

氏 名	きく ち ひろ あき 菊 池 弘 明
学位(専攻分野)	博 士 (理 学)
学 位 記 番 号	理 博 第 3220 号
学位授与の日付	平 成 20 年 3 月 24 日
学位授与の要件	学 位 規 則 第 4 条 第 1 項 該 当
研 究 科 ・ 専 攻	理 学 研 究 科 数 学 ・ 数 理 解 析 専 攻
学 位 論 文 題 目	Existence and Stability of Standing Waves For Schrödinger-Poisson-Slater Equation (シュレディンガー-ポアソンスレーター方程式の定在波の存在と安定性)
論文調査委員	(主 査) 教 授 堤 誉 志 雄 教 授 重 川 一 郎 教 授 國 府 寛 司

論 文 内 容 の 要 旨

菊池弘明氏は本論文で、Schrödinger-Poisson-Slater 方程式とよばれる、局所的なべき乗型非線形項と Hartree 型の非局所的な非線形性である Poisson 項を持つ非線形 Schrödinger 方程式に対し、定在波の存在とその安定性・不安定性の問題を研究した。Schrödinger-Poisson-Slater 方程式は多体電子系や高分子系を記述するモデル方程式として導入されたが、静電場に対応した Maxwell-Schrödinger 方程式の定在波も同じ方程式を満たすため、その解析は数学的にも数理物理学的にも重要である。

定在波は（時間依存しない）定常非線形 Schrödinger 方程式の解から作られるため、その存在や安定性・不安定性の問題は定常非線形 Schrödinger 方程式の解の性質を解析することに帰着される。定常非線形 Schrödinger 方程式は変分構造を持った半線形楕円型方程式であるため、通常それに対応したエネルギー汎関数（あるいは、作用汎関数）の臨界点として定在波を定式化する。菊池氏はエネルギー汎関数の臨界点の中で、主に基底状態とよばれる臨界点を変分法的手法により解析し、以下のような結果を得た。ここで、基底状態とは臨界点の中でエネルギー汎関数が最小となる非自明解のことであり、基底状態でない臨界点は励起状態と呼ばれる。

Schrödinger-Poisson-Slater 方程式に対応したエネルギー汎関数は、大域 Ambrosetti-Rabinowitz 条件を満たさないため、いわゆる Palais-Smale 条件を確かめるのが困難な問題である。菊池氏は、この困難を Struwe の方法とよばれる一種の単調性議論（monotonicity argument）を用いることにより克服した。すなわち、ダミーのパラメータを入れたエネルギー汎関数の族を考え、各々のエネルギー汎関数の臨界点から良い性質を持つ関数列を作ることにより、収束部分列を含む Palais-Smale 列を構成するという方法である。これにより、変分法でよく用いられる峠の定理を適用することが可能となった。このようにして菊池氏は、定在波の存在・非存在に関して、べき乗型非線形性の次数と Poisson 項の係数をほぼ分類することに成功した。特に、数理物理モデルとして重要である、べき乗型非線形性の次数が $5/3$ の場合に、定在波の存在を証明した。

また菊池氏は、峠の定理によって得られた定在波の安定性・不安定性の問題を、時間発展する Schrödinger-Poisson-Slater 方程式の特殊解と見た場合に研究した。定在波が安定であるとは、小さな初期摂動を加えて時間発展させても定在波の形が保たれる性質であり、安定でない場合は不安定であるという。峠の定理によって得られる臨界点は基底状態であることが多く、また基底状態ではなかったとしても豊富な性質を持つため、一般の励起状態よりも比較的解析がしやすい。Schrödinger-Poisson-Slater 方程式に対し、菊池氏はこの性質を最大限利用することにより、基底状態の安定性と不安定性の解析を行い、従来未解決であったパラメータの範囲において安定性と不安定性を証明することに成功した。

論 文 審 査 の 結 果 の 要 旨

定在波はエネルギー汎関数の臨界点として定式化されるため、数学的には無限次元空間上で定義された汎関数に対する極値問題となり、古くから研究が行われてきた重要な分野である。また、数理物理学的見地からは、定在波はソリトン状解で

あり、現実の物理現象に対応した解として、その存在と性質についての研究はきわめて重要である。

菊池氏は Schrödinger-Poisson-Slater 方程式の定在波の存在と安定性について、変分法的手法を用いて研究した。エネルギー汎関数の臨界点を求める変分法的手法としては、峠の定理がよく知られている。この峠の定理を適用するためには、エネルギー汎関数が Palais-Smale 条件を満たしていることを確かめることが必要である。その Palais-Smale 条件を保証する十分条件としては、Ambrosetti-Rabinowitz 条件がよく使われる。菊池氏が研究対象としたエネルギー汎関数は、この Ambrosetti-Rabinowitz 条件を満たさないため一般論では扱えず、問題独自の性質を用いた解析が必要となる。菊池氏の証明方法は、単に Schrödinger-Poisson-Slater 方程式に対応したエネルギー汎関数の臨界点を求めたということにとどまらず、Ambrosetti-Rabinowitz 条件を満たさない汎関数に対し、どのようにして峠の補題を適用するかという問題についても新しい知見を与えた。

また、定在波の安定性・不安定性の問題について、菊池氏は峠の定理によって得られる臨界点は基底状態であるか、もしくは基底状態でなかったとしても豊富な性質を持つということを最大限に利用して解析を行った。Grillakis-Shatah-Strauss は 1987 年に定在波の安定性・不安定性を、群が作用する無限次元ハミルトン系の平衡解の安定性・不安定性として定式化し、安定となるためのほぼ必要十分条件を与えた。しかし、彼らの理論を実際の問題において確かめることは容易ではなく、個別の問題に応じた工夫が必要となる。菊池氏が扱った Schrödinger-Poisson-Slater 方程式は、局所的なべき乗型非線形項と非局所的な Poisson 項のバランスが問題となるため、直接彼らの条件を確かめることは困難である。菊池氏の証明方法は、このような局所的なべき乗型非線形項と非局所的な Poisson 項のバランスが重要な役割を果たす非線形分散型方程式に対し、定在波の安定性・不安定性をシステムティックに調べるための手法を示唆しており今後の発展が期待される。

よって、本論文は博士（理学）の学位論文として価値あるものと認める。また、論文内容とそれに関連した事項について試問を行った結果、合格と認めた。