

# 児童期における比例概念の理解

—— 発達の諸モデルの検討 ——

藤 村 宣 之

Children's Understanding of the Proportionality Concept

—— An Examination of Developmental Models ——

FUJIMURA Nobuyuki

比例概念 (proportionality concept) に関する子どもの理解については、1950-60年代の Piaget らによる研究以降、認知発達ならびに数学教育の分野において研究が進められ、様々なモデルが提起されてきた。本稿では、比例概念の理解に関する諸モデルについて検討を行い、さらにそれらを統合したモデルの構築に向けての研究課題について考察する。

## I. 比例概念の理解に関する諸モデル

### 1. Piaget 派の発達モデル

Piaget は、比例概念の発達が論理操作構造の発達に裏づけられるとの仮説のもとに、比例に関する広範な実験を行った。天秤や写影 (Inhelder & Piaget, 1955), 速度 (Piaget, 1946), 確率 (Piaget & Inhelder, 1951), 車輪の大きさと走行距離の関係 (Piaget et al., 1968) などに関する実験結果から、Piaget らは、比例に関する諸概念が、形式的操作構造の成立と同時に11, 12歳以降に出現すると結論づけた (Piaget & Inhelder, 1966; Piaget, 1970)。

比例に関する実験課題のタイプとして主に用いられたのは、調整課題 (adjustment task: 例えば天秤をつりあわせるにはどのように重りを配置すればよいかを問う課題) であった。そして課題に対する子どもの言語的説明をもとに、その発達段階が同定された。数種類の課題を実施し比例概念の発達を詳細に検討した Inhelder & Piaget (1955) の記述から、比例概念の発達段階を整理すると次のようになる。

段階Ⅰ A (3-5歳): 行為と外的過程の未分化

段階Ⅰ B (5-7歳): 1つの次元の役割の認識

段階Ⅱ A (7, 8歳): 1つまたは2つの次元の役割の認識

段階Ⅱ B (9, 10歳): 2つの次元の定性的対応 (correspondance qualitative)

段階Ⅲ A (11, 12歳): 計量的比例 (proportion métrique) に関する法則の発見

段階Ⅲ B (13歳-)：計量的比例に関する法則の説明，一般化

なお論理操作構造との関連では，段階Ⅰ A、Ⅰ Bは前操作期，段階Ⅱ A、Ⅱ Bは群性体構造に特徴づけられる具体的操作期，段階Ⅲ A、Ⅲ BはINRC群に特徴づけられる形式的操作期にそれぞれ対応する。

以上より，比例概念に関するPiaget派の発達モデルは次のように整理される。なお，1)は対象とした領域，2)は仮定された段階やルール（方略），3)は背景となる構造や領域差への言及，4)は定性的推理や定量的推理の出現年齢，5)は用いられた実験課題のタイプ，6)は段階やルールの同定方法を示す。（以降のモデルについても同様である。）

- 1) 天秤，写影，速度，確率等を下位の領域とした。
- 2) 幼児期から児童期を経て青年前期に至る領域一般的な6つの発達段階が仮定された。
- 3) 比例概念の発達を規定する構造として，論理操作構造が想定された。
- 4) その構造との関連で，10歳までは定性的（qualitative）推理の段階にあり，11，12歳以降に，比や割合などの算出にもとづく計量的あるいは定量的（quantitative）比例が適用されるとした。
- 5) 実験課題には調整課題が主に用いられた。
- 6) それに対する子どもの言語的説明から，操作的に6つの発達段階が同定された。

## 2. 認知発達研究における諸モデル

1970年代以降，認知発達研究において，Piaget派の領域一般性に関する主張（比例概念が領域一般に11，12歳以降に成立すること）や，子どもの言語的説明に依拠した段階同定の方法論の妥当性が議論の対象となった（Flavell, 1971; Brainerd, 1978など）。それを背景に，Piaget派のモデルに代わりうるモデルを提起する立場として，情報処理的アプローチ（information processing approach）や，情報統合的アプローチ（information integration approach）により，比例概念の発達が再検討されるようになった。本節では，Sieglerが提起した情報処理モデルと，WilkeningやSurberが提起した情報統合モデルについて検討を行う。

### (1) 情報処理モデル

比例概念の発達が全体的な論理操作構造に規定されとしたPiagetに対して，Sieglerは子どもの推理がルールに支配されること，そして認知発達は，各領域における，より洗練されたルール（方略）の獲得として特徴づけられることを仮定した。具体的な課題としては，天秤（Siegler, 1976; Siegler, 1981），写影（Siegler, 1981），速度（Siegler & Richards, 1979），確率（Siegler, 1981），水の占有度（Siegler & Vago, 1978）など，Piagetらによる実験とはほぼ同じ領域の課題が，3歳児から大学生に至る被験者を対象に実施された。

実験課題のタイプとしては，比較課題（comparison task：例えば，特定の重りの配置により，天秤は左右どちらに傾くか，あるいはつりあうかを問う課題）が用いられた。Siegler（1981）によれば，三肢選択式の比較課題を用いたのは，多様な領域に適用できる一般性と，多様な年齢に適用できる単純性を追求した結果であり，それによって被験児による言語的説明を不要とし，また反応パターンから特定のエラーが同定できるとした。各課題について6種類の小問が設定さ

れ、小問への正答パターンから、4段階のルールが同定された。

Siegler (1981) の記述より、4段階のルールを整理すると次のようになる。

ルールⅠ：優位次元のみにもとづいて判断する。

ルールⅡ：優位次元の値が等しい時のみ、下位次元を考慮する。

ルールⅢ：両次元を考慮するが、一方で優位次元の値が大きく、他方で下位次元の値が大きい課題に対しては、葛藤を解決する一貫した解法を持たず、当て推量をする (muddle through)。

ルールⅣ：常に両次元を考慮し、それらを組み合わせる適切な公式 (定性的、定量的) により判断する。

これらのルールは、優位次元、下位次元、両次元の組み合わせの順に判断 (処理) が進行する決定樹 (decision tree) によって表現された。また、Siegler (1981) は、Inhelder & Piaget (1955) の記述を引用し、ルールⅠは、Inhelder & Piaget による段階Ⅰに、ルールⅡ、Ⅲは段階Ⅱに、ルールⅣは段階Ⅲにそれぞれ対応すると主張した (実際には、Siegler が引用した Inhelder & Piaget の記述は、段階ⅠB、ⅡA、ⅢBについてのものであった)。

領域間の推理を検討するために、Siegler (1981) は、天秤、写影、確率の各領域についての比較課題を、3、4、5、8、12歳および大学生を対象に実施した。その結果、児童期以降、領域間の推理の一貫性が低下すること、ルールⅠ～Ⅲの適用では天秤、写影課題が確率課題に先行するが、ルールⅣの適用では逆に確率課題が天秤、写影課題に先行することが明らかにされた。また、大学生に至っても天秤、写影課題におけるルールⅣの適用率が30%以下であることが示された。これらの結果をもとに、Siegler は、ルールが高次化し特定の概念 (領域) についての固有な情報を獲得するにつれて、推理は諸概念の構造にしたがって分化すると結論づけた。

このように、比例概念に関する Siegler の情報処理モデルは、ピアジェ派のモデルが示した比例概念の発達領域一般性に関する主張と、子どもの言語的説明のみに依拠する方法論とに対する疑問を背景に提起されたモデルであった。

その特質は、次のように整理できる。

- 1) 天秤、写影、速度、確率等を下位の領域とした。
- 2) 領域固有のルール (方略) についての4段階の高次化が仮定された。
- 3) 領域間のルールを統合するような構造は想定されなかった。
- 4) 定性的推理 (ルールⅢ) や、定量的比例 (ルールⅣ) の出現年齢は領域間で多様であった (天秤、写影課題では大学生でもルールⅢにとどまる場合が多かった)。
- 5) 実験課題としては比較課題が用いられた。
- 6) 操作的には、各小問に対する反応パターンのみから、4段階のルールが同定された。

## (2) 情報統合モデル

Piaget 派の発達モデルに関して、Surber & Gzesh (1984) は、比例概念における2つの次元の間の補償関係の理解と対応のパターン (乗法的統合や加法的統合) とを区別してとらえる必要性を指摘した。また Siegler による情報処理モデルに関して、Wilkening & Anderson (1982) は、2つの次元の情報の統合はルールⅣにおいて、モーメント (重りの数×支点からの距離) として

考えられているに過ぎず、ルールⅡ、Ⅲに対応する段階での情報統合の可能性が考慮されていない点を指摘した。以上のような先行モデルの検討をもとに、Wilkening や Surber らによって提起されたモデルが情報統合モデルである。

情報統合モデルでは、異なった種類の情報は代数的統合ルールによって統合されること、特に比例概念の場合、2つの次元の情報が、加法的統合ルールまたは乗法的統合ルールによって統合されることが仮定された。その仮定のもとに、Wilkening & Anderson (1982) や Surber & Gzesh (1984) は天秤について、Wilkening (1981) は速度について、5歳児から大学生までを対象とした実験を行った。

実験課題のタイプとしては、調整課題（例えば、天秤をつりあわせるには片方の重りを支点からどれだけの距離に置けばよいかなどを問う課題）が用いられた。Piaget が用いた調整課題は、例えば天秤の場合、調整する重りの数や重りの移動の仕方にほとんど制約が加えられていない課題であった。これに対して、情報統合アプローチが用いた調整課題では、一方の側の重りの数 ( $w_L$ ) と支点からの距離 ( $d_L$ ) が一定の値をとる場合に、天秤をつりあわせるには、他方の側の一定の重り ( $w_R$ ) を支点からどれだけの距離に置けばよいか ( $d_R$ ) を予測させた。そして、 $w_L$  と  $d_L$  を独立変数として小問間で組織的に変化させたときの子どもの数的反応（距離の値： $d_R$ ）について、分散分析を行うことにより4つのルールを同定した。

Wilkening & Anderson (1982) の記述によれば、4つのルールは次のように整理できる。

重りルール：重りの数のみに着目

距離ルール：支点からの距離のみに着目

加法ルール：重りと距離を加法的に統合 ( $aw_L + bd_L = aw_R + bd_R$ )

乗法ルール：重りと距離を乗法的に統合 ( $aw_L \times bd_L = aw_R \times bd_R$ )

ここで、 $w$  は重りの数、 $d$  は支点からの距離、 $L$  は天秤の左側、 $R$  は天秤の右側を表す。また、 $a$  は重りに対する主観的重みづけを、 $b$  は距離に対する主観的重みづけを、そして  $d_R$  は、調整された距離の値を示す。先の分散分析によって、重り ( $w_L$ ) の主効果のみが有意である場合に重りルール、距離 ( $d_L$ ) の主効果のみが有意である場合に距離ルール、重り ( $w_L$ ) の主効果と距離 ( $d_L$ ) の主効果がともに有意であり、重りと距離の交互作用が有意でない場合に加法ルール、重りと距離の交互作用が有意である場合に乗法ルールと同定された。なお方略の内容面では、重りルールと距離ルールは、Siegler によるルールⅠ、Ⅱにそれぞれ対応し、また、乗法ルールで  $a = b = 1$  の場合がSiegler によるルールⅣに対応すると考えられる。

Wilkening & Anderson (1982) は、天秤に関する調整課題と、Siegler が用いたタイプの比較課題を、6、9、12歳児および成人、計46名に対して実施した。その結果、比較課題での反応を情報処理モデルで分析した際にルールⅡ、Ⅲに同定された者(31名)のうち61% (19名)が、調整課題での反応を情報統合モデルで分析した場合には加法ルールまたは乗法ルールに分類された。

また、Surber & Gzesh (1984) は、天秤に関する調整課題を5、7、10、13歳児および大学生に対して実施し、各年齢群の全般的な傾向を検討した結果、大学生は全般的に乗法ルールを用いるが、13歳以下では平均すると乗法ルールが用いられていないことが示された。

Wilkening や Surber によって提起された情報統合モデルは、Piaget 派のモデルの段階ⅡBにお

ける定性的な推理や、情報処理モデルにおけるルールⅢについて、2次元の情報を統合する観点から再検討を行い、統合ルールの適用の点で、段階ⅢA、ⅢBにおける定量的推理やルールⅣとの連続性を強調したモデルであった。

その特質は、次のように整理できる。

- 1) 天秤、速度を下位の領域とした。
- 2) 2つの1次元のルールと加法統合ルール、および乗法統合ルールの4段階のルールの高次化が仮定された。
- 3) 領域間の関連には特に言及されなかった。
- 4) 定量的な加法ルールや乗法ルールの適用は児童期からみられ、天秤課題では大学生で乗法ルールの適用が多いことが示された。
- 5) 実験課題としては、一定の刺激布置に対する数的反応を求める点で比較的制約の大きい調整課題が用いられた。
- 6) 課題への数的反応を従属変数とした分散分析により、4種類のルールが同定された。

### (3) 認知発達研究における諸モデル——まとめ

情報統合モデルは、実験課題として調整課題を適用し、数的反応を分析指標とすることにより、情報処理モデルが過小評価していたコンピテンス（ルールⅢ段階における定量的推理）を引き出している点に一定の成果がみられる。特に加法ルールについての指摘は、Sieglerが示した4段階のルールにはみられなかった点である。しかしながらFerretti et al. (1985)が示したように、加法ルール等の同定は、比較課題において反応パターンを分析することによっても可能である。今後、比較、調整課題間で、同一基準にもとづくルール（方略）の関連を検討することが課題であろう。

情報処理モデルは比較課題における三肢選択のパターンを、情報統合モデルは調整課題における数的反応のパターンを、それぞれ分析の指標とすることにより、Piaget派が用いた分析手法（言語的説明に依拠した分析）を、より客観的で量的分析に適するものとした。その一定の成果は認める一方で、両モデルの前提を再吟味することは必要であろう。すなわち情報処理モデルと情報統合モデルはともに、被験者が課題内の全小問に対して一貫したルールを適用する（例えば、ルールⅡや加法ルールを一貫して適用する）ことを前提としていた。次節で詳しく扱うが、同じタイプの小問でも数的関係が整数倍、非整数倍のように異なる場合には、適用ルールが小問間で変化することもありうる。この点からも、一貫したルール適用に関する両モデルの前提を、再度検討し、反応パターンに加えて被験児による理由づけも対象とするような分析方法を考案することも必要であると考えられる。

また、領域の効果に関して、Piaget派のモデルは調整課題の結果をもとに領域一般性を主張したのに対して、情報処理モデルは比較課題の結果をもとに領域固有性を主張した。比例概念の発達における領域の効果の厳密に検討するためには、複数の領域についての比較課題と調整課題を同時に実施した後に、結論を導くことが求められるであろう。

### 3. 数学教育研究における諸モデル

前節では、ルールや方略の発達に焦点をあてた認知発達研究が、Piaget 派のモデルに代わるものとして提起した2つのモデルについて検討を行った。

比例概念は、一方で、算数・数学教育においても指導の重要性が指摘されてきた内容の1つであり、それを扱った Piaget 派のモデルは、数学教育研究の分野でも、1960年代以降、検討がなされてきた。

Lovell & Butterworth (1966) は、天秤や写影など Inhelder & Piaget (1955) が用いた課題についての追試を行い、形式的操作段階と判断されるのは、15歳児でも半数以下であることを示した。また、Lunzer & Pumfley (1966) は、6～15歳児80名に対して、天秤等の課題を実施し、1:1, 2:1, 3:1の比を含む問題が他の比を含む問題よりも容易であること、全年齢において繰り返し加法を用いた解法がみられることを明らかにした。これらの研究は、Piaget 派のモデルが示した比例概念が必ずしも11, 12歳頃に成立しないことを示す一方、数的な関係によって比例課題の難易度が異なり、特定の方略を用いた解決は11, 12歳以前でも可能なことを主張したものであった。

1970年代には、Karplus を中心とした California 大学の研究グループが、比例的推理 (proportional reasoning) についての研究を行った。Karplus et al. (1974) は、数的比率に関する調整課題であるクリップ課題<sup>1)</sup>を実施した。Karplus らによれば、Piaget が用いた天秤や写影などの課題は比例に関する理解に加えて、物理法則についての知識を必要とする課題であり、できる限り物理学的内容を排除し、比例的推理のみを測定するためにこのクリップ課題が考案された。4, 6, 8, 12年生に対する実験の結果、子どもの推理 (方略) は4つのカテゴリー (直観的, 加法的, 過渡的, 比例的) に分類され、方略の適用に学年差がみられた。また、Wollman & Karplus (1974) も同種の課題を実施し、1:2の比の適用は2:3の比の適用よりも容易であることなどを示した。

これら一連の研究は、数的関係の推理への影響や、課題に対する方略の多様性に着目し、Piaget の研究を発展させたものである。次に、これらの研究を背景として考案された3つのモデルについて検討を行う。

#### (1) Noelting の発達モデル

Noelting (1980a) は、比 (ratio) の概念の発達には、課題を限定した場合に階層的段階が存在することを仮定し、オレンジジュースと水の混合を題材とした濃度の比較課題を、6～16歳、計321名を対象に実施した。そして数的関係の多様な25種類の小問を、その正答率により以下の8段階 (0, I A～C, II A・B, III A・B) に分類した。

0 : ジュースの有無の同定

I A : ジュースの量の比較

- 
- 1) クリップ課題 (paper clips task) では、まず、背の高さの異なる2人——Mr. Short と Mr. Tall——の絵を呈示し、2人の背の高さがボタン4個分と6個分であることを示した後、Mr. Short の高さをゼムクリップで測らせ——クリップ6個分になる——、Mr. Tall の高さがクリップ何個分になるかを (実測せずに) 予測させた。

I B：ジュースが等しい場合の水の量の比較

I C：ジュースと水の数的関係の比較

II A：(1:1) の同値類の構成

II B：任意の比の同値類の構成

III A：一方の量が整数倍の場合の比較

III B：任意の比についての比較

また小問の内容と子どもの方略から、0～I CがPiagetによる前操作期、II A・Bが具体的操作期、III A・Bが形式的操作期に対応すると主張した。またNoelting (1980b) は、上位の段階が下位の段階を包摂する内容となっており、段階間の移行は、推理が徐々に難しい課題に適用される適応的再構造化 (adaptive restructuring) によって行われるとした。

このモデルの特質は次のように整理できる。

- 1) 濃度のみを下位領域とした。
- 2) 数的関係の差異にもとづく8つの設問段階と、再構造化による段階移行が仮定された。
- 3) 濃度に関する階層的段階のみが構造として想定され、他領域には言及されなかった。
- 4) 定量的比例は、部分的には児童期から適用された (II Aの50%通過年齢は、8:1歳)。
- 5) 実験課題には比較課題が用いられた。
- 6) 操作的には、各段階の小問に対する正答 (理由づけを含む) から、その子どもの段階と方略が同定された。

Noelting のモデルは数的関係による小問の正答率の差から推理の発達段階を操作的に定義したが、濃度という同種の量の比に固有な段階が多く、比例概念の発達モデルとしては、やや一般性に欠けると考えられる。

## (2) Karplus のモデル——推理パターン理論

Karplus (1981) は、1970年代の一連の研究成果にもとづき、推理パターン理論 (reasoning pattern theory) を提唱した。Karplus によれば推理パターンは「ある種の課題に対して遂行される、同定と再生が可能な思考過程」である。比例的推理のほか、命題推理、類推的推理、系列化などがそれぞれ推理パターンを構成する。それらを用いて教師が授業中に生徒の思考過程を分析することが意図された。

各推理パターンには、具体的レベルから形式的レベルへの発達的变化が想定された。比例的推理の場合、比較的小さい整数比 (integer ratio) を含むデータについての推理 (具体的レベル) から、非整数比 (noninteger ratio) を含むデータについての推理 (形式的レベル) への変化が仮定された。これは、1:2 や 1:3 といった整数比を含む状況が比較的年少の児童によって理解可能であるとした研究 (Lunzer & Pumfrey, 1966) や、中学生でも 3:5 や 4:6 などの非整数比を適切に利用しないことを示した研究 (Lovell & Butterworth, 1966; Wollman & Karplus, 1974) に依拠した仮定である。

Karplus et al. (1983) は、比例的推理に関する推理パターン理論を発展させた研究を行った。6, 8年生各60名を対象に、レモネード課題が実施された。これは、レモンジュースと砂糖によって作られたレモネードの甘さを尋ねる一種の濃度課題で、比較課題と調整課題の両タイプの課題

からなる。比較課題の小問のタイプとして、内的比 (within ratio: 一方の側の砂糖とレモンジュースの比)、外的比 (between ratio: 一方の砂糖と他方の砂糖の比) がそれぞれ、整数倍であるか、非整数倍であるか、また比較の結果が等しいか否かにより 8 種類 16 問が設定された。また比較の結果が不等であった場合のみ、調整課題 (同じ濃さにするにはレモンジュースをどれだけ入れるとよいかを問う課題) が実施された。

実験の結果、各課題における反応 (解答に対する理由づけ) が、不完全 (I)、定性的 (Q)、加法的 (A)、比例的 (P) の 4 つのカテゴリーに分類され、調整課題で加法的推理が、比較課題で定性的説明が多くみられることが示された。また内的比と外的比がともに整数倍、またはともに非整数倍であるときには、内的比に着目した方略の適用が多いことが示された。

以上の結果をもとに、Karplus et al. (1983) は比例的推理に関する次のようなモデルを提起した。まず、比例的推理の発達には、①比についての推理 (整数比-非整数比、等-不等) と、②2 種類の比の適用 (内的比と外的比) の 2 次元的性格をもつことが指摘された。①比についての推理に関しては、次の 4 つの認知的要素 (cognitive element) が示された。

1. 等しい整数比の比較、調整
2. 整数比と非整数比の比較
3. 等しい非整数比の比較、調整
4. 非整数比の比較

これらの獲得状況と、Noelting による設問段階や Piaget による発達段階との対応が論じられた (獲得なしが Piaget による段階Ⅱ A に、1. の獲得が段階Ⅱ B に、2. 3. の獲得が段階Ⅲ A に、4. の獲得が段階Ⅲ B にそれぞれ対応する)。また、②2 種類の比の適用に関しては、2. の獲得以降に、内的比と外的比の両者を考慮できる人数が増加することが示された。

次に比例的推理における方略の階層として以下の 3 レベルが提起された。

上位レベル (top level): 適用する推理の決定 (正比例、反比例、加法など)

中間レベル (middle level): 数的比較・結合のタイプの決定 (内的比か外的比)

下位レベル (bottom level): 数的操作の実行

比例的推理の過程では、まず上位レベルの判断がなされ、次に努力の経済性に照らして中間レベルの判断がなされた後、下位レベルが実行されることが仮定された。また、先に述べた 4 つの認知的要素の獲得状況や、努力の経済性により、上位レベルの判断は、例えば、比例から加法的推理などに変更されるとした。

以上の方略の階層や認知的要素から、比較課題の解決過程について、数的関係 (整数比と非整数比、内的比と外的比) を考慮した、決定樹 (decision tree) モデルが提起された。

以上より、Karplus による比例的推理のモデルは次のように整理できる。

- 1) 濃度や数的比率 (クリップ課題) を下位領域とした。
- 2) 整数比と非整数比の区別にもとづく 4 つの認知的要素の獲得と、1 種類の比の適用から 2 種類の比の適用への発達の变化とを仮定した。
- 3) 比例的推理は他の推理パターンとは独立の実体であり、その過程に 3 レベルの方略の階層が仮定されたが、領域間については言及されなかった。
- 4) 定量的比例が適用される年齢は、数的関係 (4 つの認知的要素) により異なった。

- 5) 実験課題としては比較課題に加えて、調整課題が部分的に実施された。
- 6) 操作的には、各課題の小問に対する解答と理由づけから、4つの認知的要素の獲得状況、2種類の比の適用状況、および適用方略が同定された。

### (3) Vergnaud のモデル——測度の同型性

Vergnaud (1983, 1988) は、乗法的構造、加法的構造など、数学的概念が構成する概念領域の分析を通じて、比例に関する1つのモデルを提唱した。その仮定は、比例的推理が、乗法、除法などとともに測度の同型性 (isomorphism of measures) を構成することである。測度の同型性とは、2つの測度空間 (次元) の間の正比例関係に関する認知的構造であり、論理操作などの能力とは独立の総体である。そこでは、同次元内の変換が次元間の変換に比べて容易であること、整数比が非整数比よりも容易であることが仮定された。

Vergnaud (1983) は6-9年生各25名を対象に、時間の変化にともなう消費燃料の変化を問う欠損値課題 (数的反応を求める一種の調整課題) を実施し、同次元内の変換 (スカラー方略: 例えば時間の変化に関する推理) が次元間の変換 (関数方略: 例えば時間と燃料の関係の推理) よりも多用され、それは関数概念の学習後にも依然としてみられることを指摘した。

以上を整理すると、Vergnaud の測度の同型性モデルは次のような特質をもつ。

- 1) 燃料消費率などを下位の領域とした。
- 2) 測度の同型性の成立が、同次元内の変換を容易にすることが仮定された。
- 3) 測度の同型性は、比例的推理以外に乗法や除法を構成要素とする、比較的領域一般的な構造として記述されたが、比例的推理内の領域間の関係については言及されなかった。
- 4) 定量的比例の適用年齢は、同次元内の変換が整数倍か否かなどにより多様であった。
- 5) 実験課題としては欠損値課題 (数的反応を求める一種の調整課題) が用いられた。
- 6) 操作的には、小問に対する解答と理由づけからスカラー方略 (次元内) と関数方略 (次元間) の2種類が同定された。

### (4) 数学教育研究における諸モデル——まとめ

数学教育研究における以上の3つのモデルは、Piaget 派のモデルが比例概念の成立に焦点をあてており、比例的推理を適用する問題の文脈や数的関係を問題としていないこと、また情報処理モデルが定量的な比例に言及するのはルールⅣにおいてのみであり、数の効果等が検討されていないこと (Karplus et al. 1983) への批判を通じて提起されてきた。

それらのモデルが仮定するのは、全般的に漸進的な発達過程である。また、整数比と非整数比、内的比と外的比 (関数方略とスカラー方略) といった数的関係が区別されている点、また児童が行う理由づけから方略の分類を行っている点に他のモデルにはみられない特徴がある。特に Karplus のモデルが提起した方略の階層は、比例概念の理解を、特定の課題に対する推理の過程として分析する方向性を示すものとして重要な指摘であろう。

しかしながら、Noelting のモデルが扱ったのが濃度に固有の推理過程である点、また Karplus や Vergnaud のモデルが対象としたのが、整数倍を理解して以後の過程であり、それ以前の定性的な推理が考慮されていない点に発達モデルとしての問題点があると考えられる。Piaget 派のモ

デルや情報処理モデルが示した定性的な判断やルールとともに、情報統合モデルや Karplus らのモデルが示した統合ルールや諸方略を考慮し、各課題に対する推理の下位過程をモデル化することにより、比例概念の発達に関して、以上 6 つのモデルを統合する方向性が示されるのではないかと考えられる。

## II. 比例概念の理解に関する研究課題

本章では、前章で検討した 6 つのモデルを統合し、新たなモデルを構築するための研究課題について論じる。特に 6 つのモデルの間で方法や主張が異なっていた 3 つの点、すなわち、実験課題のタイプ（調整課題と比較課題）、対象とする推理の内容（定性推理と定量推理）、領域の効果（領域一般性と固有性）を、今後の研究課題として検討する。6 つのモデルとそれら 3 点との対応を TABLE 1 に示す。

TABLE 1 比例概念の理解に関する 6 つのモデル

|                                                  | 1.課題のタイプ                | 2.対象とする推理                                              | 3.領域の効果                            |
|--------------------------------------------------|-------------------------|--------------------------------------------------------|------------------------------------|
| 1. Piaget 派の発達モデル<br>(Inhelder & Piaget, 1955)   | 主に調整課題                  | 定性推理 (段階Ⅱ A, B)<br>↓ <sup>*</sup><br>定量推理 (段階Ⅲ A, B)   | 領域一般的<br>(操作構造の発達に依存)              |
| 2. 情報処理モデル<br>(Siegler, 1981)                    | 比較課題                    | 定性推理 (ルールⅠ～Ⅲ)<br>↓<br>定量推理 <sup>**</sup> (ルールⅣ)        | 領域固有性<br>(各領域でルールが発達)              |
| 3. 情報統合モデル<br>(Wilkening & Anderson, 1982)       | 調整課題                    | 定量推理<br>(加法統合ルール<br>→乗法統合ルール)                          | 明示せず                               |
| 4. Noelting の発達モデル<br>(Noelting, 1980a, b)       | 比較課題                    | 定性推理 (段階 0～Ⅰ C)<br>↓<br>定量推理 <sup>**</sup> (段階Ⅱ A～Ⅲ B) | 明示せず<br>(対象領域が濃度のみ)                |
| 5. Karplus のモデル-推理パターン<br>(Karplus et al., 1983) | 比較課題<br>調整課題<br>(部分的実施) | 定量推理 <sup>**</sup> のみ<br>(整数倍→非整数倍)<br>(1 種類の比→2 種類の比) | 明示せず<br>(推理パターンとしての)<br>(特質は共有する)  |
| 6. Vergnaud のモデル-測度の同型性<br>(Vergnaud, 1983)      | 調整課題                    | 定量推理のみ<br>(整数倍→非整数倍)<br>(スカラー方略, 関数方略)                 | 明示せず<br>(測度の同型性に構造的)<br>(には規定される。) |

\* 矢印 (↓, →) は、発達の変化を表現する。

\*\* 比較課題を用いた研究については、2 次元を組み合わせた演算の結果にもとづき比較判断をおこなう場合を定量推理と表現することとした。

### 1. 調整課題と比較課題

比例概念の理解に関する従来の研究では、調整課題か比較課題のいずれかを実施する場合がほとんどであった。例えば、Piaget 派の研究や情報統合アプローチ、あるいは多くの数学教育の諸研究が主に調整課題（または欠損値課題）のみを実施したのに対し、情報処理アプローチや Noelting ら一部の数学教育の研究では比較課題のみが用いられた。

Karplus et al. (1983) や、Wilkening & Anderson (1982) が示したように、調整課題と比較

課題では、同一被験児が異なった方略やルールを適用することが考えられる。この点から、調整課題における推理と比較課題における推理を区別し、各課題における推理の下位過程をモデル化し、比較検討することが必要であろう。

Karplus のモデルでは、課題の解決過程に、a) 適用する推理の決定、b) 着目する数的タイプの決定、c) 数的操作の実行の3レベルが示された。これを参考に各課題に対する推理の下位過程を仮説的に考察する。まず、調整課題に対する推理には、(1)関係表象過程 (a, b に対応) と(2)求値過程 (c に対応) の2つの下位過程が存在すると考えられる。ここで関係表象過程は、処理すべき1つの数的関係を決定し、定量的または定性的に表象する過程である。また求値過程は、表象された関係にもとづき、求値や調整を行う過程を表す。一方、比較課題に対する推理には、(1)関係表象過程 (a, b に対応) と(2)比較過程 (c に対応) の2つの下位過程が存在すると考えられる。ここで、関係表象過程は、処理すべき2つの数的関係を決定し、定量的または定性的に表象する過程であり、比較過程は、表象された2つの関係について比較を行う過程を示す。例えば、以上のように下位過程をモデル化することが可能ではないかと考えられる。

## 2. 定性推理と定量推理

比例概念に関する推理には、各次元の値の大小関係にもとづき、変化の方向性を推理する定性推理 (qualitative reasoning) と、数値間の演算にもとづき、値を推理する定量推理 (quantitative reasoning) がある。

Piaget 派のモデルでは、調整課題における推理が、定性推理 (段階ⅡB) から定量推理 (段階ⅢA) へと発達的に変化することが仮定された (Inhelder & Piaget, 1955)。

これに対して最近の研究では、定量推理が定性推理を前提として自然に成立するかどうか論点となっている。例えば Moore et al. (1991) は、溶液の混合に関する温度の調整課題を実施した結果、13歳でも定性推理にもとづかず算術演算のみに依拠した定量推理を行う (例えば、2つの溶液の温度をそのまま足し算する) ことを明らかにした。また、Ahl et al. (1992) は、10, 13歳児において定性推理の経験が定量推理を改善することを、Heller et al. (1990) は、定性推理と定量推理の相関が発達的に変化することを示している。

これらの研究は、定性推理が定量推理の単なる発達的前提となるのではなく、両者が相互に独立したシステムとして機能している可能性を示唆している。定性推理を問う課題と定量推理を問う課題を同時に実施することにより、定性推理と定量推理の機能的関連 (相互補完性や独立性) を発達的に検討することが今後の研究課題となるであろう。

## 3. 領域一般性と固有性

Siegler による研究以後、比較課題を用いた研究 (子安, 1981; 藤村, 1990など) では推理の領域固有性が指摘されてきたが、一方で調整課題を用いた研究 (Dean & Frankhouser, 1988) では、天秤、写影、確率の3領域の推理が同レベルとなる時点の存在が示され、Piaget の述べた領域一般性に通ずる主張がなされてきた。これらの主張の差異を吟味するための1つの方法として、1. で試みたように、調整課題における推理の下位過程と比較課題における推理の下位過程を対比的にモデル化し、各下位過程と方略、ルールとの関連を分析することが想定される。それによ

り、領域固有の特性が反映されやすい下位過程と、比較的領域一般的な性質をもつ下位過程とを区別することが可能になるのではないかと考えられる。

以上 1.～3. の課題の実験的検討を通じて、各実験課題における推理の過程を精緻にモデル化することが、I で示した 6 つのモデルを統合し、新たなモデルを構築する 1 つの方向を示すように推察される。

## 文 献

- Ahl, V.A., Moore, C.F., & Dixon, J.A. 1992 Development of intuitive and numerical proportional reasoning. *Cognitive Development*, **7**, 81–108.
- Brainerd, C.J. 1978 The stage question in cognitive-developmental theory. *The Behavioral and Brain Sciences*, **2**, 173–182.
- Dean, A.L., & Frankhouser, J.R. 1988 Way-stations in the development of children's proportionality concepts: The stage issue revisited. *Journal of Experimental Child Psychology*, **46**, 129–149.
- Ferretti, R.P., Butterfield, E.C., Cahn, A., & Kerkman, D. 1985 The classification of children's knowledge: Development on the balance-scale and inclined-plane tasks. *Journal of Experimental Child Psychology*, **39**, 131–160.
- Flavell, J.H. 1971 Stage-related properties of cognitive development. *Cognitive Psychology*, **2**, 421–453.
- 藤村宣之 1990 児童期における内包量概念の形成過程について 教育心理学研究, **38**, 277–286.
- Heller, P.M., Post, T.R., Behr, M., & Lesh, R. 1990 Qualitative and numerical reasoning about fractions and rates by seventh- and eighth-grade students. *Journal for Research in Mathematics Education*, **21**, 388–402.
- Inhelder, B., & Piaget, J. 1955 *De la logique de l'enfant à la logique de l'adolescent*. Presses Universitaires de France. / A. Parsons, & S. Milgram (Trans.) 1958 *The growth of logical thinking from childhood to adolescence*. Basic Books.
- Karplus, R. 1981 Education and formal thought: A modest proposal. In I.E. Sigel, D.M. Brodzinsky, & R.M. Golinkoff (Eds.) *New directions in Piagetian theory and practice*. Lawrence Erlbaum Associates.
- Karplus, E.F., Karplus, R., & Wollman, W. 1974 Intellectual development beyond elementary school IV: Ratio, the influence of cognitive style. *School Science and Mathematics*, **74**, 476–482.
- Karplus, R., Pulos, S., & Stage, E.K. 1983 Proportional reasoning of early adolescents. In R. Lesh, & M. Landau (Eds.) *Acquisition of mathematics concepts and processes*. Academic Press.
- 子安増生 1981 児童における比例概念の発達過程(2)天秤の均衡と確率について 愛知教育大学教科教育センター研究報告, **5**, 227–238.
- Lovell, K., & Butterworth, I.B. 1966 Abilities underlying the understanding of proportionality. *Mathematics Teaching*, **37**, 5–9.
- Lunzer, A.E., & Pumfrey, P.D. 1966 Understanding proportionality. *Mathematics Teaching*, **34**, 7–12.
- Moore, C.F., Dixon, J.A., & Haines, B.A. 1991 Components of understanding in proportional reasoning: A fuzzy set representation of developmental progressions. *Child Development*, **62**, 441–459.
- Noelting, G. 1980a The development of proportional reasoning and the ratio concept: Part I differentiation of stages. *Educational Studies in Mathematics*, **11**, 217–253.
- Noelting, G. 1980b The development of proportional reasoning and the ratio concept: Part II problem-solving strategies and the mechanism of adaptive restructuring. *Educational Studies in*

- Mathematics*, **11**, 331–363.
- Piaget, J. 1946 *Les notions de mouvement et de vitesse chez l'enfant*. Presses Universitaires de France.
- Piaget, J. 1970 *L'épistémologie génétique*. Presses Universitaires de France. / 滝沢武久 (訳) 1972 発生的認識論 白水社.
- Piaget, J., & Inhelder, B. 1951 *La genèse de l'idée de hasard chez l'enfant*. Presses Universitaires de France.
- Piaget, J., & Inhelder, B. 1966 *La psychologie de l'enfant*. Presses Universitaires de France. / 波多野 完治・須賀哲夫・周郷博 (訳) 1969 新しい児童心理学 白水社.
- Piaget, J., Grize, J., Szeminska, A., & Bang, V. 1968 *Épistémologie et psychologie de la fonction. (Études d'Épistémologie Génétique, 23)* Presses Universitaires de France.
- Siegler, R.S. 1976 Three aspects of cognitive development. *Cognitive Psychology*, **8**, 481–520.
- Siegler, R.S. 1981 Developmental sequences within and between concepts. *Monographs of the Society for Research in Child Development*, No. **189**.
- Siegler, R.S., & Richards, D.D. 1979 Development of time, speed, and distance concepts. *Developmental Psychology*, **15**, 288–298.
- Siegler, R.S., & Vago, S. 1978 The development of a proportionality concept: Judging relative fullness. *Journal of Experimental Child Psychology*, **25**, 371–395.
- Surber, C.F., & Gzesh, S.M. 1984 Reversible operations in the balance scale task. *Journal of Experimental Child Psychology*, **38**, 254–274.
- Vergnaud, G. 1983 Multiplicative structures. In R. Lesh, & M. Landau (Eds.) *Acquisition of mathematics concepts and processes*. Academic Press.
- Vergnaud, G. 1988 Multiplicative structures. In J. Hiebert, & M. Behr (Eds.) *Number concepts and operations in the middle grades*. Lawrence Erlbaum Associates.
- Wilkening, F. 1981 Integrating velocity, time, and distance information: A developmental study. *Cognitive Psychology*, **13**, 231–247.
- Wilkening, F., & Anderson, N.H. 1982 Comparison of two rule-assessment methodologies for studying cognitive development and knowledge structure. *Psychological Bulletin*, **92**, 215–237.
- Wollman, W., & Karplus, R. 1974 Intellectual development beyond elementary school V: Using ratio in differing tasks. *School Science and Mathematics*, **74**, 593–613.

(博士後期課程)