

粘性流体流れの数値解析

東京工業大学 日野 幹雄

要旨： 流体の運動方程式は，非線型偏微分方程式であり，解析的厳密解を求めることはかなり困難である。また，それゆえに非線型問題に対する新解法発見のきっかけを与え，あるいは新手法の妥当性に試験場を提供して来た。大型コンピュータの登場は流体力学に大きな進歩をもたらしたが，一方，単なる計算手法の改良開発のみでは問題の解決にならないこと，流体運動という物理現象に対する深い洞察力はそれにも増して必要であることが示された。本報文は，著者のこれまでの研究を中心に，それに他の研究者の研究を加えつつ流体力学（主に粘性流体）の数値解析のアルゴリズムと底に流れる思考法について紹介したものである。

はじめに

(a) 流体力学における非線型問題

流体の運動は，多くの場合極めて複雑であり；実用上の問題の解法には，解析的方法がしばしばその有用性を失う。それは，一つには流体運動を記述する方程式（Navier-Stokes eq.）の非線型性に拠るものであり；このことは，逆に流体

力学の問題がしばしば非線型問題についての新しい解法を生み出すきっかけとなったり、非線型問題の新手法の試験材を提供して来た。

19世紀の流体力学が、実際の流体现象の解明というよりも応用数学的色彩の多分に強いものであったのに反し、今世紀前半のそれは、非線型の基礎方程式を数学一辺倒でやみくもに解くことよりは、むしろ方程式の表わす物理的意味についての深い洞察を基にした解法の展開に特色がある。これにより、多くの現実の流れの問題が解決された。(例えば、境界層理論・混合距離理論・局所的等方性の理論を挙げる事ができる。)しかしながら、こうした理論のみでは、複雑な境界条件のもとでの流体運動の解を得ることが容易でないのはもちろんである。

(b) 数値予報・実験の思想の誕生

一方、いかに流体の運動が複雑であるとしても、またこのような場合には模型実験が唯一の解決法と考えられていたけれども、結局流れは基礎方程式 (Navier-Stokes eq. と連続式) で記述さるべきものであり、その解に他ならない。それゆえ、基礎方程式を複雑な境界条件を考慮しつつ正確に数値的に解いてゆけば解が求まるはずであると考えて、実行した最初の人がRichardson (英,

1922)である。彼は現在の天気の数値予報の先駆者であり、流体力学の数値実験のパイオニアである。しかし、彼の大変な努力（当時は今日のような電子計算機はなかった）にもかかわらず、結果は美事な失敗に終わった。それは、今日から見れば明白な原因一つまり、計算理論の不備による計算安定性の無視によるものであった。

(c) 数値実験の発達

こうした数値実験の試みはより単純で基礎的な問題について多くの人々により行われて来た。高速大容量の電子計算機の登場以前の代表的研究には、一様流中の円柱の周りの流れについての Thom (英, 1933)・川口光年 (1953, 54)・Rayne (英, 1958, 初期の電算機) の計算がある。

流体力学における数値実験の方法を飛躍的に発展させ、その美事さを強く印象づけたのは1963年に発表された一様流中に直に置かれた平板よりの Karman 渦の発生についての Fromm & Harlow¹⁾ の計算である。彼は当時の最高性能の電子計算機 IBM 7090 を使って、時々刻々の流れの変化を計算しただけでなく、それをブラウン管ディスプレイと組合せ各時間毎の計算結果をブラウン管に映し出し、それを一駒づつ 16 mm フィルムに記録した。これを映写することによりあたかも実験

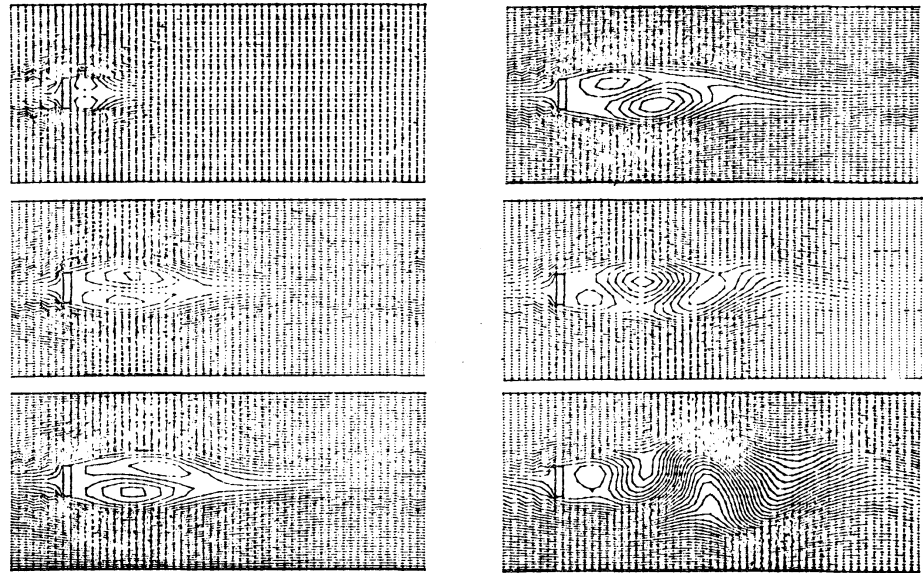


Fig. 1 : 流れの中に置かれた平板からの Karman 渦の発生
 [Methods in Computational Physics, Vol. 3, p. 377 (1964) より]

室における flow visualization のように，いやそれ以上完全に（というのは流跡線の他に，実験では無理な温度図・流関数図も）示した。その後，Fromm と Harlow を中心とするカルフォルニア大学ロサンゼルス研究所のグループは次々と新しい手法を開発している。

もっとも，Fromm らの数値実験については，理論流体力学者の間から結果の信憑性について若干の疑問がさやかれていないでもない。

Fromm らに始まる最近の二の種の数値実験は，どちらかといえば，現代の流体力学理論の空白を埋めるための基礎的研究であると云える。

一方において，簡単に模型実験の出来ない気象学や海洋学

といった地球物理学やこれら対象域の広い土木工学の分野においても、多くの計算機実験の手法が開発され、問題の解決がなされて来た。

I 速度の遅い粘性流

流体力学におけるコンピュータ利用の最も基本的な問題の一つに、一様流中の円柱まわりの非定常な流れの問題がある。レイノルズ数が十分小さければ、流れはもちろん定常であるが、レイノルズ数が40を越えると円柱の背後に交互にカルマン渦が発生して、流れは非定常となる。

流体の運動方程式と連続式は二次元の流れに対して

$$\left. \begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \nabla^2 u \\ \rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu \nabla^2 v \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1.1)$$

となる。ここに、 x, y : 座標軸 (一様流の方向を x とする)
 u, v : x, y 方向の流速成分, p : 圧力, μ : 粘性係数。
 式 (1.1) には u, v, p と3つの従属変数があるから流れ関数 ψ と渦度 ω を

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{\partial \psi}{\partial y} & , & & v &= -\frac{\partial \psi}{\partial x} \\ \omega &= \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \end{aligned} \right\} \quad (1.2)$$

で定義し，変数を2個とする。その結果，長さの単位を円柱半径 a ，流速の単位を無限遠での流速 U_∞ にとって，無次元量に関する方程式を次のように得る。

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \omega}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \omega}{\partial y} = \frac{2}{Re} \nabla^2 \omega \quad (1.3a)$$

$$\nabla^2 \psi = -\omega \quad (1.3b)$$

式(1.3a)を ω を求めるための式，式(1.3b)をこの ω を用いて ψ を求めるための式と考えて加算 Liebmann 法で解くというのが数値解法の基本である。

この場合に，式(1.3a)で既知と考えた ψ と式(1.3b)の ψ とは実際には相等しくなければならないが，普通の計算法では一時間ステップ Δt に対応する時間分だけ差があるので，両者の ψ が一致するまで同一時間 t について式(1.3a, b)について iteration をする Pearson の方法もある。(Fig. 2)

なお，圧力 p が必要ならば，式(1.3a, b)の ψ を用いて後式から求めれば良い。

$$\nabla^2 p = 4 \left[\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] \quad (1.4)$$

さて、上述の方法で数値計算を行うのに、一番問題となるのは、円柱表面での境界条件と外側(無限遠点)での境界条件の処理である。

$$\left. \begin{aligned} \psi &= \text{const} \quad (r=a) \\ \frac{\partial \psi}{\partial r} &= 0 \quad (r=a) \end{aligned} \right\}$$

(1.5)

現在までに考えられている境界条件の処理の手法には次のようなものがある。

i) Taylor展開による境界値の近似

格子として $x-y$ 方向の矩形格子を用

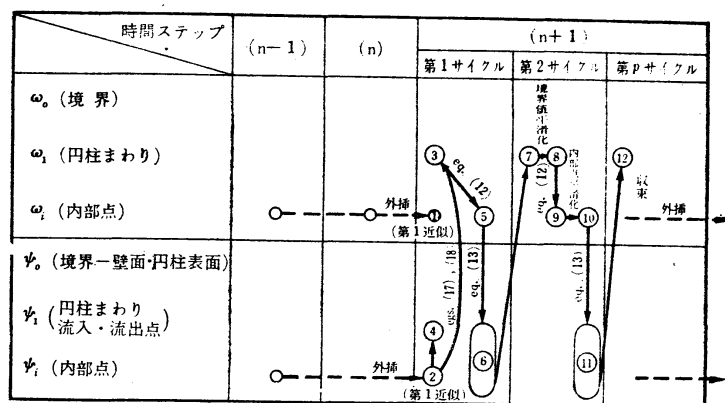


Fig. 2 : 計算の方法

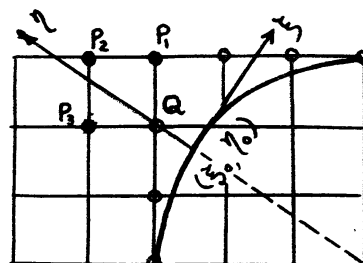


Fig. 3 :

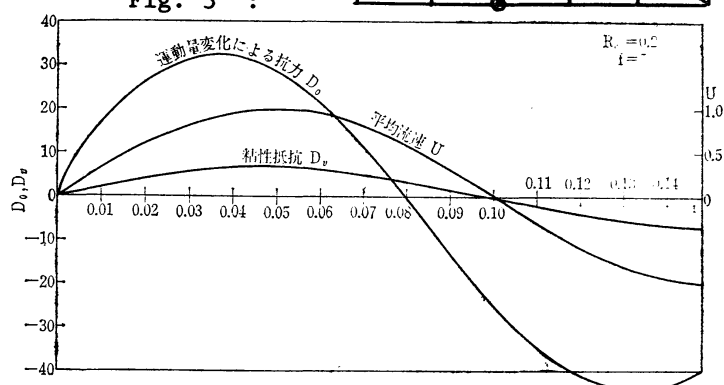


Fig. 4 : Drag on a circular cylinder in an oscillating flow. 3)

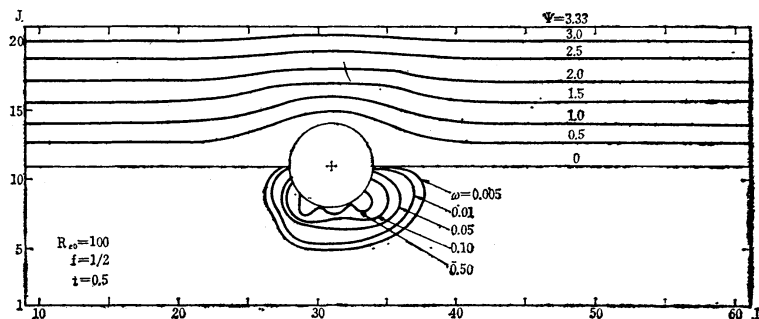


Fig. 5 : Profile of stream line and vorticity around a circular cylinder in an oscillating flow. 3)

いるのが一番自然であるが、この場合には格子点はいずれも円柱表面上にはない。しかし、円柱自身を表現するほど格子間隔を細くすることは實際上不可能である。そこで、円柱に最も近い流体中にある格子点で円柱を代表させる。この格子点に最も近い円柱表面上の点に関して $\psi(\xi, \eta)$ を Taylor 展開し、

$$\begin{aligned} \psi(\xi, \eta) \doteq \psi(\xi_0, \eta_0) &+ \left[\frac{\partial \psi}{\partial \xi} \right]_{(\xi_0, \eta_0)} \cdot \xi + \left[\frac{\partial \psi}{\partial \eta} \right]_{(\xi_0, \eta_0)} \cdot \eta \\ &+ \frac{\xi^2}{2} \left[\frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} \right]_{(\xi_0, \eta_0)} + \xi \eta \left[\frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi \partial \eta} \right]_{(\xi_0, \eta_0)} + \frac{\eta^2}{2} \left[\frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2} \right]_{(\xi_0, \eta_0)} \end{aligned} \quad (1.6)$$

と近似する²⁾。 $\psi(\xi_0, \eta_0)$, $[\partial \psi / \partial \xi]_{(\xi_0, \eta_0)}$, $[\partial \psi / \partial \eta]_{(\xi_0, \eta_0)}$ は境界条件 (1.5) より決り、 (ξ_0, η_0) における 2 階偏微係数は境界格子点に隣り流体内の 3 点の ψ を式 (1.6) に代入して定め、その結果上式を用いて境界格子点の ψ を求める。(Fig. 3)

また、境界格子点での渦度 ω は、式 (1.3c) を逆に用いて

$$\omega = -\nabla^2 \psi \quad (1.7)$$

より求める。

これらの方法で、流体の内部格子点と境界格子点とを厳密に区別して、混用を避けることに留意しなくてはならない。

Figs. 4, 5 は振動流中の円柱まわりの流れの ψ, ω と抗力を上述の方法で求めた結果の例である³⁾。

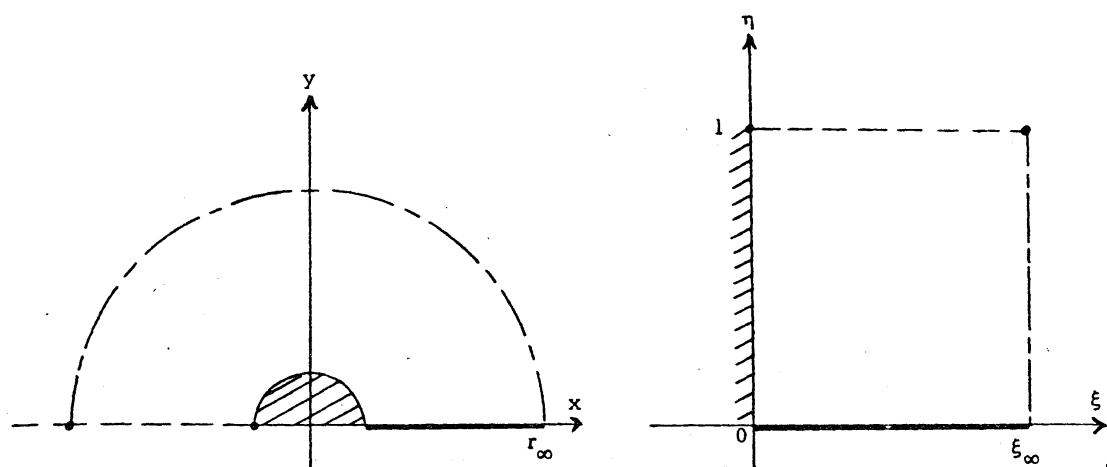


Fig. 6 : Transformation of coordinate system [from Keller and Takami.⁵⁾]

ii) 等角写像による座標変換⁴⁾⁵⁾

円柱表面や無限遠での境界条件を正確に満たすためには、次のような等角写像による座標変換を行うと良い。

$$(\xi + i\eta) = \frac{1}{\pi} \ln(x + iy) \quad (1.7)$$

すなわち、 (x, y) 平面の極座標 (r, θ) については

$$r = e^{\pi\xi} \quad \theta = \pi\eta \quad (1.7a)$$

この変換により、式(1.3ab)は次のようになる。

$$\Delta\Psi = -\pi^2 r^2 \omega \quad (1.8a)$$

$$\Delta\omega = \frac{Re}{2} \left[\frac{\partial\omega}{\partial t} + \pi r (\cos\theta \frac{\partial\omega}{\partial\xi} - \sin\theta \frac{\partial\omega}{\partial\eta}) - \frac{\partial(\Psi, \omega)}{\partial(\xi, \eta)} \right] \quad (1.8b)$$

こゝに、

$$\Psi = \psi - y$$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial\xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial\eta^2}$$

円柱表面は格子の一面 $z=0$ と一致している。無限遠までの境界条件のかわりに、理論的に求められている漸近解(今井)を用いる。

$$\begin{aligned} \psi(\xi_\infty, \eta) = & \frac{C_D}{2}(\eta - \operatorname{erf} Q) - \frac{C_D^2 R}{16\sqrt{\pi}} \\ & \left\{ \frac{1}{P} [\sqrt{2}(\operatorname{erf} \sqrt{2} Q - 1) - e^{-Q^2} \operatorname{erf} Q] + \frac{\sqrt{2} P}{P^2 + Q^2} \right\}, \end{aligned} \quad (1.9)$$

$$\begin{aligned} \omega(\xi_\infty, \eta) = & \frac{-C_D R}{4\sqrt{\pi}} \frac{Q}{r} e^{-Q^2} + \frac{C_D^2 R^2}{64\sqrt{\pi} r} \\ & \left\{ -\frac{1}{P} e^{-Q^2} \left[\frac{2}{\sqrt{\pi}} Q e^{-Q^2} + (2Q^2 - 1) \operatorname{erf} Q \right] \right. \\ & \left. + \frac{1}{P^3} [\sqrt{2}(\operatorname{erf} \sqrt{2} Q - 1) - e^{-Q^2} \operatorname{erf} Q] \right\}, \end{aligned} \quad (1.10)$$

こゝに、

$$P \equiv \sqrt{\frac{Rr}{2}} \cos \frac{\pi}{2} \eta, \quad Q \equiv \sqrt{\frac{Rr}{2}} \sin \frac{\pi}{2} \eta, \quad \operatorname{erf} Q \equiv \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^Q e^{-s^2} ds. \quad (1.11)$$

式(1.9)~(1.11)の中には、計算より求むべき未知量である抵抗係数 C_D が含まれている。したがって、一度 ψ , ω が計算されると、これより円柱に働く抵抗を計算し、近似度の高い C_D を用いて、さらに ψ , ω を求めるというイタレーションを行うことが必要である。

最近では、上に述べた ψ ・ ω に関して解く方法のほかに、流

速成分 u, v と圧力 p のまゝ計算をすゝめ、同次に格子を代表する粒子を配置し、計算された u, v に従って粒子を移動させるMarker And Cell法⁶⁾；さらにこの方法を改良したParticle In Cell法⁷⁾⁸⁾が考えられている。これらの方法は、自由表面のある流れや二種の流体の境界面のある場合、圧縮流体の場合に特に威力を発揮する。

構造解析の分野で目覚しい発達をしている有限要素法も、速度ポテンシャルをもつ地下水流や多孔質中の流れに迅速く

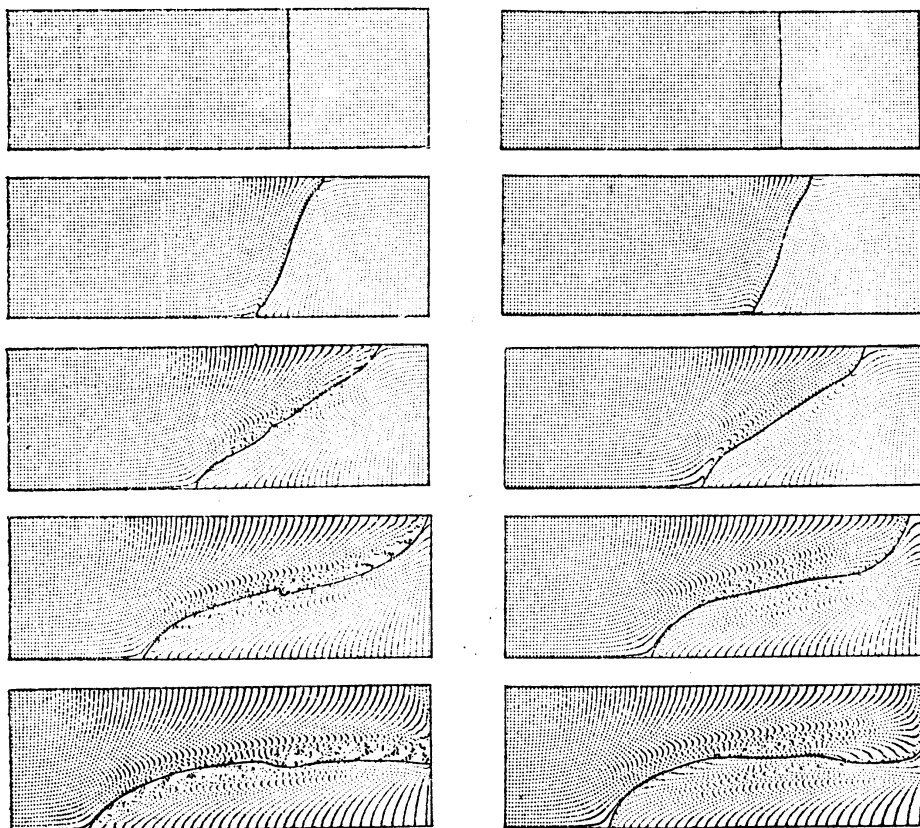


Fig. 7 : “Rayleigh-Taylor 不安定”の成長過程
[Daly, Phy. Fluid, Vol. 11, p. 21(1968)]

応用されており，最近は粘性流体の流れの数値解析への適用も試みられている。^{9) 10) 11)}

II 乱流(a) — 渦動粘性 / 大気拡散の計算

I に述べた方法を，実用的なレイノルズ数範囲に拡張しようとするとき，たちまち障害にぶつかってしまう。というのは， Re の増加は流れの場を微細化し，正しい数値解を得るためには，格子間隔 $h = \Delta x = \Delta y$ を増々小さくしなくてはならないし，その上計算の安定条件

$$2\Delta t / Re h^2 \leq 1/6$$

よりして， Δt も増々短かくとらなければならぬから，実際上数値計算をすすめることはできなくなる。

i) 地形の影響を考慮した風の場合の計算 — 今井の方法¹²⁾

そこで，レイノルズ数以上の考えである（時間的）平均化と変動成分の非線型効果の定数化により解決を計ることになる。さらに，Prandtl による境界層概念の導入により，粘性効果および変動成分の非線型効果である渦動粘性の作用する物体近傍の境界層と，これらを考慮しなくて良い残りの大部分とに分けて計算を簡略化する。

今井らは，三次元的な地形の影響を考慮した風の場合の計算に

ついて、この考え方により次の式を導いた。すなわち、粘性の影響をうけない上層の free layer は、山の高さに比例する地表面に分布する吹き出しを考慮して、速度ポテンシアル ($u_1 = U + \phi_x$, $v_1 = \phi_y$)

$$\phi(x, y, z) = \frac{U}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(\xi, \eta) \frac{x - \xi}{r^3} d\xi d\eta \quad (2.1)$$

$$r = \sqrt{[(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + z^2]}$$

で与えられる。一方、地表近くの B-層 (Boundary Layer) は渦動粘性係数 ε に関する渦動レイノルズ数 Re を用いて、

$$\frac{\partial v^*}{\partial \xi} = \frac{\delta}{Re} \frac{\partial^2 v^*}{\partial \xi^2} + \frac{\partial h}{\partial \xi} \frac{\partial v^*}{\partial \xi} \quad (2.2)$$

と書かれる。ここに $v^* = (u_1 - u, v_1 - v)$, $u, v = F$ 層下面の風速, $\xi = x$, $\eta = y$, $z = Z - h(\xi, \eta)$, h : 山の高さ。

一方、種々の理論的推理や実験結果から、渦動レイノルズ数は、ほとんどすべての乱流について 100~200 の値をとることが知られており、式 (2.1) (2.2) により複雑な実地形での風の場の計算をすることができる。この方法では、式 (2.2) よりも明らかなように、物体の背後に逆流領域が現れない。しかし、流れが層流の場合とは異り乱流である実際の場合には、山の背面の剝離の形成はそれ程顕著ではなく、渦動粘性係数 ε を高さ Z の関数として与えることにより、実際の気流をかなり正しく推定しうる。

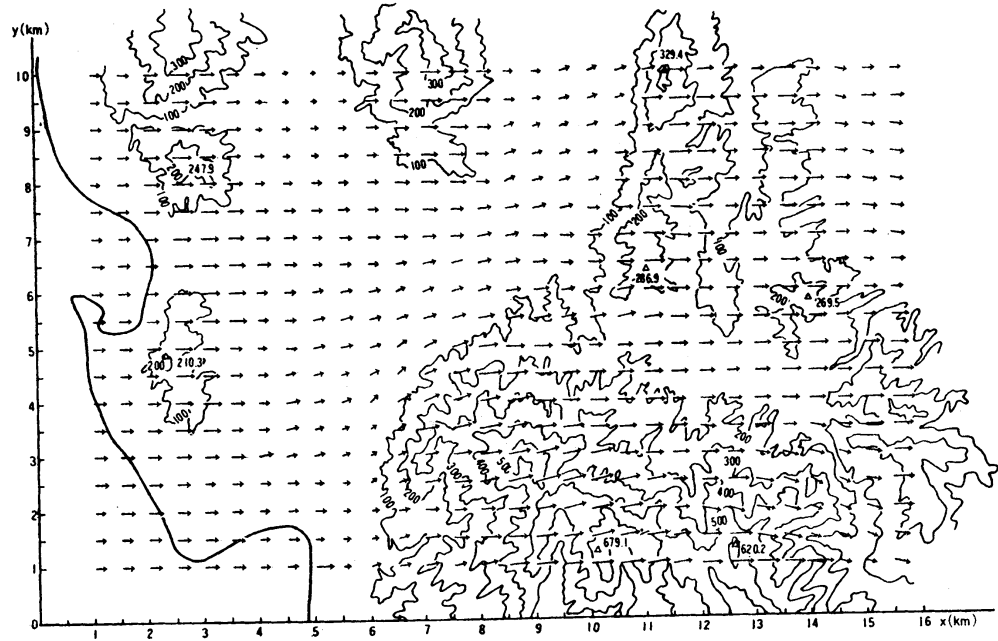


Fig. 8 : Wind-velocity pattern as affected by topography at the bottom of the F-layer.

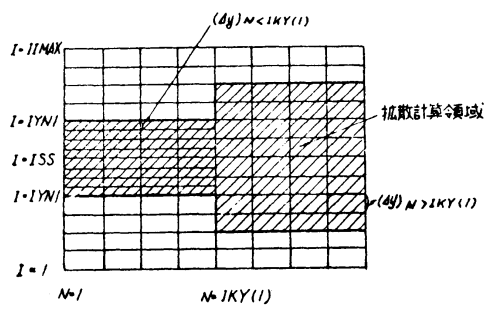


Fig. 9 :
 Δy の変更と拡散計算領域の拡大

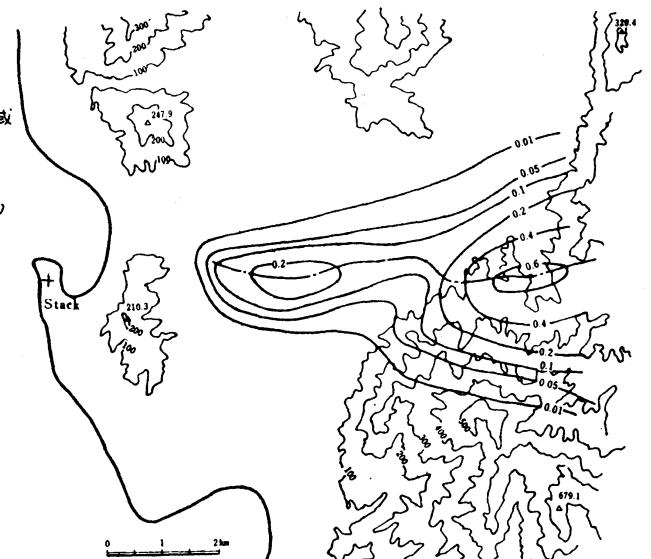


Fig. 10 : Distribution at height of 40 m from the ground surface ($\zeta = z - h = 40$ m) of concentration of smoke emitted from a source with height 400 m which is derived from the computer experiment.

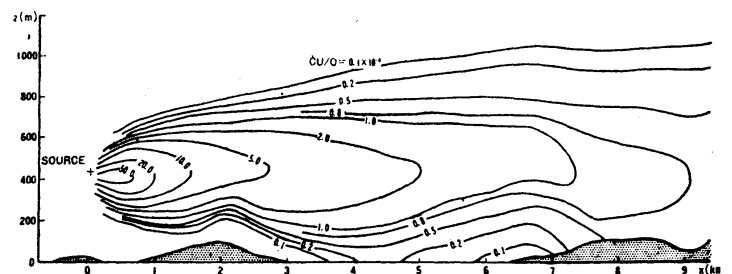


Fig. 11 : Distribution of smoke concentration in a vertical plane $y = 0$ which is derived from the computer experiment.

ii) 地形の影響を考慮した拡散の計算¹³⁾

風の場合が求まると、Fickの拡散方程式より煙の拡散が計算できる。煙の拡散方程式は

$$\frac{\partial C}{\partial t} + u \frac{\partial C}{\partial x} + v \frac{\partial C}{\partial y} + w \frac{\partial C}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left(K_x \frac{\partial C}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(K_y \frac{\partial C}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(K_z \frac{\partial C}{\partial z} \right). \quad (2.3)$$

である。i)と同じく、 $\xi = Z - h(x, y)$ の変換を行えば、式(2.3)は

$$\begin{aligned} u \left(\frac{\partial C}{\partial \xi} - \frac{\partial h}{\partial \xi} \frac{\partial C}{\partial \xi} \right) + v \left(\frac{\partial C}{\partial \eta} - \frac{\partial h}{\partial \eta} \frac{\partial C}{\partial \xi} \right) + w \frac{\partial C}{\partial \xi} = \frac{\partial}{\partial \eta} \left(K_y \frac{\partial C}{\partial \eta} - K_y \frac{\partial h}{\partial \eta} \frac{\partial C}{\partial \xi} \right) \\ - \frac{\partial h}{\partial \eta} \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi} \left(K_y \frac{\partial C}{\partial \eta} \right) \right\} + \left(\frac{\partial h}{\partial \eta} \right)^2 \frac{\partial}{\partial \xi} \left(K_y \frac{\partial C}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial \xi} \left(K_z \frac{\partial C}{\partial \xi} \right). \end{aligned} \quad (2.4)$$

と書き換えられる。

拡散方程式(2.4)の数値解を求めるにあたって、計算手法上特に苦心したのは次の諸点である。

- (a) 地形の読み取り間隔(記憶容量の上からあまり狭くしない)あるいはF-層の格子間隔と、それぞれ別の計算安定条件より定まるB-層計算の格子間隔、拡散計算の格子間隔の3つが異っている。
- (b) 拡散計算の風下方向への進行につれて、煙の拡散幅の横方向への広がりが大きくなり、格子間隔を拡大する必要がある。(Fig. 9)
- (c) 濃度Cの変化がexponential的に急激であるので、普

通の差分では微分近似として不十分であり，高階差分までとるか（Lax-Wendroff 法の拡張），むしろ

$$\ln C = \gamma$$

による従属変数の対数変換を行う必要がある。

この計算プログラムは現在通産省の APCS (Atmospheric Pollution Control System) の中心として，大気汚染の予測システムに使用されており，細部についての改善が行われている。Figs. 10・11 に計算結果の一例を示す。

III 乱流(b) — 三次元乱流場の微細構造

N・S方程式・連続式の差分数値解により流れの場を求める方法ではレイノルズ数が余り高くない範囲（普通は100オーダー，高々数千）で可能であると述べた。しからば，コンピュータの記憶容量が増し，計算速度が上昇すれば高いレイノルズ数の乱流場の計算が可能であろうか。否である。なぜならば，レイノルズ数の増加につれて流れの場の構造は急速に微細化し，Iに述べた方法では格子間隔を再限りなく細かくしなければならず，その2乗に比例して時間間隔も短かくしなければならず，遂に格子間隔は分子オーダーにまで細かくなってしまふ。そしてこれでは，もはや連続体の力学として

の立場は失われてしまうことになる。なによりも、われわれは分子オーダーでの流体運動を知ることを要求もしないし、そこから流れのマクロな性質がより良く理解されるとは考えられない。

では、どうすれば良いのか？ そこで、近代流体力学の基本的な考え方である“現象の物理的解釈”という立場を数値計算の中に持ち込み、解決を計ろうとするのは最も自然な行き方である。乱流現象の場合には、乱流理論の形成過程の中に導入された“観測のスケール”の概念 (Weizsäcker 1948, Heisenberg 1948)、および“局所的等方性”の仮説の数値計算過程への具体化である。

観測のスケールの概念とは、われわれが現象を見るときある長さと時間を基準としてそこに注目して見ているのであり、その切断のスケールより小さな乱流運動はより大きなスケールの運動に対して粘性として作用するという考えである。そして、そのスケールが流れのエネルギーを生産するスケールの運動より十分小さいとき、そこでの力学機構・エネルギー移行過程は大きなスケールの非等質性などには左右されず局所的に相似であり等方性をもつとみなされる。

この様な考え方に立つとき、われわれは流れの場を必要十分な細かさの格子で区切り、格子間隔より微細な運動は格子

の幅で記述される運動に対し粘性的に働き，その大きさを局所的等方性の理論により，エネルギー生産に關与する格子目以上の真の量で決定することができる。

こうした考え方を具体的にコンピュータで実行しようとする試みが，こゝ二年ほどの間に二三発表された。こゝでは，そのうちの一つ J. W. Deardorff⁽¹⁴⁾ (1970) による研究を紹介する。

i) 格子スケールで平均化された基礎方程式

上に述べた観測のスケールの考え方に基づき，格子内での平均流速を次のように定義する。

$$\bar{u}(x, y, z, t) = \frac{1}{\Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z} \int_{x-\frac{1}{2}\Delta x}^{x+\frac{1}{2}\Delta x} \int_{y-\frac{1}{2}\Delta y}^{y+\frac{1}{2}\Delta y} \int_{z-\frac{1}{2}\Delta z}^{z+\frac{1}{2}\Delta z} u(\xi, \eta, \zeta, t) d\xi d\eta d\zeta, \quad (3.1)$$

N-S 方程式に式(3.1)のような場所的平均操作を行い，それより α ズレを $\prime$ を付けて表わし，二三の数式処理を行えば，場所平均流速に關する運動方程式が次のように得られる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} = & -\frac{\partial}{\partial x_j} [\bar{u}_i \bar{u}_j + \bar{u}_i' u_j' - \frac{1}{3} \delta_{ij} \bar{u}_i' u_i' - \delta_{i3} \delta_{j3} \langle \bar{u}_3^2 + \bar{u}_3'^2 - \frac{1}{3} \bar{u}_i' u_i' \rangle] \\ & - \frac{\partial}{\partial x_i} (\bar{P}'' - 2x_1) + R^{-1} \nabla^2 \bar{u}_i, \end{aligned} \quad (3.2)$$

こゝに， $R = U^* h / \nu$ (レイノルズ数)， h : 流れの壁面間距離， $U_* = (\tau / \rho_0)^{1/2}$: セン断速度，また $\langle \rangle$ は水平方向平均，

$$\bar{P}'' = (\bar{p} / \rho_0 u_*^2 + \frac{1}{3} \bar{u}_i' u_i' + 2x_1) - \langle \bar{p} / \rho_0 u_*^2 + \frac{1}{3} \bar{u}_i' u_i' + 2x_1 \rangle \quad (3.3)$$

この圧力変位項を求める方程式は

$$\nabla^2 \bar{P} = \frac{\partial \bar{Q}_i}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} \right), \quad (3.4)$$

$$\bar{Q}_i = -\frac{\partial}{\partial x_j} [\bar{u}_i \bar{u}_j + \overline{u'_i u'_j} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \overline{u'_l u'_l} - \delta_{i3} \delta_{j3} \langle \bar{u}_3^2 + \overline{u_3'^2} - \frac{1}{3} \overline{u'_l u'_l} \rangle].$$

ii) 渦粘性の表示式

式(3.2)(3.4)に表われる未知量 $\overline{u'_i u'_j} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \overline{u'_l u'_l}$ は格子スケール以下の流体運動のもたらす見掛けの応力, いわば subgrid scale (SGS) Reynolds stress である。これは, 普通のレイノルズ応力が, 時間的平均流速からの変動成分の非線形効果として現われるのに対応している。そこで, Boussinesq の渦動粘性表示をもちこめば, これらの未知量は SGS 渦動粘性係数 K を用いて, 平均量 $\bar{u}_i$ に関して次のように表わされる。

$$\overline{u'_i u'_j} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \overline{u'_l u'_l} = -K \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right), \quad (3.5)$$

次に, K の値を平均量 $\bar{u}_i$ と関連させるために, レイノルズ数が十分大きく格子間隔は Kolmogorov の局所的等方性の仮説の成立するスケール範囲にあるとする。このとき, K はエネルギー逸散率 $\bar{\epsilon}$ と格子スケール Δ のみにより規定され, 次元考察より

$$K = c \bar{\epsilon} \Delta^{\frac{2}{3}}, \quad (3.6)$$

と表わされる。こゝに, $c \cong 0.10$ (普遍定数)

$$\Delta = (\Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z)^{\frac{1}{3}}. \quad (3.7)$$

また, エネルギー-逸散率は, (stress $\times$ strain) の関係より

$$\bar{\epsilon} = K \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right). \quad (3.8)$$

したがって, 式(3.6)(3.7)(3.8)より

$$K(x, y, z, t) = (c\Delta)^2 \left[\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \right]^{\frac{1}{3}}, \quad (3.9)$$

となる。

乱流場は結局, 式(3.2)(3.4)(3.9)を用いて, ほゞIと同一のアルゴリズムで求められる。しかも, 不必要に格子を細分化したり, 時間間隔を細かくしたりすることなしに。

iii) 計算例¹⁴⁾

高さ $0.7h$, 幅 h , 長さ $3h$ の矩形断面管路を

$$\Delta x = \frac{3}{24} = 0.125,$$

$$\Delta y = \frac{0.7}{14} = 0.05,$$

$$\Delta z = \frac{1}{20} = 0.05.$$

の格子で分ける。全格子点数は6720点である。計算安定性の条件より $\Delta t = 0.0033$ と採る。レイノルズ数 R は十分大きいとし, 格子スケールの基礎方程式(3.2)から分子粘性項を省略する。しかし, SGS の関係の中にエネルギー・カスケード

Fig. 12 : Computed mean velocity profile compared with experiments by Laufer (thick line), [from Deardorff¹⁴].

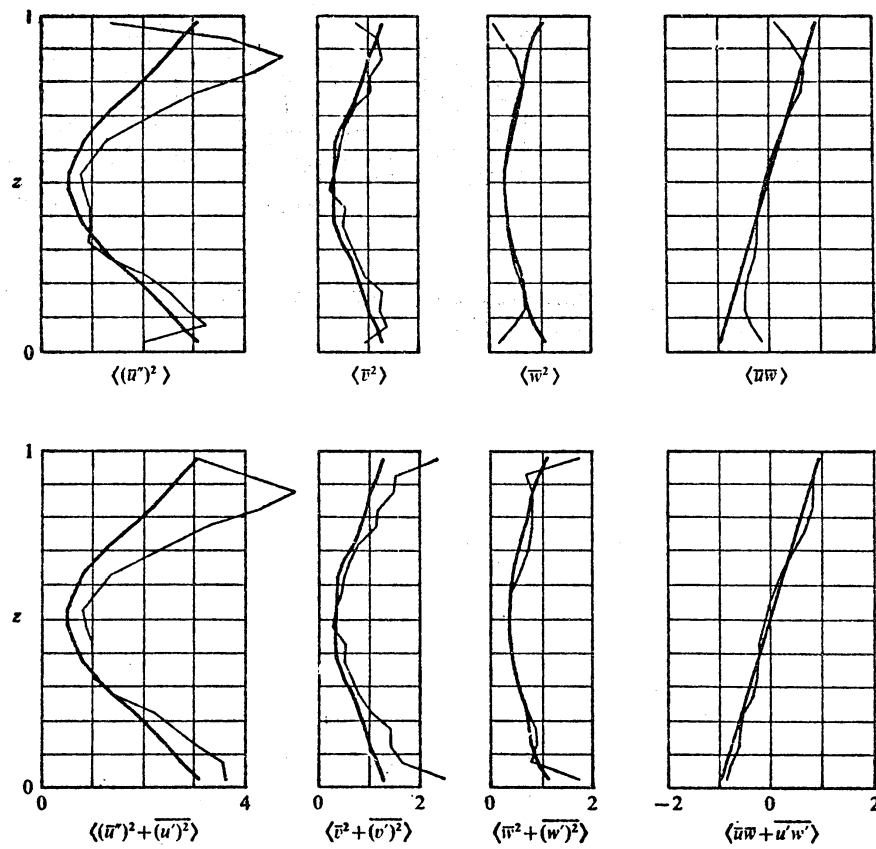
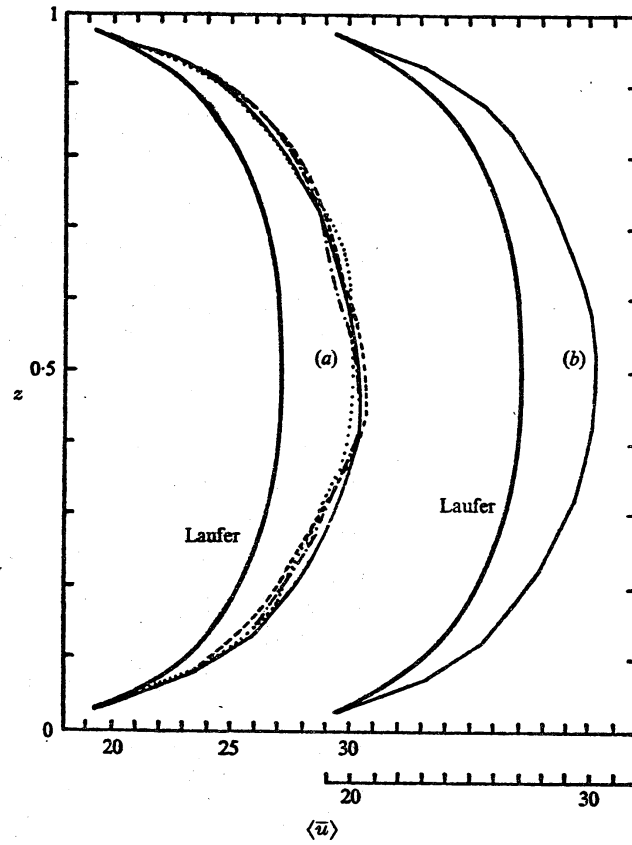


Fig. 13 : Computed turbulent characteristics (thin line) compared with experiment by Laufer (thick line) [from Deardorff¹⁴].

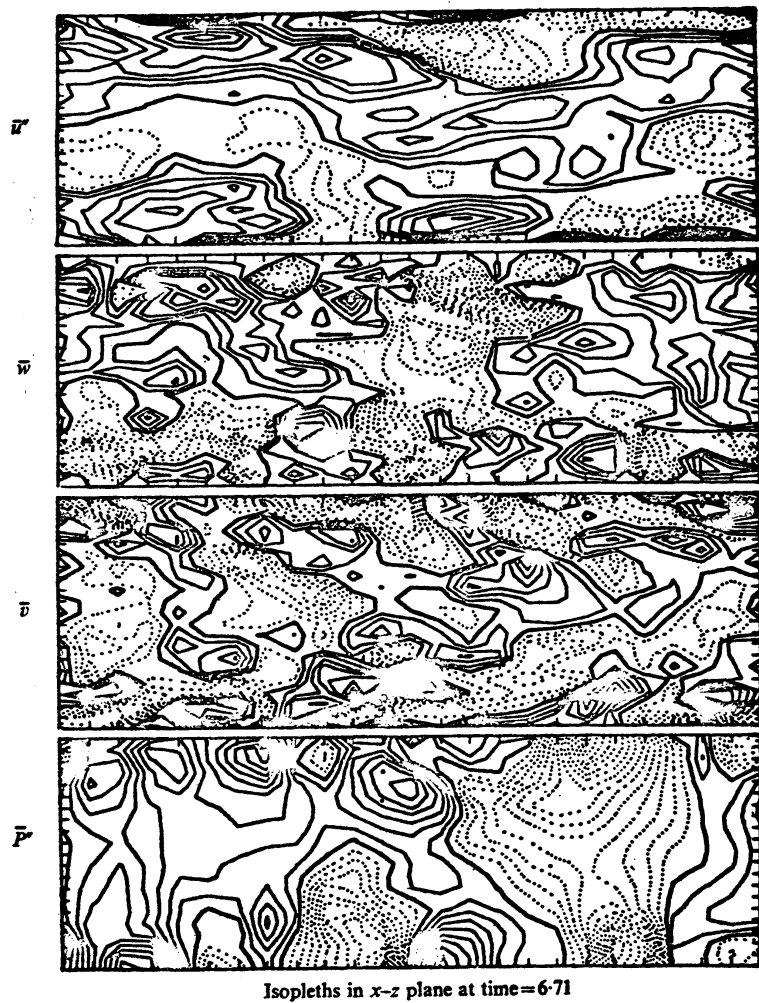


Fig. 14 : Instantaneous turbulent microstructure; computer experiment by Deardorff.

・プロセスとして分子粘性の効果は陰に含まれている。

計算結果のうちのいくつかを Figs. 12~14 に示す。平均流速分布については、Laufer の実験といく分の相違がみられる。しかし、乱れ成分の統計量については Laufer の実験結果と良く一致している。この数値実験のうち、特記すべきことは、Fig. 14 のようにある瞬間の乱れの構造が明確に得られたことである。このような映像は、いくら熱線計を並べてみても得ることはできないし；最近進歩の著しい flow visualization technique (例えば、水素気泡法) でも、こううまくはゆくまいと思われる。これらの実は、数値実験の独擅場と云えよう。

Reference

- 1) Fromm, J.E. & Harlow, F.H. : Numerical solution of the problem of vortex street development, *Phy. Fluids*, vol. 6, no. 7, 975-982 (1963)
- 2) Hirota, I. & Miyakoda, K. : Numerical solution of Kármán vortex street behind a circular cylinder, *J. Meteor. Soc. Japan, Ser. II.*, vol. 43, no. 1, 30-41, Feb. (1965)
- 3) Hino, M. & Hino, K. : The drag coefficient of, and flow pattern around a circular cylinder in an oscillating flow, *Proc. 12th Conf. on Coastal Eng. in Japan, Japan Soc. Civil Engrs*, Nov. (1965) (in Japanese)
- 4) Kawaguchi, M. : Numerical solution of the Navier-Stokes equations for the flow around a circular cylinder at Reynolds number 40, *J. Phy. Soc. Japan*, vol. 8, 747-747 (1953)
- 5) Keller, H.B. & Takami, H. : Numerical studies of steady viscous flow about cylinders, in "Numerical Solutions of Nonlinear Differential Equations", ed. by Greenspan, D., 115-140, (1966)
- 6) Harlow, F.H. : The particle-in-cell computing method for fluid dynamics, *Methods in Computing Physics*, ed. by B. Alder, S. Fernbach & M. Rotenberg Academic Press, vol. 3, 319-343 (1964)
- 7) Harlow, F.H. & Welch, J.E. : Numerical calculation of time-dependent viscous incompressible flow of fluid with free surface, *Phys. of Fluids*, vol. 8, no. 12, 2182-2189 (1965)
- 8) Daly, B.J. : Numerical study of two fluid Rayleigh-Taylor instability, *Phy. of Fluids*, vol. 10, no. 2, 297-307 (1967)
- 9) Zienkiewicz, O., Mayer, P. & Cheung, Y.K. : Solution of anisotropic seepage by finite elements, *J. Eng. Mech. Div., Proc. ASCE*, vol. 92, no. EM1, 111-120 (1966)
- 10) Oden, J.T. & Somogyi, D. : Finite-element applications in fluid Dynamics, *J. Eng. Mech. Div., Proc. ASCE*, vol. 95, no. EM3, 821-826 (1969)
- 11) Fujino, T. : Applications of electronic digital computer to design, *J. Japan Soc. Mech. Engrs*, vol. 73, no. 612, 76-85 (1970) (in Japanese)
- 12) Imai, I., Munakata, T., Kanbe, T. & Kaneko, Y. : Variations in wind velocity distribution due to topography, *Fluid Mechanics News (Ryuriki News)*, vol. 9, no. 12 (1966) (in Japanese)
- 13) Hino, M. : Computer experiment on smoke diffusion over a complicated topography, *Int. J. Atmospheric Environment*, vol. 2, 54-558 (1968)
- 14) Deardorff, J.W. : A numerical study of three-dimensional turbulent channel flow at large Reynolds numbers, *J. Fluid Mech.*, vol. 41, part 2, 453-480 (1970)