

位相力学系と双加群

九大数理 綿谷 安男

Watatani, Yasuo

①はじめに

位相力学系とそれのつくる C^* -環の間の密接な関連を探るのが、今回の研究集会のテーマである。位相力学系のどのような性質が C^* -環のどのような性質に対応しているかが知りたいことである。Cantor 集合 X 上の位相同型写像 $h: X \rightarrow X$ とそれに対応する C^* -環の接合積 $C(X) \rtimes \mathbb{Z}$ の研究や, subshift Σ とそれに対応する松本君の C^* -環

$\mathcal{O}_n$ の研究などがその典型例である。

私の話の目的は、そのような位相力学系と C^* 環の対応が、全くうまくいっていない場合もあるという、残念な報告である。がっかり。

フランクフルトの理論に出づける自己相似集合 K から $C(K)$ 上のヒルベルト双加群 X をつくる。

その双加群から生成される C^* 環 $\mathcal{O}_X$ はみんな $Cuntz$ 環 $\mathcal{O}_n$ に同型になってしまう。 C^* 環

は位相にしか依らないものだが、 K 上の距離構造が $\mathcal{O}_X$ を研究するのに重要であった。

これを非可換距離空間にまで拡張する。

□ キルバート双加群のつくる C^* -環

Pimsner [P] と 片山 [K] は C^* -環 A 上の
双加群 X に対して新しい C^* -環 $\mathcal{O}_X$ の構成法
を導入した。 X 上の Fock 空間

$$F(X) = A \oplus X \oplus X \otimes_A X \oplus X \otimes_A X \otimes_A X \oplus \dots$$

上の creation operators のつくる Toeplitz 環

J_X の商として $\mathcal{O}_X$ は具体的に実現できる。

特に A 上の自己同型 α によって与えられる双加群

X を $X = A$ に対してその双加群としての構造を

$$\begin{cases} \int \phi(1 \otimes y)_\# = x^* y \\ a \cdot x \cdot b = \alpha(a) x b \end{cases} \quad \begin{array}{l} a, b \in A \\ x, y \in X \end{array}$$

で与えられると $\mathcal{O}_X \cong A \rtimes_\alpha \mathbb{Z}$ と接合積と同型

にたす。また $0-1$ 行列 B から 2×2 の
 双加群 X をつくと Cuntz-Krieger 環 O_B
 と O_X は同型にできる。この意味で O_X は
 接合積と Cuntz-Krieger 環の両方を一般化
 した構成法である。 C^* 環 O_X の単純性
 やイデアルの構造については [KPW] で考察した。

Def C^* 環 A 上の エルベルト双加群 $X = {}_A X_A$ は、
 右 A 値内積をもつエルベルト 右 C^* 加群で
 たかすの作用が $\phi: A \rightarrow \mathcal{L}_A(X_A)$ という $*$ -hom.
 で与えられているものという。さらに X は full
 つまり $\{(x|y)_A \mid x, y \in A\}$ の生成する閉部分空間が
 A と一致することを仮定しておく。また ϕ は
 1-1 の場合のみを考える。簡単のために、

X は有限生成を仮定する。つまり basis という

有限集合 $\{u_1, \dots, u_n\} \subset X$ が存在して

$$\forall x \in X \quad x = \sum_{i=1}^n u_i (u_i | x)_A \quad \text{と成っている。}$$

[Def] X を C^* -環 A 上の有限生成のヒルベルト

双加群とする。双加群 X が生成する C^* -環

$\mathcal{O}_X$ とは, A と $\{s_x \mid x \in X\}$ から生成される

universal な C^* -環で次の交換関係をもつ:

① (和の保存) $S_{x+y} = S_x + S_y$

② (左右の A -作用の保存)

$$S_{x \cdot a} = S_x a$$

$$S_{\phi(a)x} = a S_x$$

$$\left(\begin{array}{l} x, y \in X \\ a \in A \end{array} \right)$$

③ (右内積の保存)

$$(x(y))_A = S_x^* S_y$$

④ ($K_A(X_A)$ の保存)

$$\sum_{i=1}^n S_{u_i} S_{u_i}^* = I$$

② 自己相似集合と双加群

フクタル幾何における自己相似集合 K からヒルベルト双加群 X を構成してその C^* 環 O_X の構造を調べよう。位相だけでなく距離が効いてくることに注目する。

Hutchinson の話 [H] より初等的で基本的なことの復習から始めよう。 (Ω, d) を完備な距離空間とする。 $\{\gamma_1, \dots, \gamma_n\}$ を Ω 上の真の縮小写像でその Lipschitz 定数が $c_i = \text{Lip}(\gamma_i) < 1$ とする。 $d \geq 2$ と仮定する。すると Ω のコンパクト部分集合 K 中が唯一存在して

$$(*) \quad K = \gamma_1(K) \cup \gamma_2(K) \cup \dots \cup \gamma_n(K)$$

をみたす。この $(*)$ がある意味での自己相似性である。

よく知られているように, このように, Cantor 集合
 や Koch 曲線や Sierpinski gasket のような
 典型的な自己相似集合に与えられる。そこで
 可換な C^* -環 $A = C(K)$ を考える。縮小写像
 $\gamma_i: K \rightarrow K$ は A 上の $*$ -endomorphism $\phi_i: A \rightarrow A$
 を導く:

$$(\phi_i(a))(z) = a(\gamma_i(z)) \quad (z \in K)$$

$X = A^n$ を次のように A 上の双加群とみる:

$$\chi = (\chi_i)_i \in X, \quad a \in A, \quad b \in A \text{ に対し}$$

$$\begin{cases} a \cdot \chi \cdot b = (\phi_i(a) \chi_i b)_i \\ (\chi(y))_A = \sum_{i=1}^d \chi_i^x y_i \in A \end{cases}$$

つまり $\phi: A \rightarrow \mathcal{L}_A(X)$ は対角行列

$$\phi(a) = \begin{pmatrix} \phi_1(a) & 0 \\ 0 & \phi_d(a) \end{pmatrix} \text{ である。}$$

この時 $\mathcal{O}_X$ は $A = C(\mathbb{K})$ と Cuntz 環 $\mathcal{O}_d = C^*(S_1, \dots, S_d)$ から生成された普遍的な C^* -環 $\mathcal{O}_X$ 上の交換関係をもつものである:

$$a S_i = S_i \phi_i(a), \quad a \in A$$

Proposition 1 ([PWY]) 上の $\mathbb{K}$ 上の自己相似集合 K と縮小写像 $\{\phi_1, \dots, \phi_d\}$ からつくられたビルト双加群 X を考える。 $A = C(\mathbb{K})$ 上の双加群 X から生成された C^* -環を $\mathcal{O}_X$ とする
 $\Rightarrow \mathcal{O}_X$ は Cuntz 環 $\mathcal{O}_d = C^*(S_1, \dots, S_d)$

を言っているが、実は $\mathcal{O}_X = \mathcal{O}_d$ となる。

⑨ C^* -環の構造が力学系 $\{\phi_1, \dots, \phi_d\}$ の構造に依っているのは大変残念である。しかし $\mathbb{K}$ 上の調和解析を Cuntz 環 $\mathcal{O}_d$ とその部分環 $A = C(\mathbb{K})$

の相対位置 $A \subset \mathcal{O}_d$ を使って記述できる可能性は残っていると思う。

③ 非可換距離空間上の縮小写像

自己相似集合 K とその上の縮小写像 $\{\alpha_1, \dots, \alpha_d\}$ から構成された $A = C(K)$ 上の双加群 X と C^* -環 $\mathcal{O}_X$ の構造を考察するには K 上の距離構造と α_i の縮小性が交かっている。 C^* -環の構造に位相構造だけでなく距離構造が関与するのはカテゴリーとして少し「変でこたセンス」を感じる。そこでこれをもう少し^あ顕微鏡にするために Connes [C] の非可換距離空間の設定にまず拡張してみよう。距離空間 (K, d) があると $A = C(K)$ 上の state space $\mathcal{S}_A$ にも次のように自然に距離 L が入る:

K 上の Lipschitz 関数全体 $Lip(K)$ と $f \in Lip(K)$ の Lipschitz 定数 $Lip(f)$ を使って, $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{S}_A$ に対してその距離 $L(\varphi_1, \varphi_2)$ を

$$L(\varphi_1, \varphi_2) \stackrel{\text{def}}{=} \sup \{ |\varphi_1(t) - \varphi_2(t)| ; \begin{matrix} f \in Lip(K) \\ Lip(f) \leq 1 \end{matrix} \}$$

で決める。すると $\mathcal{S}_A$ は L に関して完備な距離空間になる。点 $x \in K$ を $\varphi_x(t) = f(x)$ である character $\varphi_x \in \mathcal{S}_A$ と同一視することによって $\mathcal{S}_A$ に写ると, $(\mathcal{S}_A, L)$ は距離空間 (K, d) の自然な拡張になっている。

そこで非可換な C^* 環 A に対して $\mathcal{S}_A$ にある付帯的な構造をよってその state space $\mathcal{S}_A$ 上に上のように距離 L が入れられる

時に、その付帯的な構造を非可換距離
 と思ひこむことにする。 $K = [0, 1]$ で
 $f \in C^1(K)$ なる $\text{Lip}(f) = \|f'\|_\infty$ と微分と
 sup norm でかけることに注意しておく。

[Def] A と B を unital C^* -環で B が A 上の
 Banach bimodule になっているとする。

$$\delta: A \supset \text{Dom}(\delta) \longrightarrow B$$

という稠密に定義された $*$ -derivation δ で

$\text{Ker } \delta = \mathbb{C}I$ となるものを考える。 $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{F}_A$

に対するその“距離” $L(\varphi_1, \varphi_2) \in [0, \infty]$ を

$$L(\varphi_1, \varphi_2) \stackrel{\text{def}}{=} \sup \{ |\varphi_1(a) - \varphi_2(a)|; \begin{array}{l} a \in \text{Dom}(\delta) \\ \|\delta(a)\| \leq 1 \end{array} \}$$

で定める。その値が ∞ になったりように

$\{a \in \text{Dom}(f); \|f(a)\| \leq 1\} / \mathbb{C}I$ が $A/\mathbb{C}I$ の中で有界であることを仮定しておく。

Proposition 2 ([PWY]), 上のような意味での非可逆距離構造が与えられているとする。

$(\phi_1, \dots, \phi_d)$ を A 上の unital $*$ -endomorphism の族とする。 γ_i を $\phi_i^*: A^* \rightarrow A^*$ の state space $\mathcal{S}_A$ への制限とする。 各 $\gamma_i: \mathcal{S}_A \rightarrow \mathcal{S}_A$ が $\mathcal{S}_A$ に関して真の縮小写像になっているとする。

$C^*(A; \phi_1, \dots, \phi_d)$ が A の表現 $\pi: A \rightarrow C^*(A; \phi_1, \dots, \phi_d)$ と Cuntz 環 $\mathcal{O}_d = C^*(s_1, \dots, s_d)$ が生成された普遍的な C^* -環が $\pi(a)s_i = s_i \pi(\phi_i(a))$ を満たすものとする
 $\Rightarrow C^*(A; \phi_1, \dots, \phi_d)$ は Cuntz 環 $\mathcal{O}_d$ と同型になる。

《References》

[C] A. Connes, Compact metric spaces, Fredholm modules and hyperfiniteness, *Ergodic Th. & Dynam. Sys* 9 (1989), 209-220.

[H] J.E. Hutchinson, Fractals and self-similarity, *Indiana Univ. Math. J.* 30 (1981), 713-747

[KPW] T. Kajiwara, C. Pinzari and Y. Watatani, Ideal structure and simplicity of the C^* -algebras generated by Hilbert bimodules, *J. Funct. Anal.* 159 (1998), 295-322.

[K] Y. Katayama, Generalized Cuntz algebras O_n^m , *RIMS Kokyuroku* 858 (1994), 87-90.

[P] M. Pimsner, A class of C^* -algebras generalizing both Cuntz-Krieger algebras and crossed products by $\mathbb{Z}$, in *Free Probability Theory*, edited by D.V. Voiculescu, *Fields Institute Communications* vol 12, 1996, 189-212

[PWY] C. Pinzar, Y. Watatani and K. Yonetani,

KMS states, entropy and the variational principle in full C^* -dynamical systems, preprint, 2000,