00	0.6865250D-09	0.9391935D-01
10	$x =$	-0.845893037954980498D+00	-0.4843318D-09	0.1149649D+00
11	$x =$	-0.766169192139487712D+00	-0.7009584D-09	0.1342086D+00
12	$x =$	-0.614285497856656981D+00	-0.1942557D-08	0.1408913D+00
13	$x =$	-0.407269974479490968D+00	-0.1832346D-09	0.1217442D+00
14	$x =$	-0.187190918538144957D+00	0.8486328D-08	0.7179108D-01
15	$x =$	-0.269581755248003646D-01	0.6256101D-08	0.1335261D-01

[表 2]

(例 1) $N=15$, Gauss-Legendre 積分公式

反復回数 8

		y_n (近似値)	r_n	$u - y_n$ (誤差)
1	$x =$	-0.299501472316662330D-01	0.6113633D-09	0.3605444D-03
2	$x =$	-0.147322800148819044D+00	-0.4279371D-08	0.1835200D-02
3	$x =$	-0.320236852864916988D+00	-0.1871993D-07	0.3490125D-02
4	$x =$	-0.501280973385872297D+00	-0.2465573D-07	0.4486617D-02
5	$x =$	-0.649246964651592220D+00	-0.1685524D-07	0.4872133D-02
6	$x =$	-0.738951729954824471D+00	-0.8056501D-08	0.3976002D-02
7	$x =$	-0.762308331581731627D+00	-0.5236012D-08	0.3075293D-02
8	$x =$	-0.724389343752725637D+00	-0.6114501D-08	0.2167121D-02
9	$x =$	-0.638282814171576188D+00	-0.7804381D-08	0.1408500D-02
10	$x =$	-0.520762425438363277D+00	-0.9087171D-08	0.8465832D-03
11	$x =$	-0.389288425146380485D+00	-0.8769790D-08	0.4673492D-03
12	$x =$	-0.260143864379850459D+00	-0.6239213D-08	0.2322487D-03
13	$x =$	-0.147342659070128459D+00	-0.2815132D-08	0.9893268D-04
14	$x =$	-0.620041504062784007D-01	-0.5794674D-09	0.3101895D-04
15	$x =$	-0.119825071903818534D-01	-0.7493960D-11	0.2167499D-05

[表 3]

(例 2) $N=15$, Gauss-Legendre 積分公式

反復回数 5

		y_n (近似値)	r_n	$u - y_n$ (誤差)
1	$x =$	-0.278222015488345081D-02	-0.1074232D-09	0.1711941D-04
2	$x =$	-0.141453460854058270D-01	-0.3568574D-09	0.9420828D-04
3	$x =$	-0.325550836753736193D-01	-0.2584737D-09	0.2153210D-03
4	$x =$	-0.549316663119360600D-01	0.2673056D-09	0.3561487D-03
5	$x =$	-0.776011713671145020D-01	0.6761755D-09	0.4918675D-03
6	$x =$	-0.969228887679718792D-01	0.4685332D-09	0.6021790D-03
7	$x =$	-0.109857145711528575D+00	-0.1534856D-09	0.6733335D-03
8	$x =$	-0.114401103651282809D+00	-0.4886821D-09	0.6978276D-03
9	$x =$	-0.109857145711528589D+00	-0.1534856D-09	0.6733335D-03
10	$x =$	-0.969228887679719070D-01	0.4685331D-09	0.6021790D-03
11	$x =$	-0.776011713671145020D-01	0.6761756D-09	0.4918675D-03
12	$x =$	-0.549316663119360582D-01	0.2673056D-09	0.3561487D-03
13	$x =$	-0.325550836753736202D-01	-0.2584737D-09	0.2153210D-03
14	$x =$	-0.141453460854058287D-01	-0.3568574D-09	0.9420828D-04
15	$x =$	-0.278222015488345092D-02	-0.1074232D-09	0.1711941D-04

(例 2) $y''(x) = \frac{1}{4} \exp(y(x))$, $y(-1) = y(1) = 0$

解く方程式

$$y(x) - \int_{-1}^1 g(x, t) \frac{\exp(y(t))}{4} dt = 0$$

真の解. $y(x) = -\ln 2 + 2 \ln \left(C \sec \frac{Cx}{4} \right)$, $C = 1.3360559 \dots$

次数はいずれの場合も $N=15$ とし、例 1 に対しては、積分公式として Gauss-Chebyshev 公式を用いた場合(表 1.)、Gauss-Legendre 公式を用いた場合(表 2.)、例 2 に対しては、Gauss-Legendre 公式を用いた場合(表 3)を示した。近似値 y_n は Chebyshev 点 または Legendre 点を分点としたときのその上での値という形で求めている。分点の分離精度は 10^{-15} 、CG 法の収束判定には $\varepsilon = 10^{-11}$ 、 $|\|v_n\|^2 - \|v_{n-1}\|^2| < \varepsilon$ を用いた。初期値としては ε を与え、小さい解を求めるようにしている。

例からわかるように CG 法の収束はかなり速い。が、解の精度については積分の近似度に依存する。

[6] Legendre 多項式展開による線型演算部分の計算

解くべきもとの問題は

$$y''(x) = f(x, y(x)), \quad y(-1) = y(1) = 0 \quad (20)$$

であるが、これを green 函数を用いて等価な積分方程式

$$y(x) = \int_{-1}^1 g(x, t) f(t, y(t)) dt \quad (23)$$

を解くことに帰着させて考えてきた。しかし green 函数を核とする積分は [5] でみたように、その計算を Gauss-Legendre 公式で行った場合でも、CG 法における残差は 10^{-8} であるにもかかわらず、近似解の誤差は 10^3 であった。我々は未知函数 $y(x)$ の推定を標本点上での値という形でもつ。その標本点は積分のための分点と同一のものを用いる。それゆえ、標本点を可変とはできないので、適応型の積分公式を使うことができない。積分方程式の核である green 函数が、今の場合、1 次微係数が不連続であるため、その積分の精度は $[-1, 1]$ で台形公式を利用して得た結果以上の精度はでないことがいえる。

そこで、この点を克服するために、以下のようにする。

境界値問題 (20) を解くことはまた、次の 2 重積分を計算することに等しい。

$$y(x) = \int_{-1}^x dx \int_{-1}^x f(t, y(t)) dt + \alpha + \beta x \quad (32)$$

α, β ; $y(-1) = y(1) = 0$ で決まる定数

我々は、Hammerstein 型非線型積分方程式の線型計算に相当する部分

$$K(y)(x) = \int_{-1}^1 k(x, t) f(t) dt$$

を、次の形の2重積分で行うことにする。

$$G(x) = \int_{-1}^x dx \int_{-1}^x f(t, y(t)) dt + \alpha + \beta x \quad (33)$$

いま、

$$F(t) = f(t, y(t))$$

とおく。標本点 $\{t_i\}$ とし、未知函数 $y(x)$ の標本点上の推定 $\{y(t_i)\}$ が与えられているものとする。そして、 $F(t)$ を Legendre 多項式系 $\{P_k(t)\}$ によって、次のように展開する。

$$F(t) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k P_k(t) \quad (34)$$

そこで、

$$c_k = \int_{-1}^1 F(t) P_k(t) dt \quad (35)$$

これより

$$G(x) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k \int_{-1}^x dx \int_{-1}^x P_k(t) dt + \alpha + \beta x \quad (36)$$

である。Legendre 多項式は次の関係が成り立つ。

$$P_k(t) = \frac{1}{2k+1} (P'_{k+1}(t) - P'_{k-1}(t)) \quad (37)$$

$$P_k(-1) = (-1)^k, \quad P_k(1) = 1$$

この関係を使って (36) を計算すると、次のようになる。

$$G(x) = A + B + \sum_{k=2}^{n-1} \frac{c_k}{2k+1} \left\{ \frac{1}{2k+3} (P_{k+2}(x) - P_k(x)) - \frac{1}{2k-1} (P_k(x) - P_{k-2}(x)) \right\} + \alpha + \beta x$$

$$\begin{aligned}
 A &= C_0 \int_{-1}^x dx \int_{-1}^x P_0(t) dt = \frac{C_0}{3} (P_2(x) - P_0(x)) \\
 B &= C_1 \int_{-1}^x dx \int_{-1}^x P_1(t) dt = \frac{C_1}{15} (P_3(x) - P_1(x)) \quad (38)
 \end{aligned}$$

境界条件 $y(-1) = y(1) = 0$ はここで $G(-1) = G(1) = 0$ であるが、関係 (37) を用いると $\alpha = \beta = 0$ となるのがわかる。従って、(33) は次の式によって求めることができる。

$$\begin{aligned}
 G(x) &= A + B + \sum_{k=2}^{n-1} \frac{C_k}{2k+1} \left\{ \frac{1}{2k+3} (P_{k+2}(x) - P_k(x)) \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{2k-1} (P_k(x) - P_{k-2}(x)) \right\} \quad (39)
 \end{aligned}$$

A, B は (38) による。

各標本点上での $P_k(x)$ の値は、次の漸化式に従って求める。

$$P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = x$$

$$P_k(x) = \frac{2k-1}{k} x P_{k-1}(x) - \frac{k-1}{k} P_{k-2}(x) \quad (40)$$

以上により、反復公式 (31) における $J(y_{k+1}), J'_{y_k}(p_k)$ の中の次の2つの計算

$$H(y_{k+1})(x) = \int_{-1}^1 g(x, t) f(t, y_k(t)) dt$$

$$H'_{y_k}(p_k)(x) = \int_{-1}^1 g(x, t) f'_y(t, y(t)) P_k(t) dt$$

を、(35), (39), (40) によっておきかえることにより、(31)

を実行する。標本点は N 次 Legendre 多項式の零点を用い、展開係数 C_k の計算 (35) には、Gauss-Legendre 公式を用いることとした。

この場合における数値列を、[5] の場合と同様の次の2つの問題について示す。

$$(例1) \quad y''(x) = \frac{3}{8} y(x)^2 + \frac{3}{8} y(x)(3x-5) - \frac{3}{32} (3x-5)^2$$

$$y(-1) = y(1) = 0$$

[表. 4]

(例2)

[表. 4]

$$y''(x) = \frac{1}{4} \exp(y(x))$$

$$y(-1) = y(1) = 0$$

[表. 5]

(例1) $N=15$ (展開項数 及び 積分の次数)

反復回数 21

		y_n (近似値)	r_n
1	$x=$	-0.295896139752978996D-01	0.2051823D-08
2	$x=$	-0.145487605329104236D+00	0.7908191D-08
3	$x=$	-0.316746717671587408D+00	0.1004758D-07
4	$x=$	-0.496794356937137679D+00	0.3710091D-08
5	$x=$	-0.644674828956582097D+00	-0.8108265D-08
6	$x=$	-0.734975735905782634D+00	-0.1826393D-07
7	$x=$	-0.759233052196437261D+00	-0.2187349D-07
8	$x=$	-0.72222237411276460D+00	-0.1889912D-07
9	$x=$	-0.636874323450712251D+00	-0.1237267D-07
10	$x=$	-0.519915846714728153D+00	-0.5609133D-08
11	$x=$	-0.388821074669123093D+00	-0.6970016D-09
12	$x=$	-0.259911613852394391D+00	0.1703801D-08
13	$x=$	-0.147243721916278020D+00	0.1997274D-08
14	$x=$	-0.619731267393300736D-01	0.1160965D-08
15	$x=$	-0.119803346561407689D-01	0.2601895D-09

次数は [5] の

場合と同じく、

$N=15$ とし、

これは多項式

展開の項数と

C_k を求める

積分の次数

		u (真値)	$u - y_n$ (誤差)
1	$x=$	-0.295896027479816137D-01	0.1122731D-07
2	$x=$	-0.145487599715857341D+00	0.5613246D-08
3	$x=$	-0.316746727610887957D+00	-0.9939300D-08
4	$x=$	-0.496794356307986851D+00	0.6291508D-09
5	$x=$	-0.644674831613044619D+00	-0.2656462D-08
6	$x=$	-0.734975727559483483D+00	0.8346299D-08
7	$x=$	-0.759233038538671412D+00	0.1365776D-07
8	$x=$	-0.722222222222222321D+00	0.1518905D-07
9	$x=$	-0.636874314040686951D+00	0.9410025D-08
10	$x=$	-0.519915842140160622D+00	0.4574567D-08
11	$x=$	-0.388821075880272371D+00	-0.1211149D-08
12	$x=$	-0.259911615660243678D+00	-0.1807849D-08
13	$x=$	-0.147243726387018325D+00	-0.4470740D-08
14	$x=$	-0.619731314514930798D-01	-0.4712163D-08
15	$x=$	-0.119803396904922810D-01	-0.5034351D-08

を表わす。積

分は Gauss-
Legendre 公式。

CG法の収束

判定は [5] と

同様にした。

たとえば例 1

の場合、残差

と同程度の誤

差となってお

り、[5]の場合

と比べて、近似

解の精度はず、

とよくなっているのがみられる。例 2 の場合には、誤差の程度は、残差よりもわるいが、[5] の場合よりはやはり良い。

積分方程式の中の核として、Green 函数をもったまま計算を実行するのを避けて、このような直交多項式展開を用いて積分を実行するようにすると、望ましい結果が得られやすくなるということがわかると思う。反復回数は、例 1, 例 2 のどちらの場合も [5] よりは多くなっている。反復回数、近似解の精度はともに、次数 N を増しても、この場合あまり変化

[表 5]
(例 2) $N=15$ (展開項数, B_0 積分の次数)

反復回数	10	y_n (近似値)	y_n
1	$x=$	-0.276552430449042132D-02	-0.1440418D-10
2	$x=$	-0.140515571771501228D-01	-0.1245540D-09
3	$x=$	-0.323401748103300003D-01	-0.4720000D-09
4	$x=$	-0.545759220727055896D-01	-0.1158734D-08
5	$x=$	-0.771096997669456219D-01	-0.2126268D-08
6	$x=$	-0.963210994893208272D-01	-0.3146681D-08
7	$x=$	-0.109184198107936198D+00	-0.3921249D-08
8	$x=$	-0.113703660629264930D+00	-0.4209579D-08
9	$x=$	-0.109184198107936212D+00	-0.3921249D-08
10	$x=$	-0.963210994893208411D-01	-0.3146681D-08
11	$x=$	-0.771096997669456358D-01	-0.2126268D-08
12	$x=$	-0.545759220727055948D-01	-0.1158734D-08
13	$x=$	-0.323401748103300047D-01	-0.4720000D-09
14	$x=$	-0.140515571771501254D-01	-0.1245540D-09
15	$x=$	-0.276552430449042181D-02	-0.1440418D-10

	u (真値)	$u - y_n$ (誤差)
1	$X = -0.276510073672825429D-02$	$0.4235677D-06$
2	$X = -0.140511378049734126D-01$	$0.4193721D-06$
3	$X = -0.323397626715287712D-01$	$0.4121388D-06$
4	$X = -0.545755175216677546D-01$	$0.4045510D-06$
5	$X = -0.771093038431694411D-01$	$0.3959237D-06$
6	$X = -0.963207097649899646D-01$	$0.3897243D-06$
7	$X = -0.109183812144089121D+00$	$0.3859638D-06$
8	$X = -0.113703276004219700D+00$	$0.3846250D-06$
9	$X = -0.109183812144089121D+00$	$0.3859638D-06$
10	$X = -0.963207097649899646D-01$	$0.3897243D-06$
11	$X = -0.771093038431694411D-01$	$0.3959237D-06$
12	$X = -0.545755175216677546D-01$	$0.4045510D-06$
13	$X = -0.323397626715287712D-01$	$0.4121388D-06$
14	$X = -0.140511378049734126D-01$	$0.4193721D-06$
15	$X = -0.276510073672825429D-02$	$0.4235677D-06$

いはい。

[7] Reference

- (1) M.M. Vainberg ; Variational Methods for the Study of Nonlinear Operators , Holden-Day , 1964.
- (2) L. B. Rall ; Computational Solutions of Nonlinear Operators Equations , John-Wiley Sons , 1969.
- (3) M.M. Vainberg ; Variational Method and Method of Monotone Operators , John-Wiley Sons , 1973.
- (4) M. Z. Nashed ; The Convergence of the Method of Steepest Descent for Nonlinear Equations with Variational or Quasi-variational Operators , J. Math. Mech., vol. 13, 1964.
- (5) J. W. Daniel ; The Conjugate Gradient Method for Linear and Nonlinear Operator Equations , SIAM J. Numer. Anal. , vol. 14 , 1967 .
- (6) David , Rabinowitz ; Methods of Numerical Integration , Academic Press , 1975.
- (7) C. Suzuki ; Numerical Solutions of Nonlinear Boundary Value Problems by Lobatto's Quadratures , IIAS Fujitsu , R.R. , No. 46 , 1984.