

近似的 GCD を用いた連分数展開の ハイブリッド積分への応用

愛媛大学工学部 甲斐博 (Hiroshi Kai)

愛媛大学工学部 野田松太郎 (Matu-Tarow Noda)

1. はじめに

有理関数近似の中でも有理関数補間は、与えられた関数の近似だけでなくデータ列の近似にも有効である。当然、得られた補間は与えた関数値やデータ列の全ての点を通る。しかし、有理関数補間により得られる近似は、近似する関数が近似区間で連続であるにもかかわらず、一般に不必要な特異点を持つ。そこで、有理関数補間の分子と分母の多項式の近似的共通因子を求め、得られた近似的共通因子を近似除算により取り除く操作を行い、不必要な特異点を取り除いた。この方法をハイブリッド有理関数近似 (HRFA) [6] と呼ぶ。このような近似的共通因子を取り除く操作により次数低下した有理関数は、与えた関数値やデータ列の値と一致しなくなる。つまり HRFA による近似は与えられたデータ列について到達不能になる。HRFA により得られた有理関数と与えられたデータ列の値の間のずれを評価するため、本論では最大値ノルムを定義する。

近似的 GCD のアルゴリズムを用いて有理関数補間の Padé 近似を求める方法 [3] をすでに示しているが、同じ手順により連分数展開を得ることができる。本論では、HRFA、近似的 GCD を用いた Padé 近似、近似的 GCD を用いた連分数展開の 3 つの近似を比較し、連分数展開による方法が安定して良い結果を与えることを示す。さらにその応用として近似的 GCD を用いた連分数展開をハイブリッド積分の被積分関数として用いる。従来の HRFA を用いた場合より積分値の絶対誤差が小さくなることを示す。また、我々はハイブリッド積分の計算手順と同じ手順を Cauchy 主値積分の計算に応用する。その場合も、本論の方法が絶対誤差による比較において良い結果を与える事を示す。

2. ハイブリッド有理関数近似

関数 $f(x)$ の実数区間 $[a, b]$ での有理関数補間は次のようにして求める。有限個の離散点列 $x_1 = a < x_2 < \cdots < x_M = b$ を与え、対応する関数値 $f_i = f(x_i), i = 1, \dots, M$ を正確に通る有理関数 $r_{m,n}(x) = N_m(x)/D_n(x) = \sum_{j=0}^m a_j x^j / \sum_{j=0}^n b_j x^j$ を決定する。この有理関数を次数 (m, n) の有理関数と呼ぶ。しかし結果として得られる有理関数は、区間内で連続であるとはいえず、不必要な特異点が存在する。我々は、有理関数補間が不必要な特異点の近傍で零点を持つことを数値的に示した。そこで、有理関数補間の分子と分母の多項式の

近似的共通因子を近似的 GCD 算法により求め、不必要な特異点を取り除く事を行った。
次のように HRFA の計算手順がまとめられる。

入力 : 有限個の点、 $x_1, x_2, \dots, x_M$ と対応する $f_i = f(x_i), i = 1, \dots, M$,
近似的 GCD のための cutoff 値 $\epsilon (0 < \epsilon \ll 1)$

出力 : $(x_1, f_1), (x_2, f_2), \dots, (x_M, f_M)$ を近似する有理関数 $\tilde{r}_{m-l, n-l}(x) = \tilde{N}_{m-l}(x) / \tilde{D}_{n-l}(x)$

方法 :

1. 入力データを近似する (m, n) 有理関数 $r_{m,n}(x)$ を求める。ただし、 $M = m + n + 1$
2. $N_m(x)$ と $D_n(x)$ の精度 ϵ の近似的 GCD $g_l(x)$ を求める。
3. $\tilde{r}_{m-l, n-l}(x) = \tilde{N}_{m-l}(x) / \tilde{D}_{n-l}(x) = \text{quo}(N_m(x), g_l(x)) / \text{quo}(D_n(x), g_l(x))$, を求める。

3. 近似的 GCD と連分数展開の関係

HRFA の手順 3 で、有理関数補間の分子と分母の多項式を近似的 GCD で割った時の剰余を零と見なし、近接根を取り除くことを行った。この点について再考察を行う。

近似的 GCD のアルゴリズムを用いて有理関数補間の Padé 近似を求める方法 [3] をすでに示している。この方法を、本論では近似的 GCD を用いた Padé 近似と呼ぶ。近似的 GCD を用いた Padé 近似の計算手順では、まず変数変換を行い、近似的 GCD の多項式剰余列 (PRS) を求めた。変数変換を行わない場合、Padé 近似の計算手順と全く同じ手順により有理関数補間の連分数展開を得ることができる。具体的には次のようになる。

近似的 GCD の PRS $P_0 = N_m(x), P_1 = D_n(x), \dots, P_L \neq 0$ (cutoff ϵ), $P_{L+1} = 0$ (cutoff ϵ) は、 $P_0 = Q_1 P_1 + M_1 P_2$, $P_1 = Q_2 P_2 + M_2 P_3$, $\dots$, $P_{L-1} = Q_L P_L + M_L P_{L+1} = Q_L P_L$ (cutoff ϵ), と表される。ここで、 Q_i は、 P_{i-1} を P_i で割った時の商、 P_{i+1} は、 P_{i-1} を P_i で割った時の剰余を M_i で割った多項式である。また、 $M_i = \max\{1, \text{mmc}(Q_i)\}$ である。ここで、 $\text{mmc}(Q_i)$ は Q_i の係数のうち、絶対値が最大の係数を表す。近似的 GCD の PRS は次の連分数の形に書くことができる。

$$r_{m,n}(x) = \frac{N_m(x)}{D_n(x)} = Q_1 + \frac{M_1}{Q_2} + \frac{M_2}{Q_3} + \dots + \frac{M_{L-1}}{Q_L} + \frac{M_L P_{L+1}}{P_L}.$$

$P_{L+1}=0$ (cutoff ϵ) より、

$$\tilde{r}_{m-l, n-l}(x) = Q_1 + \frac{M_1}{Q_2} + \frac{M_2}{Q_3} + \dots + \frac{M_{L-1}}{Q_L},$$

が得られる。 $P_L(x)$ が l 次の多項式となる場合、 l 次低下した有理関数を得られる。従って、HRFA の手順 3 のかわりに、連分数展開を用いることができる。本論では、この方法を近似的 GCD を用いた連分数展開と呼ぶ。

4. HRFA と近似的 GCD を用いた連分数近似の比較

HRFA により得られた近似は近似区間に不必要な特異点がないという意味において有理関数補間に比較し良い近似である。有理関数補間はデータ列を正確に通るが、HRFA により得ら

れた近似はサンプル点で「ずれ」を持つ。そこでノルム $\|f(x) - \tilde{r}(x)\| = \max\{|e_1|, \dots, |e_M|\}$ を定義する。ここで、 $e_i = f(x_i) - \tilde{r}(x_i)$, $i = 1, \dots, M$ である。上の式の値が小さいほどサンプル点において良い近似が得られる。次の例題を考える。

例

$f(x) = \sqrt{x+2}$, $x \in [-1, 1]$ を考える。有理関数補間を (6, 6) 有理関数で求めた場合、次の有理関数補間が得られる。

$$\begin{aligned} r_{6,6}(x) &= \frac{N_6(x)}{D_6(x)}, \\ N_6(x) &= -0.0122536660x^6 - 0.315484067x^5 - 2.23667838x^4 \\ &\quad - 5.98017130x^3 - 5.33287136x^2 + 0.750535584x + 1.41421356, \\ D_6(x) &= -0.000987097324x^6 - 0.0754409438x^5 - 0.881579262x^4 \\ &\quad - 3.27520086x^3 - 3.80983670x^2 + 0.280708801x + 1.0. \end{aligned}$$

なお、本節の計算は富士通研究所で開発中の数式処理システム Risa/Asir を用い、浮動小数は 9 桁の精度で行った。得られた有理関数補間の分子と分母の零点を数値計算により求めると、有理関数補間は $x = -0.629$, $x = 0.453$ 近傍に不必要な特異点を持つ。HRFA、近似的 GCD を用いた Padé 近似、近似的 GCD を用いた連分数展開を、それぞれ $\tilde{r}(x)$, $\tilde{r}_p(x)$, $\tilde{r}_c(x)$ と表す。近似的 GCD の精度は $\epsilon = 10^{-4}$ として計算すると、

$$\tilde{r}(x) = \frac{\tilde{N}(x)}{\tilde{D}(x)}, \quad (1)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{-0.00736447510x^4 - 0.188311441x^3 - 1.31323431x^2 - 3.41689029x - 2.97889838}{-0.000593247252x^4 - 0.0452358190x^3 - 0.522045240x^2 - 1.88950649x - 2.10639923} \\ \tilde{r}_p(x) &= \frac{\tilde{N}_p(x)}{\tilde{D}_p(x)} = \frac{-316.238419x^3 - 5064.47390x^2 - 20269.5809x - 23174.3215}{-31.9231846x^3 - 1534.18931x^2 - 10236.0781x - 16386.7199}, \quad (2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{r}_c(x) &= \frac{\tilde{N}_c(x)}{\tilde{D}_c(x)} \quad (3) \\ &= \frac{-0.00736447510x^4 - 0.188311441x^3 - 1.31323431x^2 - 3.41689028x - 2.97889832}{-0.000593247252x^4 - 0.0452358190x^3 - 0.522045240x^2 - 1.88950649 - 2.10639921} \end{aligned}$$

となる。 $\tilde{r}(x)$, $\tilde{r}_p(x)$, $\tilde{r}_c(x)$ には不必要な特異点はない。サンプル点でのノルムを計算すると、 $\|f(x) - \tilde{r}(x)\| = 3.2 \times 10^{-8}$, $\|f(x) - \tilde{r}_p(x)\| = 8.9 \times 10^{-6}$, $\|f(x) - \tilde{r}_c(x)\| = 6.7 \times 10^{-10}$, となる。Padé 近似を用いた場合、変数変換のため他の近似とはふるまいが異なり、得られる有理関数の次数が小さい。その結果ノルムの値が大きくなると考えられる。本論で述べた連分数展開は HRFA と Padé 近似と比較しノルムの値が小さく良い近似が得られている。

次に、 (i, i) 有理関数 $i = 4, \dots, 10$ を求めた時、得られる近似の次数とノルムの値を調べる。Table 1. は HRFA、近似的 GCD を用いた Padé 近似、近似的 GCD を用いた連分数近似のそれぞれの次数およびノルムを表す。近似的 GCD の精度は $\epsilon = 10^{-4}$ として計算した。近似的 GCD を用いた Padé 近似は、この場合も変数変換のため近似的 GCD のふるまいが大きく異なり、得られる近似の次数が小さく、ノルムの値も大きい。また、Padé 近似では不必要な特異点を取り除けない場合があり、表中の次数に*の印のある近似は不必要な特異

Table 1. HRFA の誤差

補間	HRFA		Padé 近似		連分数展開	
次数	次数	ノルム	次数	ノルム	次数	ノルム
(4, 4)	(4, 4)	$3.5 \cdot 10^{-10}$	(2, 2)	$3.0 \cdot 10^{-4}$	(4, 4)	$3.5 \cdot 10^{-10}$
(5, 5)	(5, 5)	$6.2 \cdot 10^{-10}$	(2, 2)	$3.0 \cdot 10^{-4}$	(5, 5)	$6.2 \cdot 10^{-10}$
(6, 6)	(4, 4)	$3.2 \cdot 10^{-8}$	(3, 3)	$8.9 \cdot 10^{-6}$	(4, 4)	$6.7 \cdot 10^{-10}$
(7, 7)	(4, 4)	$7.3 \cdot 10^{-8}$	(3, 3)	$7.9 \cdot 10^{-6}$	(4, 4)	$5.0 \cdot 10^{-10}$
(8, 8)	(4, 4)	$3.1 \cdot 10^{-6}$	*(4, 4)	$3.9 \cdot 10^{-6}$	(4, 4)	$2.1 \cdot 10^{-8}$
(9, 9)	(5, 5)	$5.7 \cdot 10^{-5}$	*(4, 4)	$1.0 \cdot 10^{-5}$	(5, 5)	$6.2 \cdot 10^{-10}$
(10, 10)	(4, 4)	$2.7 \cdot 10^{-6}$	(3, 3)	$1.0 \cdot 10^{-5}$	(4, 4)	$4.8 \cdot 10^{-9}$

点を取り除けない近似を示す。連分数近似を用いて改良された HRFA のサンプル点でのノルムの値の大きさは $10^{-8} \sim 10^{-10}$ であり、単に剰余を無視して除算を行うよりずれが安定して小さい。

ここで、近似的 GCD を用いた連分数展開のずれと HRFA のずれに関して考察を与える。得られた近似的 GCD $g(x)$ が 1 次の場合を考える。ここで、

$$r_{m,n}(x) - \tilde{r}_{m-1,n-1}(x) = \frac{N_m(x)\tilde{D}_{n-1}(x) - D_n(x)\tilde{N}_{m-1}(x)}{D_n(x)\tilde{D}_{n-1}(x)} = \frac{A(x)}{D_n(x)\tilde{D}_{n-1}(x)}.$$

である。連分数展開を用いた場合 $g(x)$ が 1 次多項式なので $A(x)$ は定数になる。 $A(x)$ は次のように評価できる。 $N_m(x), D_n(x)$ が、 $N_m(\xi) = 0, D_n(\eta) = 0$ であり、 $|\xi - \eta| = \epsilon_1$ となる近接根 $\xi, \eta \in [-1, 1]$ を持つとする。 A の絶対値は、

$$|A| = |D(\xi)\tilde{N}_{m-1}(\xi)| \approx \epsilon_1 |D'(\eta)| |\tilde{N}_{m-1}(\xi)|$$

または、

$$|A| = |N(\eta)\tilde{D}_{m-1}(\eta)| \approx \epsilon_1 |N'(\xi)| |\tilde{D}_{m-1}(\eta)|$$

と表される。

一方、HRFA の場合、 $N_m(x) = \tilde{N}_{m-1}(x)g(x) + \Delta N, D_n(x) = \tilde{D}_{n-1}(x)g(x) + \Delta D$ と表される。ここで、 $\tilde{N}_{m-1}(x)$ は $N_m(x)$ を $g(x)$ で割った時の商、 ΔN はその剰余である。同様に、 $\tilde{D}_{n-1}(x)$ は $D_n(x)$ を $g(x)$ で割った時の商、 ΔD はその剰余である。 $g(x)$ の零点を ζ で表した場合、 $|\Delta N| = |N_m(\zeta)| \approx \delta_1 |N'_m(\xi)|, |\Delta D| = |D_n(\zeta)| \approx \delta_2 |D'_n(\eta)|$ である。ここで、 $\delta_1 = |\zeta - \xi|, \delta_2 = |\zeta - \eta|$ である。 $A(x) = \Delta N \tilde{D}_{n-1}(x) - \Delta D \tilde{N}_{m-1}(x)$ と表されるので、 $x_0 \in [-1, 1]$ での $A(x)$ の絶対値は、

$$\begin{aligned} |A(x_0)| &\leq |\Delta N| |\tilde{D}_{n-1}(x_0)| + |\Delta D| |\tilde{N}_{m-1}(x_0)| \\ &\approx \delta_1 |N'_m(\xi)| |\tilde{N}_{m-1}(x_0)| + \delta_2 |D'_n(\eta)| |\tilde{D}_{n-1}(x_0)| \end{aligned}$$

となる。従って、 A の絶対値は、近似的 GCD の根と対応する近接根の間の距離である δ_1, δ_2 に依存する事が分かる。実際の計算の上では、 δ_1 や δ_2 は ϵ_1 より大きくなる事がほとんどであるため、連分数展開を用いた方が良い結果を与えると考えられる。

5. ハイブリッド積分への応用

HRFA を用いたハイブリッド積分についてはすでに検討を行っており、実用的に十分な精度で積分値が得られることを示している。ここでは近似的 GCD を用いた連分数展開をハイブリッド積分に応用することを考える。前節での結果から、HRFA のかわりに連分数展開を用いると、従来の HRFA に比較し良い積分値が得られると期待できる。近似的 GCD を用いた連分数展開によるハイブリッド積分の計算手順は次のようになる。

入力 : 関数 $f(x)$ 、積分区間 $[a, b]$ 、有理関数近似の次数 (m, n) 、近似的 GCD の cutoff 値 ϵ

出力 : $f(x)$ の定積分の近似値

方法 :

1. $m + n + 1$ 個のデータ点列 $(x_i, f(x_i))$, $i = 1, \dots, m + n + 1$ を求め、近似的 GCD を用いた連分数展開を求める。ここで $x_1 = a, x_{m+n+1} = b$ である
2. ハイブリッド積分により有理関数近似の近似不定積分形を求める
3. 積分区間 $[a, b]$ における定積分の近似値を求める

HRFA によるハイブリッド積分は、上の手順において近似的 GCD を用いた連分数展開を HRFA に置き換えたものである。ここで、前節の例題の関数を積分することを考える。すなわち、

$$I = \int_{-1}^1 \sqrt{x+2} dx = 2.797434948,$$

に対し、HRFA によるハイブリッド積分と、本論の近似的 GCD を用いた連分数展開によるハイブリッド積分の比較を行う。始めに (6, 6) 有理関数で近似することを考える。(6, 6) 有理補間により得られた HRFA と連分数展開は前節で求めており、(1) 式と (3) 式である。これらの近似から得られるハイブリッド積分をそれぞれ $\tilde{I}(x)$ と $\tilde{I}_c(x)$ と表し、結果は次のように得られる。

$$\begin{aligned} \tilde{I}(x) = & 12.413838x - 0.67484296 \log |x + 3.2949936| - 6.9252753 \log |x + 7.6279659| \\ & - 0.081417617 \log |x + 2.2391721| - 621.46369 \log |x + 63.089075| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{I}_c(x) = & 12.413838x - 0.67484280 \log |x + 3.2949937| - 6.9252753 \log |x + 7.6279659| \\ & - 0.081417745 \log |x + 2.2391720| - 621.46369 \log |x + 63.089075| \end{aligned}$$

$\tilde{I}(x), \tilde{I}_c(x)$ に対し積分区間の上下限を代入すると定積分の値が得られ、次の値が得られる。

$$\tilde{I}(1) - \tilde{I}(-1) = 2.797434970, \quad \tilde{I}_c(1) - \tilde{I}_c(-1) = 2.797434948$$

真値は 2.797434948 である。それぞれの絶対誤差を求めると、HRFA による積分は 2.2×10^{-8} であり、近似的 GCD を用いた連分数展開による積分は 4.4×10^{-10} であり、近似的 GCD を用いた連分数展開が高精度な結果を与える。

次に、次数を変化させハイブリッド積分を行った。補間の次数と、HRFA と連分数による積分のそれぞれの絶対誤差を Table 2 にまとめる。この結果から、近似的 GCD を用い

た連分数展開を応用した場合、ハイブリッド積分が安定的に高精度に得られることが示される。

Table 2. ハイブリッド積分の誤差

補間	HRFA	連分数展開
(4, 4)	$9.75 \cdot 10^{-10}$	$9.75 \cdot 10^{-10}$
(5, 5)	$7.68 \cdot 10^{-10}$	$7.68 \cdot 10^{-10}$
(6, 6)	$2.23 \cdot 10^{-8}$	$4.38 \cdot 10^{-10}$
(7, 7)	$5.30 \cdot 10^{-8}$	$7.24 \cdot 10^{-10}$
(8, 8)	$2.21 \cdot 10^{-6}$	$9.25 \cdot 10^{-9}$
(9, 9)	$2.44 \cdot 10^{-5}$	$6.09 \cdot 10^{-10}$
(10, 10)	$1.94 \cdot 10^{-6}$	$3.28 \cdot 10^{-9}$

6. 主値積分への応用

ハイブリッド積分の適用範囲をさらに広げるために、Cauchy 主値積分への応用を考える。Cauchy 主値積分は次式で表される。

$$\wp \int_a^b \frac{f(x)}{x-\lambda} dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0+} \left(\int_a^{\lambda-\epsilon} \frac{f(x)}{x-\lambda} dx + \int_{\lambda+\epsilon}^b \frac{f(x)}{x-\lambda} dx \right)$$

このように積分区間に特異点を含むため、数値積分では困難が生じる。この場合、一つの方法として Hilbert 変換を行ない

$$\wp \int_a^b \frac{f(x)}{x-\lambda} dx = \int_a^b \frac{f(x) - f(\lambda)}{x-\lambda} dx + \wp \int_a^b \frac{f(\lambda)}{x-\lambda} dx$$

被積分関数から特異性を除去する。主値積分を数値計算で求める方法として、Hilbert 変換を用いた方法、多項式やスプライン関数等の関数近似を基礎にしたアルゴリズム等が研究されている [1, 2, 4, 7]。Hilbert 変換も含めて、これらの数値計算手法ではあらかじめ特異点の位置が分かることが本質的である。しかし、被積分関数が複雑な場合や関数が点列で与えられる場合それが困難になる。ここで本論の手法の適用を考える。HRFA により特異点を含む関数の有理関数近似を積分区間で求め、ハイブリッド積分を用いる。この方法では被積分関数が複雑な場合や関数が点列で与えられる場合も容易に適用できると考えられる。すなわち計算手順として前節の方法をそのまま用いる。

次の例を考える。

$$I = \wp \int_{-1}^1 \frac{e^x}{x-0.5} dx = e^{1/2} \left(\log(1/3) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - (-3)^n}{2^n \times n \times n!} \right) \approx 0.9137864$$

(4, 4) 有理関数から (10, 10) 有理関数まで次数を変えて、HRFA のずれとハイブリッド積分の誤差を評価する。主値積分においては倍精度浮動小数で Risa/Asir を用いて計算を行った。

Table 3. 主値積分における HRFA のずれとハイブリッド積分の誤差

補間	HRFA			連分数展開		
次数	次数	ノルム	積分誤差	次数	ノルム	積分誤差
(4, 4)	(4, 4)	$5.5 \cdot 10^{-14}$	$4.3 \cdot 10^{-8}$	(4, 4)	$5.5 \cdot 10^{-14}$	$4.3 \cdot 10^{-8}$
(5, 5)	(5, 5)	$5.3 \cdot 10^{-13}$	$2.9 \cdot 10^{-11}$	(5, 5)	$5.3 \cdot 10^{-13}$	$2.9 \cdot 10^{-11}$
(6, 6)	(6, 6)	$1.1 \cdot 10^{-12}$	$6.1 \cdot 10^{-13}$	(6, 6)	$1.1 \cdot 10^{-12}$	$1.1 \cdot 10^{-12}$
(7, 7)	(6, 6)	$4.7 \cdot 10^{-13}$	$8.1 \cdot 10^{-13}$	(6, 6)	$4.3 \cdot 10^{-13}$	$1.4 \cdot 10^{-12}$
(8, 8)	(7, 7)	$3.4 \cdot 10^{-11}$	$1.5 \cdot 10^{-12}$	(7, 7)	$6.9 \cdot 10^{-13}$	$2.6 \cdot 10^{-12}$
(9, 9)	(8, 8)	$1.6 \cdot 10^{-7}$	$1.2 \cdot 10^{-9}$	(8, 8)	$1.7 \cdot 10^{-12}$	$1.1 \cdot 10^{-12}$
(10, 10)	(7, 7)	$7.3 \cdot 10^{-5}$	$4.6 \cdot 10^{-7}$	(7, 7)	$2.5 \cdot 10^{-10}$	$3.5 \cdot 10^{-12}$

どの結果も高精度であるが、(9, 9) 有理関数や、(10, 10) 有理関数から求めた場合、HRFA はずれが大きく、それが積分値にも現れる。しかし、ここでも近似的 GCD を使った連分数展開が良い結果を与える。

ここで、Hilbert 変換の後、適応型ニュートンコッツ法を適用する数値積分法を考える。倍精度浮動小数で計算を行うと誤差は 1.1×10^{-16} であり、積分値が非常に高精度で得られる。ただし、上述したように被積分関数の特異点の位置をあらかじめ知ることが重要である。しかし、我々の方法では被積分関数を与えるだけで十分高精度の Cauchy 主値積分を計算できる。また本論の方法は被積分関数を一旦点列に変換し計算を行う。積分される関数としてデータ列が与えられた場合は数値積分は適用が困難だが、本論の方法はそのまま適用できる。

6.1. 与えられたデータ列の主値積分

本節では実際にデータ列が与えられた場合について近似的 GCD を用いた連分数展開のアルゴリズムを適用する事を考える。Fig.1 は光導波路の設計問題において得られた実験データである。

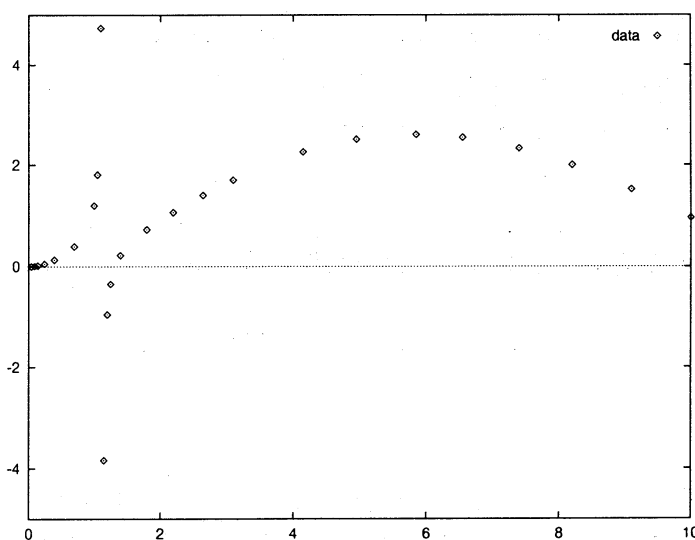


Fig.1 与えられたデータ列

このデータ列に対し、前節までの議論より HRFA よりも安定した精度が得られる近似的

GCD を用いた連分数展開を用いる。データ列の有理関数補間 $r_{12,12}(x)$ は次のように得られる。

$$r_{12,12}(x) = \frac{N_{12}(x)}{D_{12}(x)}$$

$$N_{12}(x) = 3.32 \cdot 10^{-5}x^{12} - 0.00135x^{11} + 0.0173x^{10} - 0.0973x^9 + 0.365x^8 - 1.03x^7 + 2.06x^6 - 3.11x^5 + 3.66x^4 - 2.75x^3 + 0.889x^2 + 1.55149 \cdot 10^{-5}x - 2.72 \cdot 10^{-7}$$

$$D_{12}(x) = 8.22 \cdot 10^{-7}x^{12} - 7.69 \cdot 10^{-6}x^{11} + 7.13 \cdot 10^{-5}x^{10} + 0.00250x^9 + 0.00315x^8 - 0.0981x^7 + 0.534x^6 - 1.87x^5 + 3.79x^4 - 4.78x^3 + 4.53x^2 - 3.10x + 1$$

近似的 GCD を用いた連分数展開は、近似的 GCD のパラメータ $\epsilon = 10^{-4}$ として、次の $\tilde{r}_{9,9}(x)$ が得られる。

$$\tilde{r}_{9,9}(x) = \frac{\tilde{N}_9(x)}{\tilde{D}_9(x)}$$

$$\tilde{N}_9(x) = -0.000263x^9 + 0.00932x^8 - 0.0876x^7 + 0.247x^6 - 0.910x^5 + 1.25x^4 - 1.87x^3 + 1.91x^2 + 6.67 \cdot 10^{-6}x - 1.98 \cdot 10^{-5}$$

$$\tilde{D}_9(x) = -6.52 \cdot 10^{-6}x^9 + 2.74 \cdot 10^{-5}x^8 - 0.000373x^7 - 0.0220x^6 - 0.135x^5 + 0.252x^4 - 1.96x^3 + 2.27x^2 - 2.11x + 2.15$$

ハイブリッド積分は、近似的 GCD のパラメータ $\epsilon = 10^{-4}$ において計算を行うと、

$$I(x) = 40.4x - 0.108 \log |x - 1.12| + 0.0202 \log |x^2 - 0.0346x + 1.14| - 0.583 \operatorname{atan}(0.938x - 0.01623) - 0.317 \log |x^2 - 1.53x + 8.79| - 1.16 \operatorname{atan}(0.349x - 0.267) - 426.9 \log |x^2 + 18.2x + 98.6| + 688.0 \operatorname{atan}(0.249x + 2.26) - 202.5 \log |x^2 - 19.7x + 300.4| - 49.3 \operatorname{atan}(0.0701x - 0.690)$$

のように求まる。その結果、次のように積分値を得る事ができる。

$$I(10) - I(0) = 16.89323419408948$$

7. 結び

本論では、近似的 GCD と連分数展開の関係を示し、連分数展開を HRFA のアルゴリズムに適用した。有理関数補間はデータ列を正確に通る有理関数であるが、有理関数補間から不必要な特異点を除いた HRFA はサンプル点において「ずれ」を生じる。本論では、「ずれ」の大きさをはかるノルムを定義し、HRFA と、近似的 GCD を用いた Padé 近似と、近

似的 GCD を用いた連分数展開をそれぞれ数値例により比較を行った。その結果、本論の近似的 GCD を用いた連分数展開がノルムの値が最も小さくなることが数値的に示された。近似的 GCD が 1 次の場合、連分数展開が良い結果を与える理由を述べたが、今後、より一般的に説明する必要がある。

本論の手法をハイブリッド積分に応用し、HRFA を用いた場合と比較した。その場合の精度は関数近似の精度に大きく影響される。近似的 GCD を用いた連分数展開がノルムを小さくするため、安定して高精度な積分結果が得られることを示した。

さらに主値積分の近似に本論の方法を応用し、上と同様な結果を得た。本論の方法では数値積分では適用が困難な被積分関数が点列で与えられる場合にも適用できる。積分の精度面での解析が今後の課題である。

参 考 文 献

- [1] P.J. Davis, P.Rabinowitz, *Numerical Integration*, Blaisdell Pub. Co. 1967.
- [2] A. Gerasoulis, Piecewise-polynomial quadratures for Cauchy singular integrals, *SIAM J. Numer. Anal.*, vol.23, pp.891-902, 1986.
- [3] H. Kai and M.T. Noda, Approximate GCD and Padé Approximation, *Proc. of Asian Symposium on Comp. Math.*, pp.81-90, 1995.
- [4] G. Monegato, The numerical evaluation of one-dimensional Cauchy principal value integrals, *Computing* 29, pp.337-354, 1982.
- [5] M.T. Noda, and E. Miyahiro, A Hybrid Approach for the Integration of a Rational Function, *J. CAM*, 40, pp.256-268, 1992.
- [6] M.T. Noda, E. Miyahiro, and H. Kai, Hybrid rational function approximation and its use in the hybrid integration, in *Advances in Computer Methods for Partial Differential Equations VII*, eds. R. Vichnevetsky, D. Knight and G. Richter, IMACS, pp.565-571, 1992.
- [7] A. Palamara Orsi, Spline approximation for Cauchy principal value integrals, *J. Comput. Appl. Math.*, vol.30, 191-201, 1990.
- [8] T. Sasaki and M.T. Noda, Approximate square-free decomposition and root-finding of ill-conditioned algebraic equations, *J. Inf. Proc.* 12, pp.159-168, 1989.