

Radial limits of univalent functions

東京電機大工 鶴見和之 (Kazuyuki Tsurumi)

Faculty of Technology, Tokyo Denki University

日本大薬 関根忠行 (Tadayuki Sekine)

College of Pharmacy, Nihon University

§1 序論

$U := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$,

$H : U$ で正則な函数の集合,

S : 単葉な函数 $f \in H$ で, $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$ となるものの全体とする. また, $f \in H$ に対して

$E_\infty(f) := \{e^{i\theta} \mid \lim_{r \rightarrow 1-0} |f(r^{i\theta})| = \infty\} \subset \partial U$ とおく.

我々の興味は単葉函数 $f \in S$ の境界挙動である. 特に, $f \in S$ に対して, 次の様な問題が考えられる:

1. $E_\infty(f)$ の capacity $\text{cap}_\alpha E_\infty(f) = 0$?
2. 集合 $E_\infty(f)$ は円周上で nowhere dense であるか?
3. その他 $E_\infty(f)$ はどんな集合か?
4. 単位円周上の $f \in S$ の特異点の様子はどのようなものであるか?
5. $f \in S$ の導関数 f' について $E_\infty(f')$ どのようなことが言えるか?

本講では, これらのことに関して現在までに知られていることについて, まとめとし, 報告いたします.

本講で使う基本定理は次の 3 定理である.

定理 A. (Growth Theorem, [4], p33)

任意の $f \in S$ に対して, 次の式が成り立つ

$$\frac{r}{(1+r)^2} \leq |f(z)| \leq \frac{r}{(1-r)^2} \quad (|z| = r < 1).$$

定理 B. (Distortion Theorem, [4], p.32)

任意の $f \in S$ に対して, 次の式が成り立つ.

$$\frac{1-r}{(1+r)^3} \leq |f'(z)| \leq \frac{1+r}{(1-r)^3} \quad (|z| = r < 1).$$

定理 C. (Prawitz's Theorem; [4], p.61, Th.2.22)

$f \in S$ とする. p ($0 < p < \infty$) に対して, 次の式が成り立つ.

$$M_p^p(r, f) \leq p \int_0^r \frac{1}{t} M_\infty^p(t, f) dt \quad (0 < r < 1)$$

ここで, $f \in H$ に対して,

$$M_p(r, f) := \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^p d\theta \right\}^{\frac{1}{p}} \quad (0 < p < \infty),$$

$$M_\infty(r, f) := \max_{|z|=r} |f(z)|.$$

§2 Radial limits of univalent functions

定理 1. (定理 C の系)

$S \subset H^p$ ($p < 1/2$) (Hardy 空間).

従って, この定理から, $E_\infty(f)$ の測度は 0 である.

補題. ([4], p.157)

$f \in S$ に対して, 次の式が成り立つ.

$$\lim_{r \rightarrow 1-0} (1-r)^2 M_\infty(r, f) = \alpha \leq 1.$$

(この α を f の Hayman index という).

証明 f の Growth theorem によって, 次の式が得られる ([4], p.35).

$$\frac{1-r}{1+r} \leq \left| \frac{zf'(z)}{f(z)} \right| \leq \frac{1+r}{1-r} \quad (|z| = r < 1).$$

(等式は Koebe 関数の回転のときである). f が Koebe 関数の回転でなければ,

$$\frac{\partial}{\partial r} \log |f(re^{i\theta})| \leq \left| \frac{f'(re^{i\theta})}{f(re^{i\theta})} \right| \leq \frac{1+r}{(1-r)r}$$

が成り立ち, r_1 から r_2 ($0 < r_1 < r_2 < 1$) まで積分すると,

$$\log \left| \frac{f(r_2 e^{i\theta})}{f(r_1 e^{i\theta})} \right| \leq \int_{r_1}^{r_2} \frac{1+r}{(1-r)r} dr = \log \frac{r_2(1-r_1)}{r_1(1-r_2)^2}.$$

言い換えると, $0 < r_1 < r_2 < 1$ に対して

$$(2.1) \quad \frac{(1-r_2)^2}{r_2} |f(r_2 e^{i\theta})| < \frac{(1-r_1)^2}{r_1} |f(r_1 e^{i\theta})| \text{ for } \forall \theta.$$

θ を, $|f(r_2 e^{i\theta})| = M_\infty(r_2, f)$ なるように選ぶ. そうすると,

$$\frac{(1-r_2)^2}{r_2} |M_\infty(r_2, f)| < \frac{(1-r_1)^2}{r_1} |f(r_1 e^{i\theta})| \leq \frac{(1-r_1)^2}{r_1} M_\infty(r_1, f).$$

これは, $r^{-1}(1-r)^2 M_\infty(r, f)$ は r の減少関数であるから, 極限值 $\alpha \geq 0$ を持つ. また, Growth theorem によって,

$$\frac{(1-r_1)^2}{r_1} M_\infty(r_1, f) \leq 1$$

であるから, $\alpha \leq 1$ が導かれる. f が Koebe 函数ならば, 任意の r に対して, 上の不等式において, 等号が成り立つ. 従って, $\alpha = 1$. f が koebe 函数でなければ, 不等号 ($<$) が成り立つ. よって, 補題が成り立つ.

定理 2. ([4], p.158, Th.5.4)

$f \in S$ が Hayman index $\alpha > 0$ ならば, 次の様なただ一つの方法 $e^{i\theta}$ がある, 即ち,

$$(2.2) \quad \lim_{r \rightarrow 1-0} (1-r)^2 |f(re^{i\theta})| = \alpha.$$

証明. $r_n \uparrow 1$ ($n = 1, 2, \dots$) とし, $\theta_n (0 \leq \theta_n < 2\pi)$ を

$$|f(r_n e^{i\theta_n})| = M_\infty(r_n, f)$$

とする. そうすると, 補題の (2.1) によって, $\forall r < r_n$ に対して

$$\alpha \leq \frac{(1-r_n)^2}{r_n} |f(r_n e^{i\theta_n})| \leq \frac{(1-r)^2}{r} |f(re^{i\theta_n})|.$$

$\{\theta_n\}$ の集積点を θ_0 とすると

$$\alpha \leq \frac{(1-r)^2}{r} |f(r_n e^{i\theta_0})| \leq \frac{(1-r)^2}{r} M_\infty(r, f).$$

$r \rightarrow 1$ とすると, $((1-r)^2/r)M_\infty(r, f) \rightarrow \alpha$ だから, (1) 式が導かれる. θ_0 の一意性は Lebedev の不等式 ([4], p.125, Th. 4.3) から導かれる.

[注] (1) 定理 2 は $\mathbb{C}^n$ の単位球の単葉星型写像に対しても成り立つが, θ_0 の一意性は成り立たない. また, 一般の単葉写像については, 定理 2 は成り立たない.

(2) $\text{cap}_\alpha E_\infty(f) = 0$ ($f \in S, \alpha = 0, 1$) かどうかはわからない.

§3 単葉関数 f の導関数 f' の境界挙動

次の定理 3 の証明は $f'(z)$ が normal であるという事実による. 正則関数 $g(z) \in H$ が normal であるとは

$$\sup_{z \in \mathbb{U}} \frac{1 - |z|^2 |g'(z)|}{1 + |g(z)|^2} < \infty$$

となるときである.

定理 3. ([6], p.116, Th.1)

$f \in S$ とする. $f'(z)$ が analytic limits を持つ様な単位円周上の点の集合は非可算である.

証明. $f'(z)$ は $\mathbb{U}$ 上で, normal であるから, $\partial\mathbb{U}$ 上の dense な集合上で radial limit を持つ. さらに, $f'(z)$ が $\partial\mathbb{U}$ 上の測度 0 の dense な集合において radial limit をもつ場合に制限しない. $\mathbb{U}$ で $f'(z) \neq 0, \infty$ であるから任意の自然数 n に対して開集合 $H_n := \{z \mid |f'(z)| < 1/n\}$ の全集合 G_n は単連結である. さらに, ∂G_n と $\partial\mathbb{U}$ との共通部分 M は空ではない. いま, $M = M_a \cup M_i$ とおく, ここで M_a は G_n から accessible である様な M の点全体とし, M_i を G_n から accessible でない点の集合とする. $z = g(t)$ を $\{|t| < 1\}$ から G_n への等角写像とすると, $g(t)$ の radial limit は $|t| = 1$ 上ほとんど到るところ存在する. ゆえに, $|t| < 1$ のほとんどすべての半径は G_n の accessible な境界上に移される. 言い換えると, G_n の非 accessible な境界点は $|t| = 1$ 上の測度 0 の集合に対応するから, 集合 M_i は G_n に関して調和測度 0 の集合である. ここで, 領域 G_n に Fatou の定理 ([11], p.139) を適用して, M_a は linear measure 0 であることがわかる. また, Carleman の原理により, M_a は G_n に関して harmonic measure 0 の集合である. 故に, $M = M_a \cup M_i$ は harmonic measure 0 の集合である. また, G_n は H_{n+1} の少なくとも一つの連結成分をふくむ. 従って, 与えられた連結成分から始まり, 連結成分列

$$G_n \subset G_{n+1} \subset \cdots$$

が得られる. そして, それらの終点が $|z| = 1$ 上にある折線 L がとれ, 折線 L に沿って $f'(z)$ が 0 に収束するようにできる. そして, 路 L の終点 E は一点になる. 次に, G_n の任

意の連結成分を再び G_n と書き, $z = g(t)$ を $|t| < 1$ から単連結領域 G_n への等角写像とする. M を $|z| = 1$ と ∂G_n との共通部分とすると, M は G_n に関して, harmonic measure 0 の集合で, $|f'(z)|$ は, $|z| < 1$ 内の ∂G_n のすべての点で, 絶対値 $1/n$ であるから, 函数 $F(t) := nf'(g(t))$ は $|t| < 1$ で正則, 有界であり, $|F(t)| < 1$ である. また, $|t| = 1$ 上ほとんど到るところ絶対値 1 の radial limit を持つ. また, $|t| < 1$ で $F(t) \neq 0$ だから, 次の表現を得る.

$$(3.1) \quad F(t) = \exp \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{i\xi} + t}{e^{i\xi} - t} d\mu(\xi) + i\alpha \right\}.$$

ここで, $\mu(\xi)$ は $\mu'(\xi) = 0$ a.e である単調非増加函数で, α は実定数である. このとき, $\mu(\xi)$ の特異点の集合は完全集合である. なぜならば, $\mu(\xi)$ の特異点の集合が完全でないとすると, $\mu(\xi)$ は少なくとも一つの孤立特異点を持つ. これを $\xi = 0$ とする. いま, $|t| < 1$ の半径に沿って, 点 $t = 1$ まで, t を動かすと,

$$(3.2) \quad |F(t)| = O \left\{ \exp \left(\frac{|t| + 1}{|t| - 1} \right) \right\}.$$

$z = g(t)$ によって, この半径は $f'(z)$ が 0 に収束するものに沿った $|z| = 1$ 上の点 P を終点とする G_n 内の路に onto に写される. そして, $f'(z)$ は normal であるから, P の Stolz 角領域において, $f'(z)$ は一様に 0 に収束する. いま, $F(t) = nf'(z)g'(t)$ に Koebe の歪曲定理を適用して, (3.2) によって与えられた速さで $|f'(z)g'(t)|$ は 0 に収束しない. 故に, $\mu(\xi)$ は孤立特異点を持たない. 「連続, 非定数, 特異函数 (singular function) は非可算集合上で ∞ となる導関数を持つ」 (これは良く知られているらしい?). これより非可算集合 A 上で $\mu'(\xi) = -\infty$. 半径 r に沿って, この集合 A の任意の点に結ぶと, $F(t)$ は 0 に近づく. $z = g(t)$ によるこれらの半径の像は, $f'(z)$ が 0 に収束する路に沿って $|z| = 1$ 上の点に終わる G_n 内の路である. 故に, $f'(z)$ の analytic limit として, 0 をとる. $|z| = 1$ 上の点集合は非可算である. したがって, 定理が成り立つ

Q.E.D.

[注] $f \in H$ とする. f が analytic limit $a \in \mathbb{C}$ at $\xi \in \partial U$ を持つとは, ξ における任意の Stolz 角領域 Δ に対して

$$f(z) \rightarrow a \text{ as } z \rightarrow \xi, z \in \Delta$$

となることである.

さらに, 次の定理が成り立つ:

定理 4. ([6], p.118, Th.2)

$f \in S$ とし, $f'(z)$ が ∂U 上の測度 0 の集合上でのみ radial limit values を持つとする. そうすると, ∂U の任意の点は, $f'(z)$ が radial limit として 0 を持つ ∂U 上の点集合上の集積点である.

定義. 点列 $\{z_k\} \subset U$ が函数 $g \in H$ の α -values ($\alpha \in \mathbb{C}$) であるとは, $g(z_k) = \alpha$ となるときである.

α -values の列 $\{z_k\}$ が Blaschke 条件をみたすとは

$$\sum_{k=1}^{\infty} (1 - |z_k|) < \infty$$

となるときである.

定理 5. ([6], p.119, Th.3)

$f \in S$ とし, $f'(z)$ が ∂U 上の測度 0 の集合上でのみ radial limit values を持つとする. $\alpha \in \mathbb{C}$ とし, 点列 $\{z_k\}$ が $f'(z)$ の α -values で, Blaschke 条件をみたすとする. このとき, α は ∂U の任意の弧上で $f'(z)$ の analytic limit values である.

また, 問題 (5) に関連して,

定理 6. ([3], p.592)

次の様な函数 $f(z) \in H$ と集合 $E \subset \partial U$ が存在する. すなわち, E は正の logarithmic capacity を持ち, $e^{i\theta} \in E$ に対して

$$\lim_{r \rightarrow 1-0} (1-r)^{\frac{1}{2}} |f'(re^{i\theta})| = \infty.$$

定理 7. ([3], p.364)

$\lambda > 0$ に対して, 次の様な $A_\lambda > 0$ がとれる. すなわち, $f \in H$ ならば

$$\int_0^{2\pi} \left| \log |f'(re^{i\theta})| \right|^\lambda d\theta \leq A_\lambda \left(\log \frac{1}{1-r} \right)^{\frac{\lambda}{2}}.$$

定理 8. ([3], p.366)

次の条件 (1), (2) を満たす $f \in H$ が存在する. すなわち,

$$(3.1) \quad \int_0^{2\pi} \left| \log^+ |f'(re^{i\theta})| \right|^\lambda d\theta \geq B_\lambda \left(\log \frac{1}{1-r} \right)^{\frac{\lambda}{2}},$$

$$(3.2) \quad \int_0^{2\pi} \left| \log^- |f'(re^{i\theta})| \right|^\lambda d\theta \geq B_\lambda \left(\log \frac{1}{1-r} \right)^{\frac{\lambda}{2}}.$$

ここで, $0 \leq r < 1, \lambda > 0, B_\lambda > 0$.

定理 9. ([3], p.368)

$f \in S$, $\gamma > 1/2$ ならば, ほとんどすべての θ に対して

$$\lim_{r \rightarrow 1-0} \frac{\log |f'(re^{i\theta})|}{(\log \frac{1}{1-r})^\gamma} = 0.$$

定理 3~9 が $\mathbb{C}^n$ の単位球の正則単葉写像に拡張できるかどうかはわからない. また, 特に星型写像にどうかもわからない.

単葉函数の境界挙動について, まとまった本としては Pommerenke[11] であり, 種々の事実が述べられているが, まだまだ不明な点もある. また, 本講で述べなかった用語, 定義については Pommerenke の本を参照していただきたいと思います. また, capacity, linear measure については Hayman[5] の本が有用である.

参考文献

- [1] F.Baugemihl and W.Seidel, Some properties of analytic functions, *Math. Zeits.*, **61**(1954), 186-199.
- [2] A.Beurling, Ensembles exceptionnels, *Acta Math.*, **72**(1940), 1-13.
- [3] J.G.Clunie and T.H.MacGregor, Radial growth of the derivative of univalent functions, *Comm. Math. Helv.*, **59**(1948), 362-375.
- [4] P.Duren, Univalent Functions, Springer-Verlag (1983).
- [5] W.K.Hayman and P.B.Kennedy, Subharmonic Functions, I, Academic Press(1976).
- [6] A.J.Lohwater, The boundary behavior of derivatives of univalent functions, *Proc. Math. Zeits*, **119**(1971), 115-120.
- [7] A.J.Lohwater and G.Piranian, On the derivative of a univalent functions, *Proc. A.M.S.*, **4**(1953), 591-594.
- [8] A.J.Lohwater, G.Piranian and W.Rudin, On the derivative of a schlicht function, *Math. Scand.*, **3**(1955), 103-106.
- [9] T.H.MacGregor, Radial growth of a univalent function and its derivative off sets of measure zero, *Contemporary Math.*, **38**(1985), 65-96.
- [10] R.Nevanlinna, Eindeutige Analytische Funktionen, Springer-Verlag (1936).

- [11] Ch.Pommerenke, Boundary Behaviour of Conformal Maps, Springer-Verlag (1992).
- [12] W.Seidel and J.L.Walsh, On the derivatives of functions analytic in the unit circle and their radii of univalence and p -valence, *Trans. A.M.S.*, **52**(1942), 128-216.