

函数体上の一般 Mordell 予想について

東京工芸大工 前原和寿

Mordell - Bombieri - Noguchi による

予想. $k = \bar{k}$, $\text{ch. } k = 0$, K が k 上有限生成の正則拡大体とし、 X を K 上の 一般型 完備多様体とする. K -有理点の集合 $X(K)$ が稠密 (即ち、任意の Zariski open $U \subseteq X$ に対して、 $U(K) \neq \emptyset$) と仮定する. このとき k 上の多様体 X_0 が存在して、 $X \sim X_0 \otimes_k K$ が K -双有理同型となる.

Manin, Grauert 等によって $\dim X/k = 1$ のとき上の予想は証明されている. $\dim X/k = 2$ の特別な場合は Deschamps によって示されている. $\dim X/k$ が任意で、接ベクトル束 $\Theta_{X/k}$ が negative [6] のとき野口により証明された. 野口はさらに X が hyperbolic のときにも証明している [60].

この拙論では上の予想を $\Omega_{X/k}$ が ample の場合 (上記の $\Theta_{X/k} = \Omega_{X/k}$ の dual, が negative と同じ条件) に別証明を与える.

手法は、

$$f_* \omega_{Y/W}^{\otimes n}$$

が pseudo-effective

を応用することと、Deschamps の論法を駆使することである.

但し、連接層 F が pseudo-effective $\Leftrightarrow \exists$ line bundle L , $\forall d \gg 0$, $\exists \beta > 0$. に対して、次の標準射

$$H^0((F^{\otimes d} \otimes L)^{\otimes \beta}) \otimes \mathcal{O} \rightarrow (F^{\otimes d} \otimes L)^{\otimes \beta}$$

が生成点で全射.

定理. 上記予想で X を $\Omega_{X/K}$ が ample の多様体と仮定すれば、予想は正しい。

証明. X は non-singular, projective で、 $\text{tr. deg}_K K = 1$ と仮定してよい。

このとき X/K の幾何学的モデルを

$$f: V \rightarrow C$$

とする。即ち、 $K \simeq \text{Rat}(C)$ ($= C$ の函数体), f の generic fibre が X となっているとする。

補題 1. 完全列

$$0 \rightarrow f^* \Omega_C \rightarrow \Omega_V \rightarrow \Omega_{V/C} \rightarrow 0$$

を考える。 $\mathbb{P}(\Omega_V)$ ($\supset \mathbb{P}(\Omega_{V/C})$) の基本層を $\mathcal{O}(1)$ とし、 $p: \mathbb{P}(\Omega_V) \rightarrow V$ を構造射、 $g = f \circ p$ とおくと

$$g^* g_* \mathcal{O}(l) \rightarrow \mathcal{O}(l)$$

は $\mathbb{P}(\Omega_V) \otimes_K$ 上全射である。

($\because$) $\mathbb{P}(\Omega_V)$ 上で次の完全列がある

$$0 \rightarrow \mathcal{O}(l-1) \rightarrow \mathcal{O}(l) \rightarrow \mathcal{O}(l)|_{\mathbb{P}(\Omega_{V/C})} \rightarrow 0.$$

g_* の long exact sequence :

$$\begin{aligned} 0 &\rightarrow g_* \mathcal{O}(l-1) \rightarrow g_* \mathcal{O}(l) \rightarrow g_* (\mathcal{O}(l)|_{\mathbb{P}(\Omega_{V/C})}) \\ &\rightarrow R^1 g_* (\mathcal{O}(l-1)) \rightarrow R^1 g_* (\mathcal{O}(l)) \rightarrow R^1 g_* (\mathcal{O}(l)|_{\mathbb{P}(\Omega_{V/C})}) \end{aligned}$$

は完全。 $\mathbb{P}(\Omega_V) \otimes_K \simeq \mathbb{P}(\Omega_X)$ 上では

$$\begin{aligned} 0 &\rightarrow H^0(\mathcal{O}(l-1)) \rightarrow H^0(\mathcal{O}(l)) \xrightarrow{c} H^0(\mathcal{O}(l)|_{\mathbb{P}(\Omega_{X/K})}) \\ &\rightarrow H^1(\mathcal{O}(l-1)) \rightarrow H^1(\mathcal{O}(l)) \rightarrow H^1(\mathcal{O}(l)|_{\mathbb{P}(\Omega_{X/K})}) \end{aligned}$$

も完全。 仮定から (ampleness の)

$$H^1(\mathcal{O}(l)|_{\mathbb{P}(\Omega_{X/K})}) = 0 \quad \forall l \gg 0.$$

故に、減少列

$$h^1(\mathcal{O}(l-1)) \geq h^1(\mathcal{O}(l))$$

は停滞し、 $\forall l \gg 0$ に対して

$$h^1(\mathcal{O}(l-1)) = h^1(\mathcal{O}(l)),$$

従って c は全射となり、 $Bs|\mathcal{O}(l)| = \emptyset$ となる。
Q.E.D.

注意. さらに

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}(\Omega_X) & \xrightarrow{\varphi} & \mathbb{P}(H^0(\mathcal{O}(l))) \\ \cup & & \cup \\ \mathbb{P}(\Omega_{X/K}) & \longrightarrow & \mathbb{P}(H^0(\mathcal{O}(l)|_{\mathbb{P}(\Omega_{X/K})})) \end{array}$$

において $\mathbb{P}(H^0(\mathcal{O}(l)))$ の超平面 A をとれば、
 $|\mathcal{O}(l)|$ は基底が無いから

$$\varphi^*A = \mathbb{P}(\Omega_{X/K})$$

と仮定できる。しかも $\varphi^*A \cong A$ であるから、 φ は birational morphism である。 同型にならない点の全体は、 $\mathbb{P}(\Omega_{X/K})$ とは交わらない。

さて、 $p: \mathbb{P}(\Omega_V) \rightarrow V$ に戻って、 $\{s_\lambda: C \rightarrow V\}$ を平面的仮定にある稠密な有理点から定まる f section の全体とする。
 $C_\lambda = s_\lambda(C)$ において、完全列：

$$0 \rightarrow f^*\Omega_C \rightarrow \Omega_V \rightarrow \Omega_{V/C} \rightarrow 0$$

を C_λ に制限すると

$$f^*\Omega_C|_{C_\lambda} \xrightarrow{\quad} \Omega_V|_{C_\lambda}$$

という自然な splitting が得られる。

この splitting から下図を可換にするような sections が得られる。

$$\begin{array}{ccc}
 & P(\Omega_V) & \\
 \nearrow \sigma_\lambda & \downarrow & \\
 C_\lambda & \hookrightarrow & V
 \end{array}$$

$B_\lambda = \sigma_\lambda(C_\lambda)$ として、 $Z = "P(\Omega_V)$ での $\cup B_\lambda$ の closure"

とする。 Z の既約成分で、そこに含まれる B_λ の像 C_λ が V で稠密になっているものがある。これを改めて Z とおく。

Case (i). $\dim \varphi(Z) = \dim Z$ のとき、

$\mathcal{O}(\ell)$ を Z へ制限したものを $\mathcal{O}_Z(\ell)$ とする。 $\ell \gg 0$ にとれば、 $\mathcal{O}_Z(\ell)$ に付随した正則写像は birational にできる。

$$\varphi_Z: Z \rightarrow \varphi(Z).$$

このとき

$$(\star) \left\{ \begin{array}{l} \text{ある多様体 } T \text{ と} \\ C \times T \rightarrow \varphi(Z) \\ \text{という dominant rational map} \\ \text{が存在する} \end{array} \right.$$

($\star$ は [] を参照)。さらに、

$$\begin{array}{ccccc}
 C \times T & \longrightarrow & Z & \longrightarrow & V \\
 & \searrow & \downarrow \cong & \swarrow & \\
 & & C & &
 \end{array}$$

という可換図式で、 $C \times T \rightarrow V$ が dominant となるから、[5] により、 $V \sim V_0 \times C$ が C 上及有理が示せる。

Case (ii). $\dim \varphi(Z) < \dim Z$ のとき、

このとき Z の生成点が $P(\Omega_{V/C})$ に含まれていない。

補題 2. $\varphi: \mathbb{P}(\Omega_X) \rightarrow \mathbb{P}(H^0(\mathcal{O}(l)))$

の退化集合を S とする.

(a) $S \cap \mathbb{P}(\Omega_{X/K}) = \emptyset.$

(b) $\mathbb{P}(\Omega_X) \setminus S$ 上 φ は quasi-finite.

$Z_K = Z \otimes K$ とおいて、 $Z_K \cap S \subseteq Z_K$ とすれば Z_K の生成点で φ は quasi-finite となり矛盾.

従って $Z_K \subseteq S$, i.e. $Z_K \cap \mathbb{P}(\Omega_{X/K}) = \emptyset.$

このことから

$$X \sim \exists X_0 \otimes_K K$$

と descent できる.

補題 (Deschamps). 次の完全列

$$0 \rightarrow f^* \Omega_K \rightarrow \Omega_X \rightarrow \Omega_{X/K} \rightarrow 0$$

が global に split し、 $\omega_{X/K}^{\otimes m}$ が base point free ならば、

$$X \sim \exists_{K\text{-有理}} X_0 \otimes_K K.$$

$Z_K \subseteq \mathbb{P}(\Omega_X) \setminus \mathbb{P}(\Omega_{X/K})$ により

$$0 \rightarrow (f^* \Omega_K)_{(Z_K)} \rightarrow \Omega_{X(Z_K)} \rightarrow \Omega_{X/K(Z_K)} \rightarrow 0$$

が split するから、trace を使って global な splitting が引き起こされる.

補題 (Deschamps, —). $\mathcal{L}$ が可逆層、

E が連接層、 $E/\mathcal{L}$ は $\mathcal{O}_X$ -flat とする.

このとき、

$$0 \rightarrow \mathcal{L} \rightarrow E \rightarrow E/\mathcal{L} \rightarrow 0 \text{ (完全)}$$

と、 X -スキーム T に対して

$$T \mapsto \{ \theta; 0 \rightarrow \mathcal{L}_{(T)} \xrightarrow{\theta} E_{(T)} \rightarrow (E/\mathcal{L})_{(T)} \rightarrow 0 \}$$

は $\mathbb{P}(E) \setminus \mathbb{P}(E/\mathcal{L})$ で表現される.

□

(注)

$\{ C_\lambda \mid C_\lambda \text{ は } f \text{ の section で } (K_V \cdot C_\lambda) \text{ が有界} \}$

が V で dense となっていることを示すことは、予想は証明される.

Reference

- [1] S. Arakelov : Families of algebraic curves with fixed degeneracy,
Izv. Akad. Nauk. 35 (1971)
- [2] M. Deschamps : Courbes de genre géométrique borné sur une
surface de type général d'après F.A. Bogomolov,
Sém. Bourbaki 30e année 1977/78 n°519.
- [3] ————— : Surface de type général (ou fondamental) et
de type (T_2) sur un corps de fonctions (carac-
térisique 0) Thèse de Doctorat, 1976.
- [4] G. Faltings : Endlichkeitssätze für abelsche Varietäten
über Zahlkörpern, Inv. math. 73 346-366 (1983).
- [5] K. Maehara : A finiteness property of Varieties of general
type, Math. Ann. 262, 101-123 (1983)
- [6] J. Noguchi : A higher dimensional analogue of Mordell's
conjecture over function fields, Math Ann.
258, 207-212 (1981)
- [7] A.N. Parsin : Algebraic curves over function fields I,
Izv. Akad. Nauk, 32 (1968)
- [8] P. Samuel : Complément à une article de Hans Grauert
sur la conjecture de Mordell, Publ. Math. I.H.E.S.
n°29 (1966)
- [9] L. Szpiro : Sur le théorème de rigidité de Parsin et
Arakelov. Astérisque 64, 169-202 (1979).
- [10] J. Noguchi : 日本数学会講演 (秋. 1983)