

重力波の非線型変調*

京大理 小野 廣明

§1. 序

非線型分散系における顕著な性質として非線型効果と分散効果のつり合いによる有限振幅の定常進行波の存在することが知られている。重力波の場合、そのような波列の安定性や変調が Benjamin & Feir¹⁾, Benjamin²⁾ として Whitham³⁾ によって詳しく調べられた。そしてある種の攪乱に対して深い水の場合波列は不安定であることが示された。しかし彼等の理論ではそれぞれの判約のため不安定による結果を調べることはできなかった。

ところが最近 Chu & Mei⁴⁾ は Whitham の変調に対する方程式に分散項を加えることにより不安定攪乱の非線型発展を記述できる方程式系を導いた。しかしながら具体的な結果は無限深さの場合に限られている。

ここでは任意の一樣な深さの水の上にたつ波列の一般的な

変調を Taniuti & Yajima の方法⁶⁾により考える。そして基礎方程式系が簡単に扱い易い単一の方程式に還元できることを示す。同様の型の方程式 (nonlinear Schrödinger 方程式と呼ばれる) は既にいろいろの非線型分散系の研究においても得られている。⁷⁾ この方程式の非線型平面波解は Stokes wave train に対比していること、そして方程式の形の単純さにもかかわらず Benjamin²⁾, Whitham³⁾ によって得られた結果をすべて含み、さらに不安定モードの成長をも非線型変調過程の特別の場合としてこの方程式は記述できることを示す。またこの同じ方程式は浅い水の極限で Korteweg-de Vries 方程式の弱い cnoidal wave 解の漸近的な舞いをも支配していることがわかる。

§2 Nonlinear Schrödinger 方程式の導出

一様な深さ h_0 の二次元非圧縮性完全流体層の自由表面上に生じる重力波の基礎方程式は速度ポテンシャル $\phi(x, y, t)$ に対する調和方程式である。

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0 \quad : -h_0 \leq y \leq \eta(x, t) \quad (2.1)$$

境界条件は、

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = 0 \quad : y = -h_0 \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} \quad : y = \eta(x, t) \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 \right\} + g\eta = 0 \quad : \quad y = \eta(x, t) \quad (2.4)$$

ここで、 x, y, t はそれぞれ水平方向、垂直方向および時間座標、 $\eta(x, t)$ は静止しているときの自由表面 $y=0$ から測った攪乱されたときの自由表面を表わす。 g は重力定数。

方程式系(2.1)~(2.4)を線型化し $\exp[i(kx - \omega t)]$ に比例する正弦波を仮定するとよく知られた線型分散関係式を得る。

$$\omega^2 = kg \tanh kh. \quad (2.5)$$

ここで ω と k はそれぞれ線型波の振動数と波数である。

これから線型化の極限で k_0, ω_0 なる波数と振動数をもつ波列のゆっくりした非線型変調を考える。 k_0, ω_0 は1オーダーと仮定する。長い時間に渡って正しい解を得るために次のように座標の stretching 変換を導入する。⁶⁾

$$\xi = \varepsilon(x - \lambda_0 t), \quad \tau = \varepsilon^2 t \quad (2.6)$$

ε は分散の弱さを示す小さいパラメータで、 $\lambda_0 (= \frac{\partial \omega_0}{\partial k_0})$ は線型波の群速度である。

一方弱い非線型変調を考えるので従属変数は ε の級数で展開できると仮定する。この意味で ε はまた非線型性の尺度とみることもができる。

$$\phi = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n \sum_{m=-n}^n \phi^{(n,m)}(\xi, \tau) \exp[i m(k_0 x - \omega_0 t)] \quad (2.7)$$

$$\eta = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n \sum_{m=-n}^n \eta^{(n,m)}(\xi, \tau) \exp[i m(k_0 x - \omega_0 t)] \quad (2.8)$$

ここで $\phi^{(n,m)}, \eta^{(n,m)}$ は基本の波列の振幅と位相の変調をあらわす複素振幅である。 ϕ, η は実関数だから $\overline{\phi^{(n,m)}} = \phi^{(n,-m)}$, $\overline{\eta^{(n,m)}} = \eta^{(n,-m)}$ という式が成り立つ。 — は複素共役を示す。

方程式系(2.1)~(2.4)に(2.6)~(2.8)を代入して異ったオーダーと調和成分を分けると $\phi^{(n,m)}, \eta^{(n,m)}$ に対する線型常微分方程式系を得る。 **

$$\phi_{yy}^{(n,m)} - m^2 k_0^2 \phi^{(n,m)} = A^{(n,m)}(\xi, y, \tau) : -h_0 \leq y \leq 0 \quad (2.9)$$

$$\phi_y^{(n,m)} = 0 : y = -h_0 \quad (2.10)$$

$$\phi_y^{(n,m)} + i\omega_0 m \eta^{(n,m)} = B^{(n,m)}(\xi, \tau) : y = 0 \quad (2.11)$$

$$-i m \omega_0 \phi^{(n,m)} + g \eta^{(n,m)} = C^{(n,m)}(\xi, \tau) : y = 0 \quad (2.12)$$

(2.11)と(2.12)から $\eta^{(n,m)}$ を消去すれば

$$g \phi_y^{(n,m)} - m^2 \omega_0^2 \phi^{(n,m)} = g B^{(n,m)} - i m \omega_0 C^{(n,m)} : y = 0 \quad (2.13)$$

$A^{(n,m)}, B^{(n,m)}, C^{(n,m)}$ は n について低次の量を含む。(具体形は付録にあげる。)

方程式系(2.9)~(2.10)は y について積分できるがそれは更に(2.13)を満たさなければならぬ。このとき $\eta^{(n,m)}$ は(2.12)より求まる

** ϕ, η は ε について展開してあるので $y = y(x, t)$ における境界条件は $y = 0$ でのもので置かなくてはならない。

$$\begin{cases} \frac{\partial \phi}{\partial y} - \frac{\partial \eta}{\partial t} - \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial x} + \eta \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{1}{2} \eta^2 \frac{\partial^3 \phi}{\partial y^3} - \eta \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} + \dots : y = 0 \\ \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 + g \eta + \eta \frac{\partial^2 \phi}{\partial t \partial y} + \frac{1}{2} \eta^2 \frac{\partial^3 \phi}{\partial t \partial y^2} + \eta \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} + \eta \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \dots : y = 0 \end{cases}$$

具体的には $m=0$ に対して

$$\Phi_y^{(n,0)} = \int_{-h_0}^y A^{(n,0)} dy \quad : \quad -h_0 \leq y \leq 0 \quad (2.14)$$

$$\int_{-h_0}^0 A^{(n,0)} dy = B^{(n,0)} \quad : \quad y=0 \quad (2.15)$$

$$\eta^{(n,0)} = \frac{1}{g} C^{(n,0)} \quad : \quad y=0 \quad (2.16)$$

$m \neq 0$ に対しては、

$$\begin{aligned} \Phi^{(n,m)} = & \psi^{(n,m)} \frac{\cosh mk_0(y+h_0)}{\cosh mk_0 h_0} + \frac{1}{mk_0} \left[\sinh mk_0(y+h_0) \times \right. \\ & \left. \times \int_{-h_0}^y A^{(n,m)} \cosh mk_0(y+h_0) dy - \cosh mk_0(y+h_0) \int_{-h_0}^y A^{(n,m)} \sinh \right. \\ & \left. mk_0(y+h_0) dy \right] \quad : \quad y=0 \quad (2.17) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & (k_0 \sinh mk_0 h_0 - m \frac{\omega_0}{g} \cosh mk_0 h_0) \left\{ m \psi^{(n,m)} - \frac{1}{k_0} \int_{-h_0}^0 A^{(n,m)} \times \right. \\ & \left. \times \sinh mk_0(y+h_0) dy \right\} + (k_0 \cosh mk_0 h_0 - m \frac{\omega_0}{g} \sinh mk_0 h_0) \times \\ & \times \frac{1}{k_0} \int_{-h_0}^0 A^{(n,m)} \cosh mk_0(y+h_0) dy = B^{(n,m)} - i m \frac{\omega_0}{g} C^{(n,m)} \\ & : \quad y=0 \quad (2.18) \end{aligned}$$

$$\eta^{(n,m)} = \frac{1}{g} (i m \omega_0 \psi^{(n,m)} + C^{(n,m)}) \quad : \quad y=0 \quad (2.19)$$

ここで $\psi^{(n,m)}$ は ξ と τ だけの関数である。これから $(n,m) = (1,0), (1,1), (2,0), (2,1), (2,2)$ に対する $\Phi^{(n,m)}, \eta^{(n,m)}$ は $\psi^{(1,1)}$ をあらかずと仮定する。速度ポテンシャルに対しては、

$$\Phi^{(1,1)} = \psi^{(1,1)} \cosh k_0(y+h_0) / \cosh k_0 h_0, \quad \Phi_{\xi}^{(1,0)} = \beta_1 |\psi^{(1,1)}|^2$$

$$\begin{aligned}\phi(z,0) &= 0, \quad \phi(z,1) = i\beta_2 \psi_{\xi}^{(1,1)} \cosh k_0(y+h_0) / \cosh k_0 h_0 \\ \phi(z,2) &= i\beta_3 \psi_{\xi}^{(1,1)2} \cosh 2k_0(y+h_0) / \cosh 2k_0 h_0\end{aligned}\quad (2.20)$$

そこで

$$\begin{cases} \beta_1 = \frac{\lambda_0(\omega_0^2/g^2 - k_0^2) - 2\omega_0 k_0}{g h_0 - \lambda_0^2}, & \beta_2 = -\frac{1}{k_0} \{k_0(y+h_0) \tanh k_0(y+h_0) - k_0 h_0 \tanh k_0 h_0\} \\ \beta_3 = \frac{3\omega_0(\omega_0^4/g^2 - k_0^2)}{2(k_0 g \tanh 2k_0 h_0 - 2\omega_0^2)} \end{cases}\quad (2.21)$$

一方自由表面 $\eta^{(n,m)}$ に対しては、

$$\begin{aligned}\eta^{(1,0)} &= 0, \quad \eta^{(1,1)} = i\gamma_1 \psi^{(1,1)}, \quad \eta^{(2,0)} = \gamma_2 |\psi^{(1,1)}|^2 \\ \eta^{(2,1)} &= \gamma_3 \psi_{\xi}^{(1,1)}, \quad \eta^{(2,2)} = \gamma_4 \psi^{(1,1)2}\end{aligned}\quad (2.22)$$

そこで

$$\begin{cases} \gamma_1 = \omega_0/g, \quad \gamma_2 = \frac{1}{g}(\lambda_0 \beta_1 + \omega_0^4/g^2 - k_0^2), \quad \gamma_3 = \lambda_0/g \\ \gamma_4 = \frac{1}{g} \left\{ -\frac{1}{2}(3\omega_0^4/g^2 - k_0^2) - \frac{3\omega_0^2(\omega_0^4/g^2 - k_0^2)}{k_0 g \tanh 2k_0 h_0 - 2\omega_0^2} \right\} \end{cases}\quad (2.23)$$

これに対して $\psi^{(1,1)}$ は $(n,m)=(3,1)$ に対する (2.18) より次の方程式を満足せねばならぬ。

$$i \frac{\partial \psi^{(1,1)}}{\partial \tau} + \mu \frac{\partial^2 \psi^{(1,1)}}{\partial \xi^2} + \nu |\psi^{(1,1)}|^2 \psi^{(1,1)} = 0\quad (2.24)$$

そこで

$$\mu = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \omega_0}{\partial k_0^2},\quad (2.25)$$

$$\nu = -\frac{k_0^4}{4\omega_0} \left\{ \frac{9 \tanh^4 k_0 h_0 - 10 \tanh^2 k_0 h_0 + 9}{\tanh^2 k_0 h_0} + \frac{4\omega_0^2}{\lambda_0^2 - g h_0} + \frac{4\lambda_0 \omega_0 \operatorname{sech}^2 k_0 h_0 + g h_0 \operatorname{sech}^4 k_0 h_0}{\lambda_0^2 - g h_0} \right\}\quad (2.26)$$

μ, ν は $k_0 h_0$ の実関数であるが (2.5) より明らかたように μ はいつでも負である。それに対して ν は $k_0 h_0$ が減少するにつれ

$k_0 h_0 = 1.363$ を境いにして負から正に符号をかえる。この形の方程式は nonlinear Schrödinger 方程式と呼ばれていて、既にいろいろの分散媒質に対して導かれている。^{3,8)} μ, ν が複素数となったような一般的な方程式が 平面 Poiseuille 流中の非線型安定性の研究において Stewartson & Stuart⁹⁾ によって導かれている。

もし複素振動 $\psi^{(1)}$ のかわりに 2 つの実関数 A, Ω を用いると次のような連立方程式を得る。

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial A^2}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial \xi} (A^2 \Omega) = 0 \\ \frac{\partial \Omega}{\partial \tau} + \Omega \frac{\partial \Omega}{\partial \xi} - 2\mu \nu \frac{\partial A^2}{\partial \xi} - 2\mu^2 \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{1}{A} \frac{\partial^2 A}{\partial \xi^2} \right) = 0 \end{array} \right. \quad (2.27)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial A^2}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial \xi} (A^2 \Omega) = 0 \\ \frac{\partial \Omega}{\partial \tau} + \Omega \frac{\partial \Omega}{\partial \xi} - 2\mu \nu \frac{\partial A^2}{\partial \xi} - 2\mu^2 \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{1}{A} \frac{\partial^2 A}{\partial \xi^2} \right) = 0 \end{array} \right. \quad (2.28)$$

ただし $\psi^{(1)} = A \exp \{ i \int \Omega / 2\mu d\xi \}$ (2.29)

これは $k_0 h_0 \rightarrow \infty$ の極限で Chu & Mei⁵⁾ によって導かれた方程式と本質的に同じものとなる。

§3 nonlinear Schrödinger 方程式 (2.24) のいくつかの解

3-1 非線型平面波解

方程式 (2.24) は非線型平面波とあらわす次のような解をもつことが知られている。^{6,10)}

$$\psi^{(1)} = \psi_0 \exp \{ i(\alpha \tau - \kappa \xi) \}, \quad (3.1)$$

ただし $\psi_0 = \text{一定}$, $\alpha = -\mu \kappa^2 + \nu / \psi_0^2$ (3.2)

この解がもとの物理空間で何をあらわすかを考える。特に

$$\kappa=0, \psi_0 = a/(2i\gamma_1) \quad \text{ここで } a \text{ は実定数とすると (2.22) は}$$

$$\eta^{(1,0)}=0, \eta^{(1,1)}=\frac{a}{2}e^{i\alpha_0\tau}, \eta^{(2,0)}=-\frac{\gamma_2}{4\gamma_1^2}a^2, \eta^{(2,1)}=0$$

$$\eta^{(2,2)}=-\frac{\gamma_4}{4\gamma_1^2}a^2e^{2i\alpha_0\tau} \quad (3.3)$$

$$\text{ここで } \alpha_0 = \frac{\gamma}{4\gamma_1^2}a^2 \quad (3.4)$$

(3.3) のすべての成分を 1 次近似まで Stokes wavetrain とする。

$$\eta = \varepsilon a \cos \zeta + \varepsilon^2 a^2 \left(-\frac{\gamma_2}{4\gamma_1^2} - \frac{\gamma_4}{4\gamma_1^2} \cos 2\zeta \right) + O(\varepsilon^3) \quad (3.5)$$

$$\text{ここで } \zeta = k_0 x - (w_0 - \varepsilon^2 \alpha_0) t \quad (3.6)$$

$w \equiv w_0 - \varepsilon^2 \alpha_0$ は、波の伝播方向への平均の流れ ($\phi_{\xi}^{(1,0)}$) を含んだ Stokes の非線型分散関係式に他ならない。また $\kappa=0$ とおいたのでこの解に対して (2.24) の分散項は本質的な役割を果たさないことを注意しておく。

3-2 平衡解

上での見た平面波解の他に (2.24) は、非線型効果と分散効果の動力学的釣り合いによる別のタイプの解をもつ。これを平衡解と呼ぶことにする。

$$\psi^{(1,1)} = \hat{\psi}(\xi) \exp i \alpha \tau \quad (3.7)$$

$$\text{ここで } \alpha = -\text{一定}, \hat{\psi}(\xi) = \text{実数}^{***} \quad (3.8)$$

*** $\hat{\psi}(\xi)$ が複素数であることを許せば、もう少し一般的な平衡解を得る。⁵⁾ しかしながらあとの議論のためには、実数と選ぶことでも十分である。

① $\mu\nu > 0$ のとき

$$\hat{\psi}(\xi) = A_0 \operatorname{dn} \left\{ A_0 \sqrt{\frac{\nu}{2\mu}} \xi \right\} \quad (3.9)$$

ただし母数 s は、 $s^2 = 2 - \frac{2\alpha}{\nu}/A_0^2$ (3.10)

② $\mu\nu < 0$ のとき

$$\hat{\psi}(\xi) = A_0 \operatorname{sn} \left\{ \frac{A_0}{s} \sqrt{-\frac{\nu}{2\mu}} \xi \right\} \quad (3.11)$$

ただし母数 s は、 $s^2 = A_0^2 / (\frac{2\alpha}{\nu} - A_0^2)$ (3.12)

3.4. 平面波解 (3.5) の線型安定性

Stokes wave の安定性は、最初に Benjamin & Feir により解析的かつ実験的に調べられた。ここでは、不安定モードの時間発展が (2.24) に支配される一般的な変調過程の特別の場合として含めることを示す。

Stokes wave を再現するために (3.1) で $\kappa=0$, $\alpha=\alpha_0$, $\psi_0=\alpha/(2i\alpha_0)$ とする。このとき

$$\psi^{(1)} = (\psi_0 + \hat{\psi}) \exp i\{\alpha_0 \tau + \hat{\theta}\} \quad (4.1)$$

で与えられる擾乱された Stokes wave を考える。ただし ψ, θ は擾乱をあらわす実関数で $\hat{\psi}$ は小さなパラメータである。これを (2.24) に代入して $\hat{\psi}$ について線型化すると、

$$\begin{cases} -\psi_\tau + \mu |\psi_0| \theta_{\xi\xi} = 0 \\ \theta_\tau - 2\nu |\psi_0|^2 \psi - \mu \psi_{\xi\xi} = 0 \end{cases} \quad (4.2)$$

$$(4.3)$$

これは常係数の線型微分方程式系であるから次のような形の解を仮定できる。

$$\begin{pmatrix} \psi \\ \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{\psi} \\ \hat{\theta} \end{pmatrix} \exp \{ i \frac{1}{2} (\hat{k} \xi - \hat{\omega} \tau) \} + \text{c.c.} \quad (4.4)$$

ここで $\hat{\psi}, \hat{\theta}$ は定数で c.c. は第一項の複素共役。 (4.2), (4.3) が有意な解をもつための条件から分散関係をうる。

$$\hat{\omega}^2 = \mu^2 \hat{k}^2 (\hat{k}^2 - 2\nu/\mu |\psi_0|^2) \quad (4.5)$$

この式から $\nu\mu \geq 0$ なる任意の $\hat{k}$ の値に対して $\hat{\omega}$ はいつも実数であるから (3.5) であらわされる Stokes wave は中立安定である。一方 $\mu\nu > 0$ なる $\hat{\omega}$ は

$$\hat{k} < \sqrt{2\nu/\mu} |\psi_0| \quad (4.6)$$

のようば擾乱に対して虚数となり擾乱は指数関数的に成長する。この意味で (3.5) であらわされる Stokes wave は上のようば変調的な擾乱に対して不安定であり、その最大成長率は $\delta_{\max}$ であらわると次のようにできる。

$$\delta_{\max} = |\nu\psi_0|, \quad \hat{k} = \sqrt{\nu/\mu} |\psi_0| \text{ に対して} \quad (4.7)$$

§2 における μ, ν についての議論を思い出すと、上の結果は正に Benjamin²⁾, Whitham³⁾ によって得られたものを再現していることがわかる。ここでの理論の場合には、nonlinear Schrödinger 方程式 (2.24) にともなう、このようば不安定なモードのどれからの時間発展を線型理論が使えなくなる段階においてさても調べる二とがである。たとえば $S=1$ のとき平衡解 (3.9) は孤立波になるが、

$$\psi(\xi) = \sqrt{\frac{2\alpha}{L}} \operatorname{sech} \left\{ \sqrt{\frac{\alpha}{\mu}} \xi \right\} \quad (4.8)$$

この波の中は $\sqrt{\mu/\alpha}$ である。これは、 $\alpha = \alpha_0$ のとき最大成長率をもった不安定モードの波長と一致している。この事実は、不安定な Stokes wave は結局上の孤立波に変形されるだろうという予想にのめり込む。実際、Chen & Mei⁽⁵⁾, Karpman & Kruskal⁽¹⁰⁾ によって行われた数値計算は、この予想を強く支持している。

3.5 浅い水の極限での nonlinear Schrödinger 方程式 (2.24)

方程式 (2.24) の広い適用性を示すために浅い水の極限での方程式を考えてみる。 $h_0 \ll 1$ オータに保って $kh_0 \rightarrow 0$ とすると (2.24) の μ と ν はそれぞれ次のようになる。

$$\begin{cases} \mu_s = -\frac{\sqrt{g} h_0 k_0 h_0^2}{2} \\ \nu_s = \frac{g k_0}{4\sqrt{g} h_0 h_0^2} \end{cases} \quad (5.1)$$

$$\begin{cases} \mu_s = -\frac{\sqrt{g} h_0 k_0 h_0^2}{2} \\ \nu_s = \frac{g k_0}{4\sqrt{g} h_0 h_0^2} \end{cases} \quad (5.2)$$

これは (3.3) で与えられる非線形平面波は

$$\eta(1,0) = 0, \quad \eta(1,1) = \frac{a}{2} e^{i\alpha_s \tau}, \quad \eta(2,0) = -\frac{3a^2}{4k_0^2 h_0^3}, \quad \eta(2,1) = 0$$

$$\eta(2,2) = \frac{3a^2}{8k_0^2 h_0^2} e^{2i\alpha_s \tau} \quad (5.3)$$

$$\text{ここで } \alpha_s = \frac{g\sqrt{g}h_0 a^2}{16k_0 h_0^4} \quad (5.4)$$

そして (3.5) は次のようになる。

$$\eta = \varepsilon a \cos \zeta_s + \varepsilon^2 a^2 \frac{3}{4k_0^2 h_0^3} (\cos 2\zeta_s - 1) + O(\varepsilon^3), \quad (5.5)$$

$$\text{ここで } \zeta_s = k_0 x - (\omega_0 - \varepsilon^2 \alpha_s) t, \quad \varepsilon < (k_0 h_0)^3 \ll 1 \quad (5.6)$$

かかる一方浅い水の波は Korteweg-de Vries 方程式¹¹⁾で記述されることを知られている。

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \sqrt{g h_0} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{3}{2} \sqrt{\frac{g}{h_0}} \eta \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\sqrt{g h_0^5}}{6} \frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3} = 0 \quad (5.7)$$

これは cnoidal wave と呼ばれている定常周期解をもつ

$$\eta = \varepsilon a \eta_0 + \frac{2\varepsilon a}{s^2} \operatorname{dn}^2 v \quad (5.8)$$

ここで

$$v = \sqrt{\frac{\varepsilon a}{6}} (x - Vt), \quad V = \sqrt{g h_0} + \frac{3}{2} \sqrt{\frac{g}{h_0}} \left\{ \varepsilon a \eta_0 + \frac{2\varepsilon a}{3} \left(\frac{2}{s^2} - 1 \right) \right\}$$

すなわち平均の深さは $\varepsilon \bar{\eta}$ とすると (5.9)

$$\bar{\eta} = \varepsilon a \eta_0 + \frac{2\varepsilon a}{s^2} \frac{E}{K} \quad (5.10)$$

ここで s^2 , K , E はそれぞれ楕円関数 dn の母数, 第一種, 第二種の完全楕円積分である。

$$k_0^2 = \frac{3}{2} \frac{\varepsilon a}{s^2 h_0^3} \frac{\pi^2}{K^2}, \quad \bar{\eta} = -\frac{3}{4} \frac{\varepsilon^2 a^2}{h_0^3 k_0^2} \quad (5.11)$$

とおいて (5.8) を s の小さな値に対して展開すると (5.5) を得る。

これはつまり非線形平面波解は浅い水の極限で弱く cnoidal wave に対応していることがわかる。 $\mu = \mu_s$, $\nu = \nu_s$ である nonlinear Schrödinger 方程式は Korteweg-de Vries 方

程式(5.7)から§2 で用いた方法により直接導くこともできる
 ことも注意しておく。そのようなやり方は国本中の heart pulse
 の研究において Tappert & Varma⁽⁸⁾ が採用している。§4 で論じ
 た安定性の判定条件に従えば $\mu s \nu < 0$ であるから弱い cnoidal
 wave は変調的な微小擾乱に対しては安定である。ここで考
 えた弱い cnoidal wave を補うような場合、すなわち soliton
 については、伝統的な線型安定理論によって Jeffrey & Kakutani⁽¹²⁾
 が任意の波数の擾乱に対して中立安定であることを示してい
 る。また任意の母数 ν の値に対する cnoidal wave の漸近的
 な舞いについては Berezin & Karpman⁽¹³⁾ が Whitham の定
 式化から出発して調べている。しかし彼等は§1 で注意した
 ように(2.29)の末項で示さぬ分散項は考慮しなかった。

最後に内容について議論し、批評して下さい。角谷典孝先
 生に感謝の意を表します。

* 研究の途中、橋本英典氏(東大宇宙研)が同様の問題を扱っ
 ておられることを角谷典孝先生の注意により知りました。最
 終的な研究結果は、共同の形でまとめることが予定されてい
 ることを断っておきます。

付録 $A^{(n,m)}, B^{(n,m)}, C^{(n,m)}$ の具体形

§21に示した $A^{(n,m)}, B^{(n,m)}, C^{(n,m)}$ の具体形は次の通りである。

$$A^{(n,m)} = -2imk_0 \phi_{\xi}^{(n-1,m)} - \phi_{\xi\xi}^{(n-2,m)} \quad (A-1)$$

$$\begin{aligned} B^{(n,m)} = & \eta_{\tau}^{(n-2,m)} - \lambda_0 \eta_{\xi}^{(n-1,m)} - \langle \eta^{(n',m')} \phi_{yy}^{(n'',m'')} \rangle_{n,m} \\ & + \langle \eta_{\xi}^{(n',m')} \phi_{\xi}^{(n'',m'')} \rangle_{n-2,m} + ik_0 \langle m' \eta^{(n',m')} \phi_{\xi}^{(n'',m'')} \rangle_{n-1,m} \\ & + ik_0 \langle m'' \eta_{\xi}^{(n',m')} \phi^{(n'',m'')} \rangle_{n-1,m} - k_0^2 \langle m' m'' \phi^{(n',m')} \eta^{(n'',m'')} \rangle_{n,m} \\ & - \frac{1}{2} \langle \eta^{(n',m')} \eta^{(n'',m'')} \phi_{yy}^{(n''',m''')} \rangle_{n,m} + \langle \eta^{(n',m')} \eta_{\xi}^{(n'',m'')} \phi_{\xi y}^{(n''',m''')} \rangle_{n-2,m} \\ & + ik_0 \langle m'' \eta^{(n',m')} \eta_{\xi}^{(n'',m'')} \phi_y^{(n''',m''')} \rangle_{n-1,m} \\ & + ik_0 \langle m'' \eta^{(n',m')} \eta^{(n'',m'')} \phi_{\xi y}^{(n''',m''')} \rangle_{n-1,m} \\ & - k_0^2 \langle m'' m''' \eta^{(n',m')} \eta^{(n'',m'')} \phi_y^{(n''',m''')} \rangle_{n,m} \quad (A-2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C^{(n,m)} = & -\phi_{\tau}^{(n-2,m)} + \lambda_0 \phi_{\xi}^{(n-1,m)} - \langle \eta^{(n',m')} \phi_{\tau y}^{(n'',m'')} \rangle_{n-2,m} \\ & + \frac{1}{2} \omega_0 \langle m'' \eta^{(n',m')} \phi_y^{(n'',m'')} \rangle_{n,m} + \lambda_0 \langle \eta^{(n',m')} \phi_{\xi y}^{(n'',m'')} \rangle_{n-1,m} \\ & - \frac{1}{2} \langle \phi_{\xi}^{(n',m')} \phi_{\xi}^{(n'',m'')} \rangle_{n-2,m} - \frac{1}{2} ik_0 \langle m'' \phi_{\xi}^{(n',m')} \phi^{(n'',m'')} \rangle_{n,m} \\ & - \frac{1}{2} ik_0 \langle m' \phi^{(n',m')} \phi_{\xi}^{(n'',m'')} \rangle_{n-1,m} + \frac{1}{2} k_0^2 \langle m' m'' \phi^{(n',m')} \phi^{(n'',m'')} \rangle_{n,m} \\ & - \frac{1}{2} \langle \phi_y^{(n',m')} \phi_y^{(n'',m'')} \rangle_{n,m} - \frac{1}{2} \langle \eta^{(n',m')} \eta^{(n'',m'')} \phi_{\tau y y}^{(n''',m''')} \rangle_{n-2,m} \\ & + \frac{1}{2} \omega_0 \langle m'' \eta^{(n',m')} \eta^{(n'',m'')} \phi_{yy}^{(n''',m''')} \rangle_{n,m} \\ & + \frac{\lambda_0}{2} \langle \eta^{(n',m')} \eta^{(n'',m'')} \phi_{\xi y y}^{(n''',m''')} \rangle_{n-1,m} \\ & - \langle \eta^{(n',m')} \phi_{\xi}^{(n'',m'')} \phi_{\xi y}^{(n''',m''')} \rangle_{n-2,m} \\ & - ik_0 \langle m'' \eta^{(n',m')} \phi_{\xi}^{(n'',m'')} \phi_y^{(n''',m''')} \rangle_{n-1,m} \\ & - 2k_0 \langle m'' \phi^{(n',m')} \eta^{(n'',m'')} \phi_{\xi y}^{(n''',m''')} \rangle_{n-1,m} \end{aligned}$$

$$+k_0^2 \langle m'' m''' \eta^{(n', m')} \phi^{(n'', m'')} \phi_y^{(n''', m''')} \rangle_{n, m} \\ - \langle \eta^{(n', m')} \phi_y^{(n'', m'')} \phi_{yy}^{(n''', m''')} \rangle_{n, m} \quad (A3)$$

ここで $\langle \rangle_{n, m}$ は第 m 調波成分 $\alpha \in$ について n オーダーの項の係数とあらわす。例えば

$$\langle m'' \phi_{\xi}^{(n', m')} \phi^{(n'', m'')} \rangle_{n, m} = \sum_{n' + n'' \leq n} \sum_{m' + m'' \leq m} m'' \phi_{\xi}^{(n', m')} \phi^{(n'', m'')}$$

無撞着条件(2.15), (2.18) は $(n, m) = (1, 0), (2, 0)$ に対しては (A-1) ~ (A-3) より明らかたように満たされている。 $(n, m) = (1, 1), (2, 1)$ に対するものから分散関係式(2.5)と λ_0 として群速度をとるべきとわかる。これに対して $(n, m) = (3, 0), (2, 2)$ に対する条件より $\phi_{\xi}^{(1, 0)}, \phi^{(2, 2)} \in \psi^{(1)}$ の項で決まるということが出来る。 $(n, m) = (3, 1)$ に対する無撞着条件により $\psi^{(1)}$ が nonlinear Schrödinger 方程式(2.24)に従うとわかる。

参考文献

- 1) T.B. Benjamin and J.E. Feir : J. Fluid Mech. (1967) 27 417.
- 2) T.B. Benjamin : Proc. Roy. Soc. (1967) A290 59.
- 3) G.B. Whitham : J. Fluid Mech. (1967) 27 399.
- 4) V.H. Chu and Mei : J. Fluid Mech. (1970) 41 873.
- 5) V.H. Chu and Mei : J. Fluid Mech. (1971) 47 337.

- 6) T. Taniuti and Y. Yajima : J. Math. Phys. (1969) 10 1369.
- 7) N. Asano, T. Taniuti and N. Yajima : J. Math. Phys.
10 2020.
- 8) F.D. Tappert and C.M. Varma : Phys. Rev. Lett. (1970)
25 1108.
- 9) K. Stewartson and J.T. Stuart : J. Fluid Mech. (1971)
48 529.
- 10) V.I. Karpman and E.M. Kruskal' : JETP (1969) 28
277.
- 11) D.J. Korteweg and G. de Vries : Phil. Mag. (1895) 39
422.
- 12) A. Jeffrey and T. Kakutani : J. Math. and Mech. (1971)
- 13) Yu.A. Berezin and V.I. Karpman : JETP (1967) 24 1049.