

放物型自由境界問題における界面の近似

富山大学大学院理工学研究部 (理学) 村川 秀樹 (Hideki Murakawa)
Graduate School of Science and Engineering for Research,
University of Toyama

1 はじめに

次の方程式を取り扱う.

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial t} = \Delta \beta(z) + f(\beta(z)) & \text{in } Q := \Omega \times (0, T), \\ \beta(z) = 0 & \text{on } \partial\Omega \times (0, T), \\ z(\cdot, 0) = z_0 & \text{in } \Omega. \end{cases} \quad (1)$$

ここで, Ω は境界が滑らかな $\mathbf{R}^N$ ($N \in \mathbf{N}$) 内の有界領域であり, T は正の定数, f, β, z_0 は与えられた関数である. この方程式は理工学分野において非常に多く現れる. 例えば, 古典的 Stefan 問題や多孔質媒体流方程式, Hele-Shaw 問題などである. また, (1) の形の方程式系を考えると, 数理生態学に現れる非線形反応拡散系や交差拡散系などの問題も含まれる. 方程式 (1) は形式的に $\partial_t z = \operatorname{div}(\beta'(z)\nabla z) + f(\beta(z))$ と書き直すことができる. したがって, $\beta'(z)$ が拡散の度合を表すが, これが 0 になる問題において, 陰的にではあるが, 自由境界 (界面) が現れる. このような場合, つまり β' が 0 になる点を持つ場合に, 方程式 (1) を退化放物型方程式と呼ぶ. 自由境界問題の典型的な例である古典的 Stefan 問題と多孔質媒体流方程式について簡単に説明し, 方程式の特徴を述べる.

古典的 Stefan 問題は氷の融解・凝固現象を記述する典型的な問題であり, (1) において

$$\beta(r) = d_1 \max(r - \lambda, 0) + d_2 \min(r, 0)$$

と定義した場合の問題である. ここで, d_1 と d_2 は非負定数であり, それぞれ水と氷の熱伝導係数である. また, 非負定数 λ は単位体積の水を溶かすのに必要な熱量を表す. このとき, 方程式 (1) の解 z は潜熱と温度の和であるエンタルピーを表し, $\beta(z)$ は温度を表す. この方程式を見ると, 解 z が区間 $(0, \lambda)$ にあるときには拡散 $\beta'(z)$ の効果がなくなることがわかる. つまり拡散が退化するのである. 拡散の効果がなくなることにより, 解の滑らかさが失われる. 特に, Stefan 問題の場合は解は不連続となり, その不連続面が氷と水の境界である自由境界を表す. 弱形式を考えると, その自由境界が満たすべき界面方程式が得られる. 形式的には界面はその界面方程式に従って変形するとみなされる. このように, 方程式 (1) は単なる放物型の方程式とは異なり, 拡散の退化性が問題を難しくしている一つの例と言えよう.

多孔質媒体中を流れる流体の流れ現象を記述する方程式に多孔質媒体流方程式がある。多孔質媒体流方程式は方程式 (1) において

$$\beta(r) = |r|^{m-1}r$$

と定義したものである。ただし、 $m > 1$ である。このとき、 $z = 0$ なる点において拡散が退化する。この退化性が引き起こす顕著な特徴として、次のものが挙げられる。初期関数 z_0 の台がコンパクトであるならば、(1) の解の台もコンパクトである。したがって、 $z > 0$ となる領域と $z = 0$ なる領域の間に自由境界が現れる。解の台は物理的には流体の存在範囲を表すものである。この性質は線形拡散方程式 ($m = 1$) の性質とは明確に異なる。

本研究では、上記の例のような放物型自由境界問題の近似解法及び数値解法について考える。自由境界問題の解析では、解の性質を調べることはもちろん、界面の性質を調べるのが重要である。自由境界問題の近似解を考える上でも同様に、界面の近似を考えることが重要課題である。自由境界問題 (1) では、その解から界面の情報が得られるため、(1) の解を求めれば良いことになる。しかし、近似を考える上では、近似解を求めたからといって、そこから得られる近似界面が真の界面を近似しているとは限らない。界面の場所や形状を近似する方法として界面追跡法と呼ばれる方法が多く提案されている。この方法は、界面により分けられる領域における支配方程式の解の近似を求めると同時に、界面上で満たされる界面方程式を基に界面の近似を求める方法である。これらの方法は界面を追跡していく方法であるため、一般に界面の近似精度は良い。しかしながら、特に空間多次元の問題を考えたとき、界面の形状が滑らかでなかったり、滑らかに変化しない場合には界面を追跡することが困難である。また、時間と共に変化する複数の領域における支配方程式を同時に解かなければならないという困難さもある。方程式 (1) が界面の情報を陰的に含んでいることの利点を利用して、界面を追跡するのではなく、方程式 (1) の近似解から界面の情報を引き出す方法について考えたい。本研究では、近似解の収束と近似界面の収束を関連付ける Nochetto [20] による研究に従う。彼の結果は、簡単に述べると、問題の解が non-degeneracy property と呼ばれる性質を満たし、近似解に対する L^p 誤差評価が得られていれば、近似界面がある意味で真の界面に収束するというものである。この結果は、(1) の解を良く近似できる近似解法は界面も良く近似できるであろうことを期待させてくれる。我々はこの立場に立って、(1) の近似解を効率的に求める数値解法について考える。

次節では Nochetto による界面の近似に関する結果を紹介する。第 3 節では既存の数値解法について、特に、問題の時間離散化を中心にして紹介し、自由境界問題 (1) の数値解法を考える上で、何が問題になっているのかについて考える。このことを踏まえて、新たな時間離散スキーム及び数値解法を提出する。その提案する時間離散スキームについての解析を第 4 節にて行う。第 5 節では、数値実験を行うことにより、提案する数値解法が既存のものに比べて効率よく高精度な数値解及び数値界面を得られる解法であることを示す。

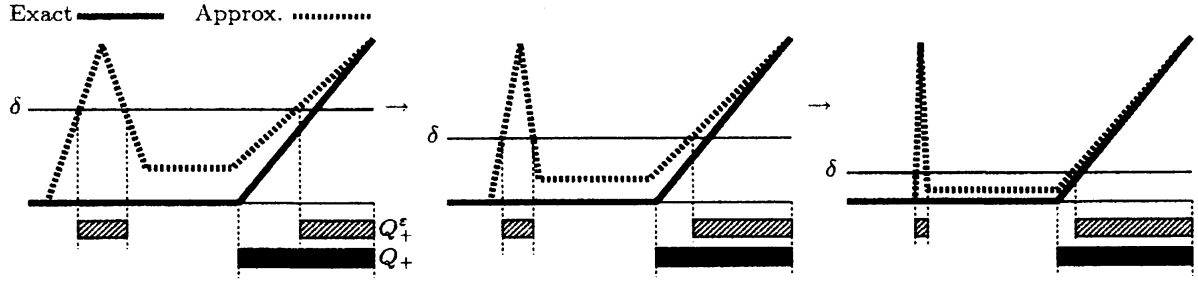


図 1 解の近似例.

2 自由境界の近似について

自由境界問題 (1) の解を z とし, $u = \beta(z)$ とおく. また, ε をパラメータとし, u の近似解を u^ε とかく. 次の集合を考える.

$$Q_+ := \{(x, t) \in Q; u(x, t) > 0\}.$$

これは, Stefan 問題においては水の領域をあらわし, 多孔質媒体流方程式においては流体の存在範囲を表している. このとき, $\Gamma = \partial Q_+ \cap Q$ が自由境界を表す. 領域 Q_+ の近似として水準を $\delta(\varepsilon)$ だけ移動させた次の領域を考える.

$$Q_+^\varepsilon := \{(x, t) \in Q; u^\varepsilon(x, t) > \delta(\varepsilon)\}.$$

また, 界面に関しても同様に $\Gamma^\varepsilon = \partial Q_+^\varepsilon \cap Q$ と定義する. 次の仮定を考える.

(A1) L^p 誤差評価:

ある $p \in [1, \infty]$ に対して次を満たす関数 $\sigma: \mathbf{R}_+ \rightarrow \mathbf{R}_+$, $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sigma(\varepsilon) = 0$ が存在する.

$$\|u - u^\varepsilon\|_{L^p(Q)} < \sigma(\varepsilon).$$

(A2) A non-degeneracy property:

次を満たす関数 $\rho: \mathbf{R}_+ \rightarrow \mathbf{R}_+$ が存在する.

$$\text{meas}(\{0 < u < \varepsilon\}) \leq \rho(\varepsilon).$$

退化放物型方程式 (1) において, 条件 (A2) がどのような場合に成り立つかについて一般的な結果はないが, Stefan 問題や多孔質媒体流方程式など個々の問題についてはいくつかの研究がある.

上記仮定の下で, Nochetto は自由境界の測度の意味での収束に関する結果を得た.

定理 1 (Error estimate in measure [20].) 仮定 (A1) と (A2) が成り立つとする. このとき, 次が成り立つ.

$$\text{meas}(Q_+ \Delta Q_+^\varepsilon) \leq \rho(2\delta(\varepsilon)) + 2(\sigma(\varepsilon)/\delta(\varepsilon))^p.$$

図 1 のように近似解が真の解を近似している状況を考えよう. 図 1 の近似解にはスパイクがあり, L^p ($1 \leq p < \infty$) では収束しているが, L^∞ では収束していない状況である. 真の解には正の領域が 1 つしかないが, 近似解では領域 Q_+^ε は 2 つの連結成分に分けられている. このうち左の領域を Q_1^ε , 右の領域を Q_2^ε と書き, $\Gamma_i^\varepsilon = \partial Q_i^\varepsilon \cap Q$ ($i = 1, 2$) と書くことにする. $\text{meas}(Q_1^\varepsilon)$ は 0 に収束する様子であるから, $\text{meas}(Q_+ \triangle Q_+^\varepsilon)$ は 0 に収束するであろう. 実際, 定理 1 はそれを保証するものである. では, 界面の位置はどうであろうか. Γ_2^ε は Γ に近づいている様子が伺える. しかし, Γ_1^ε はある 1 点に収束しているようである. このような状況を考えると, 本来の界面とは全く異なる場所を近似界面として捉えることになる. このような状況が起こらない場合, つまり, 近似解が真の解に L^∞ 収束する場合には近似界面は距離の意味で真の界面に収束するという結果がやはり Nochetto により提出されている.

集合 K を $K \subset\subset Q$ なる集合とし, $\mathcal{S}_\eta$ を

$$\mathcal{S}_\eta(F \cap K) := \{(x, t) \in Q; d((x, t), F \cap K) \leq C_K \eta\}.$$

と定義する. ここで, $d((x, t), F \cap K)$ は (x, t) と $F \cap K$ の距離であり, C_K は K に依存する定数である. 次の仮定を課す.

(A3) 次を満たす関数 $\rho: \mathbf{R}_+ \rightarrow \mathbf{R}_+$ と正定数 C_K が存在する.

$$K \cap \{0 < u < \eta\} \subset \mathcal{S}_{\rho^{-1}(\eta)}(F \cap K).$$

定理 2 (Error estimate in distance [20].) $p = \infty$ として (A1) と (A3) が成り立つとし, $\delta(\varepsilon) = \sigma(\varepsilon)$ とする. このとき, F^ε は次を満たす.

$$F^\varepsilon \cap K \subset \mathcal{S}_{\rho^{-1}(2\sigma(\varepsilon))}(F \cap K).$$

退化放物型方程式 (1) の近似解を扱う上で L^∞ 誤差評価を得ることは非常に難しいが, 定理 2 は解をきちんと近似できれば界面も近似できることを示している. この立場に立ち, 我々は効率よく精度の高い数値解が得られる数値解法について考えることに尽力しよう.

3 放物型自由境界問題の数値解法

本節では放物型自由境界問題 (1) の数値解法を取り扱うが, 特に, (1) の時間離散化方法について考える. 時間離散のみを考えることは数値解法を考えることに比べて単純なものであるが, 数値解法の開発において重要な役割を果たす.

N_T を正の整数として, $\tau = T/N_T$ と置く. また, $\{z^n\}_{n=0}^{N_T}$ に対して $\bar{D}_\tau z^n = \frac{z^n - z^{n-1}}{\tau}$ ($1 \leq n \leq N_T$) と書く. 方程式 (1) の時間離散化法として陰的オイラー法を用いると, 非線形楕円型偏微分方程式 $\bar{D}_\tau Z^n = \Delta \beta(Z^n) + f(\beta(Z^n))$ が得られる. 空間変数に関して離散化すると, 非線形連立方程式が得られる. この連立方程式の解は非線形 SOR 法 [27] により求めることができる. この種の解法については理論的にも数値計算においても多くの研究がある [2, 6, 8, 9, 11, 14, 18, 19, 21, 22, 25, 28, 29]. 非線形問題を取り扱う際には, 有効な線形解

法を利用できるように非線形問題を線形化する場合がよくある。線形化する強力な方法の一つとして Newton 法が挙げられる。しかしながら、上記の方法は $\Delta\beta(Z^n)$ の部分の強い非線形性により、Newton 法が収束しない（場合がある）という欠点がある。

Berger 等 [3] は次の線形スキームを提案した。

$$\begin{cases} Z^0 := z^0, \\ U^n - \frac{\tau}{\mu} \Delta U^n = \beta(Z^{n-1}) + \frac{\tau}{\mu} f(\beta(Z^{n-1})), \\ Z^n := Z^{n-1} + \mu(U^n - \beta(Z^{n-1})) \quad \text{for } n = 0, 1, \dots, N_T. \end{cases} \quad (2)$$

ここで、 $\mu > 0$ は定数である。このスキームは非線形半群理論における nonlinear Chernoff formula に基づくものであり、幾つかの研究がなされている [13, 23, 24, 26]。非線形性の強い方程式 (1) が U^n に関する線形楕円型方程式と Z^n に関する代入に置き換えられているため、(2) は魅力的な数値解法として扱われてきた。実際に、プログラミングは極めて容易であり、連立方程式の数値解法の利点をフルに利用することができる。しかしながら、十分な精度を得るためには時間分割幅 τ を小さく取る必要があり、あまり効率的ではないようである。

Jäger 等 [10] は (2) におけるパラメータ μ を関数 $\mu^n(x)$ に置き換えることを考えた。また、Kačur 等 [12] はその方法を一般化している。彼等の方法には次の方程式の近似を考えることが背景にある。

$$\frac{\partial \beta(z)}{\partial t} - \beta'(z) \Delta \beta(z) = \beta'(z) f(\beta(z)).$$

これは形式的に方程式 (1) と等しいものである。次の時間離散化を考える。

$$\begin{cases} \beta(Z^j) - \tau \beta'(Z^j) \Delta \beta(Z^j) = \beta(Z^{j-1}) + \tau \beta'(Z^{j-1}) f(\beta(Z^{j-1})), \\ Z^j = Z^{j-1} + \frac{1}{\beta'(Z^j)} (\beta(Z^j) - \beta(Z^{j-1})). \end{cases}$$

$U^j = \beta(Z^j)$ と置き、 $\mu = 1/\beta'(Z^j)$ とすると、(2) が得られる。したがって、パラメータ μ は $1/\beta'(z)$ の近似であると考えることができる。さらに、 μ は定数ではなく関数とする方が良い近似が得られると期待できる。Kačur 等の方法 [12] は、 $n = 1, 2, \dots, N_T$ に対して、以下を満たす $U^n, Z^n, \mu^n \in L^\infty(\Omega)$ を求める方法である。

$$\begin{cases} \mu^n U^n - \tau \Delta U^n = \mu^n \beta(Z^{n-1}) + \tau f(\beta(Z^{n-1})), \\ |\beta(Z^{n-1} + \mu^n(U^n - \beta(Z^{n-1}))) - \beta(Z^{n-1})| \leq \alpha |U^n - \beta(Z^{n-1})| + o\left(\frac{1}{\sqrt{N_T}}\right), \\ 0 < \delta \leq \mu^n(x) \leq K, \\ Z^n := Z^{n-1} + \mu^n(U^n - \beta(Z^{n-1})). \end{cases} \quad (3)$$

ただし、境界条件は適当なものを与える。ここで、 $0 < 1 - \alpha < 1$, δ, K^{-1} は十分に小さな定数であり、 o は Landau の記号を表す。このスキームは U^n と μ^n に関して陰的であるため、彼等は次

の反復法を提案している.

$$\begin{cases} \mu^{n,0} := \gamma_K(1/\beta'_{N_T}(Z^{n-1})), \\ \mu^{n,s-1}U^{n,s} - \tau\Delta U^{n,s} = \mu^{n,s-1}\beta(Z^{n-1}) + \tau f(\beta(Z^{n-1})), \\ \mu^{n,s} := \gamma_K\left(\frac{\beta_{N_T}^{-1}(\beta_{N_T}(Z^{n-1}) + \alpha(U^{n,s} - \beta(Z^{n-1}))) - Z^{n-1}}{U^{n,s} - \beta(Z^{n-1})}\right) \end{cases} \quad \text{for } k = 1, 2, \dots$$

ここで,

$$\gamma_K(s) = \begin{cases} s & \text{if } 0 \leq s \leq K, \\ K & \text{if } s > K \end{cases}$$

であり, β_{N_T} は狭義単調増加 Lipschitz 連続関数であり, 次を満たすものである.

$$\begin{aligned} \|\beta_{N_T} - \beta\|_{L^\infty(\mathbf{R})} &= o\left(\frac{1}{\sqrt{N_T}}\right), \quad \beta_{N_T} \in C^2(\mathbf{R}), \\ 0 < \beta'_{N_T}(s) &\leq L_{\beta_{N_T}} \leq L_\beta \quad \text{for all } s \in \mathbf{R}. \end{aligned}$$

ここで, $L_{\beta_{N_T}}$ は β_{N_T} の Lipschitz 定数である. この反復法は有限回の反復で収束することが示されている [10, 12]. この方法は筆者の知識の中では最も効率的な方法である.

このように, 自由境界問題 (1) の数値解法 (時間離散化法) には様々なものがある. 上記の方法を見ると, どれも拡散の退化性, 非線形性に由来する難しさをどのように扱うかが問題となっていることが分かる. そこで, (1) の解を近似する次の反応拡散系を考えよう.

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{\mu}\Delta u + \frac{1}{\mu}f(u) - \frac{1}{\varepsilon}(u - \beta(\mu u + v)) & \text{in } Q, \\ \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\mu}{\varepsilon}(u - \beta(\mu u + v)) & \text{in } Q, \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega \times (0, T), \\ u(\cdot, 0) = \beta(z_0), \quad v(\cdot, 0) = z_0 - \mu\beta(z_0) & \text{in } \Omega. \end{cases} \quad (4)$$

ここで, μ と ε は正の定数である. この反応拡散系は (1) における拡散の退化性及び非線形性を取り除くために筆者により提案されたものである [15]. 反応拡散系 (4) の弱解を $(u^\varepsilon, v^\varepsilon)$ とする. パラメータ ε が 0 に近づくとき, 関数 $z^\varepsilon := \mu u^\varepsilon + v^\varepsilon$ は方程式 (1) の弱解 z に収束することが示されている. 拡散の非線形性 β が, そのままの形で反応拡散系の反応項の部分に含まれていることは注目に値する. 反応拡散系 (4) は線形拡散と単純な反応から構成されている半線形問題である. 一般に, 非線形問題を取り扱うよりも半線形問題を取り扱うほうが容易である. 数値的な困難さは拡散の非線形性にあつたため, その非線形性を取り除いた反応拡散系 (4) を用いて数値解法を構成することは有用であるに違いない. 本研究では, 反応拡散系 (4) に基づく時間離散スキーム及び数値スキームを提出する.

次の半陰的時間離散化を考えよう.

$$\begin{cases} \bar{D}_\tau U^n = \frac{1}{\mu}\Delta U^n + \frac{1}{\mu}f(U^{n-1}) - \frac{1}{\varepsilon}(U^{n-1} - \beta(\mu U^{n-1} + V^{n-1})), \\ \bar{D}_\tau V^n = \frac{\mu}{\varepsilon}(U^{n-1} - \beta(\mu U^{n-1} + V^{n-1})) \end{cases} \quad \text{for } n = 0, 1, \dots, N_T. \quad (5)$$

$Z^n = \mu U^n + V^n$ と置いて, $\varepsilon = \tau$ ととる. さらに $f(U^{n-1})$ の代わりに $f(\beta(Z^{n-1}))$ ととると, (5) は線形解法 (2) に一致する. つまり, 線形解法 (2) は反応拡散系 (4) の特別な離散化を適用したものであり, 反応拡散系 (4) は線形解法 (2) の連続版であると考えることができる. したがって, 反応拡散系 (4) がより良い数値解法の開発に役立つことが期待できる.

反応拡散系 (4) の解は, ε が小さいときに (1) の解に近いと期待されるので, より良い数値解法は ε を小さくできる離散化において得られるかもしれない. しかしながら, 数値実験を行うと, 上記の半陰的離散化では ε を時間分割幅 τ よりも小さくとることができないことが見受けられる. したがって, ε が十分に小さくできるロバストな数値解法を構成したい. その最も単純な方法は次の陰的離散化を採用することである.

$$\begin{cases} \bar{D}_\tau U^n = \frac{1}{\mu} \Delta U^n + \frac{1}{\mu} f(U^n) - \frac{1}{\varepsilon} (U^n - \beta(\mu U^n + V^n)), \\ \bar{D}_\tau V^n = \frac{\mu}{\varepsilon} (U^n - \beta(\mu U^n + V^n)) \quad \text{for } n = 0, 1, \dots, N_T. \end{cases} \quad (6)$$

第 5 節で行う数値実験からこのスキームは効率的で有効なものであることがわかる. 我々のアイデア, 方程式系は単純であるがゆえに, その解析も容易である. 実際, 安定性や誤差評価に関する結果が簡単に得られる.

4 反応拡散系を用いた時間離散スキームの解析

本節では, 時間離散スキーム (6) についての解析的な結果を述べる. 与えられた関数や定数についての条件を与える.

(H1) β は非減少 Lipschitz 連続関数であり, $\beta(0) = 0$ を満たすものとする. つまり, 次を満たす正定数 l_β と L_β が存在する.

$$0 \leq l_\beta \leq \beta'(s) \leq L_\beta < +\infty \quad \text{for a.e. } s \in \mathbf{R}.$$

また, 次を満たす正定数 C_1 と C_2 が存在するとする.

$$|\beta(s)| \geq C_1 |s| - C_2 \quad \text{for all } s \in \mathbf{R}.$$

(H2) f は Lipschitz 連続関数である.

(H3) $z_0 \in L^2(\Omega)$.

(H4) μ は $0 < \mu < L_\beta^{-1}$ を満たす.

方程式 (1) の弱解を定義する.

定義 1 関数 $z \in L^2(Q)$ が, (1) の弱解であるとは, $\beta(z) \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$ を満たし, 任意の $\varphi(\cdot, T) = 0$ なる関数 $\varphi \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega)) \cap H^1(0, T; L^2(\Omega))$ に対して

$$-\int_0^T \left\langle z, \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right\rangle + \int_0^T \langle \nabla \beta(z), \nabla \varphi \rangle = \langle z_0, \varphi(\cdot, 0) \rangle + \int_0^T \langle f(\beta(z)), \varphi \rangle$$

を満たすことである. ここで, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ は $L^2(\Omega)$ の内積を表す.

この弱解の一意存在性は良く知られている [1, 7, 30]. 我々の時間離散スキーム (6) について正確に述べると以下の問題となる.

問題 1 $n = 1, 2, \dots, N_T$ に対して次を満たす, $U^n \in H_0^1(\Omega)$ と $V^n \in L^2(\Omega)$ を見つけよ.

$$\begin{aligned} U^0 &= u_0 \in L^2(\Omega), \quad V^0 = v_0 \in L^2(\Omega), \\ \langle \bar{D}_\tau U^n, \varphi \rangle + \frac{1}{\mu} \langle \nabla U^n, \nabla \varphi \rangle &= \frac{1}{\mu} \langle f(U^n), \varphi \rangle - \frac{1}{\varepsilon} \langle U^n - \beta(\mu U^n + V^n), \varphi \rangle \\ &\quad \text{for all } \varphi \in H_0^1(\Omega), \\ \bar{D}_\tau V^n &= \frac{\mu}{\varepsilon} (U^n - \beta(\mu U^n + V^n)) \quad \text{a.e.} \end{aligned}$$

仮定 (H1), (H2), $\mu > 0$ が成り立つとき, 問題 1 の解 $\{U^n, V^n\}_{n=1}^{N_T}$ は一意に存在することが示される.

以下に我々の結果について述べる.

定理 3 ([16]) 問題 1 の解を $\{U^n, V^n\}_{n=1}^{N_T}$ とすると, 仮定 (H1), (H2), (H4) の下で, 以下が成り立つ τ と ε に依存しない正定数 C が存在する.

$$\begin{aligned} &\tau \sum_{n=1}^{N_T} \|U^n\|_{H^1(\Omega)}^2 + \max_{1 \leq n \leq N_T} \left\| \tau \nabla \sum_{m=1}^n U^m \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\quad + \tau \sum_{n=1}^{N_T} \|V^n\|_{L^2(\Omega)}^2 + \varepsilon \max_{1 \leq n \leq N_T} \|V^n\|_{L^2(\Omega)}^2 + \varepsilon \tau \sum_{n=1}^{N_T} \|\bar{D}_\tau V^n\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\quad + \tau \sum_{n=1}^{N_T} \|Z^n\|_{L^2(\Omega)}^2 + \max_{1 \leq n \leq N_T} \|Z^n\|_{H^{-1}(\Omega)}^2 \leq C. \end{aligned}$$

したがって, 時間離散スキーム (6) は無条件安定である. 我々は次の誤差評価を得た.

定理 4 ([16]) 関数 z を (1) の弱解とし, $\{U^n, V^n\}_{n=1}^{N_T}$ を問題 1 の解とする. $u = \beta(z)$ とおき, U と Z を以下のようにおく.

$$\begin{aligned} U(t) &= U^n \\ Z(t) &= Z^n = \mu U^n + V^n \quad \text{for } t \in (t^{n-1}, t^n]. \end{aligned}$$

仮定 (H1)–(H4) が満たされるとき, τ と ε に依存しない正の定数 C が存在して次が成り立つ.

$$\begin{aligned} E &:= \|u - U\|_{L^2(Q)} + \left\| \int_0^t (u - U) \right\|_{L^\infty(0, T; H^1(\Omega))} \\ &\quad + \|z - Z\|_{L^\infty(0, T; H^{-1}(\Omega))} \leq C(\tau^{1/2} + \varepsilon^{1/4}). \end{aligned} \quad (7)$$

さらに, もし $\beta(z_0) \in H_0^1(\Omega)$ であり, $l_\beta > 0$ を満たすならば, 次を満たす τ と ε に依存しない正の定数 C が存在する.

$$E + \|z - Z\|_{L^2(Q)} \leq C(\tau + \varepsilon^{1/2}). \quad (8)$$

この定理は Stefan 問題や多孔質媒体流方程式を含む問題 (1) の弱解が時間離散スキーム (6) の弱解により近似されることを示している. パラメータ ε を τ^2 のオーダーにとると, 収束のオーダーは $O(\tau^{1/2})$ となる. 非退化型問題 ($l_\beta > 0$) を考える場合はより良いオーダー $O(\tau)$ が得られる. このときは, さらに, Z も $L^2(Q)$ において強収束し, そのオーダーは $O(\tau)$ となる. これらのオーダーは, z や u の大域的な滑らかさから最適であると考えられる. 実際, 一般に $\int_0^t u \in H^1(0, T; H_0^1(\Omega)) \subset C^{0,1/2}([0, T]; H_0^1(\Omega))$ であり, $z \in H^1(0, T; H^{-1}(\Omega)) \subset C^{0,1/2}([0, T]; H^{-1}(\Omega))$ である. また, 任意の数 $r < 1/2$ に対して $u \in H^r(0, T; L^2(\Omega))$ が成り立つ [30]. このような正則性から (7) は最適な評価であると考えられる. もし, $\beta(z_0) \in H_0^1(\Omega)$ であり $l_\beta > 0$ であるなら, 次が成り立つ [30]: $u \in L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega)) \cap H^1(0, T; L^2(\Omega))$, $z \in H^1(0, T; L^2(\Omega))$, $\frac{\partial z}{\partial t} \in L^\infty(0, T; H^{-1}(\Omega))$. したがって, (8) も最適なものと考えられる.

L^2 誤差評価を得たので, 我々のスキームに Nochetto による自由境界に関する評価, 定理 1 を適用することができる. まず, Stefan 問題を扱う. Stefan 問題に対して, 時刻 $t = 0$ における界面が Lipschitz 多様体であるなど, 初期値や与えられた関数などにある (特異でない) 仮定を課した場合に次の non-degeneracy property が成り立つことが知られている [17].

$$\text{meas}(\{0 < u < \eta\}) \leq C\eta. \quad (9)$$

我々の時間離散スキーム (6) の解 (を Q 上に拡張したもの) $U = U(x, t; \varepsilon, \tau)$ に対し, 水の領域の近似 Q_+^τ を次のように定義する.

$$Q_+^\tau := \{(x, t) \in Q; U(x, t; \varepsilon, \tau) > \tau^{1/3}\}.$$

このとき, 自由境界の近似に関する次の結果が得られる.

系 1 仮定 (H1)–(H4) 及び, (9) が成り立つとし, $\varepsilon = \tau^2$ とする. このとき, τ に依存しない正の定数 C が存在して次を満たす.

$$\text{meas}(Q_+ \Delta Q_+^\tau) \leq C\tau^{1/3}.$$

次に, 多孔質媒体流方程式を取り扱う. 空間 1 次元問題 ($N = 1$) の場合, データにある仮定を課した場合に次が成り立つことが Caffarelli と Friedman [4] により示されている. 任意の $t_0 > 0$ に対して次を満たす定数 $C(t_0)$ が存在する.

$$\text{meas}\left(\{(x, t) \in Q; t \geq t_0, 0 < u < \varepsilon^{m/(m-1)}\}\right) \leq C(t_0)\varepsilon. \quad (10)$$

スキーム (6) の解に対して

$$Q_+^\tau := \{(x, t) \in Q; U(x, t; \varepsilon, \tau) > \tau^{m/(3m-1)}\}.$$

を定義する. このとき, 次の結果を得る.

系 2 $N = 1$ とする. 仮定 (H1)–(H4) が成り立つとし, $\varepsilon = \tau^2$ とする. 任意の $t_0 > 0$ に対して (10) を満たす $C(t_0)$ が存在するとする. このとき, τ に依存しない正の定数 $C'(t_0)$ が存在して次を満たす.

$$\text{meas}((Q_+ \Delta Q_+^\tau) \cap \{t > t_0\}) \leq C'(t_0)\tau^{(m-1)/(3m-1)}.$$

空間 N 次元問題 ($N > 1$) に対してはやはり Caffarelli と Friedman [5] により次の non-degeneracy property が成り立つことが示されている. 任意の $t_0 > 0$ に対して次を満たす定数 γ と $C(t_0)$ が存在する.

$$\text{meas} \left(\{(x, t) \in Q; t \geq t_0, 0 < u < \varepsilon^{(2-\gamma)m/(\gamma(m-1))}\} \right) \leq C(t_0)\varepsilon. \quad (11)$$

領域 Q_+^τ を次のように定義する.

$$Q_+^\tau := \{(x, t) \in Q; U(x, t; \varepsilon, \tau) > \tau^{(2-\gamma)m/(4m-\gamma(1-m))}\}.$$

系 3 $N > 1$ とする. 仮定 (H1)–(H4) が成り立つとし, $\varepsilon = \tau^2$ とする. 任意の $t_0 > 0$ に対して (11) を満たす $C(t_0)$ が存在するとする. このとき, τ に依存しない正の定数 $C'(t_0)$ が存在して次を満たす.

$$\text{meas} ((Q_+ \Delta Q_+^\tau) \cap \{t > t_0\}) \leq C(t_0)\tau^{\gamma(m-1)/(4m-\gamma(1-m))}.$$

5 数値実験

本節では, 数値実験を行うことにより, 我々のアイデアが効率的な数値解法を導くことを示す. 空間を一様に分割した方法と moving mesh を用いた方法を取り扱うが, それぞれ, Kačur 等 [12] の方法, Mackenzie と Robertson [14] の数値結果との比較を行う.

5.1 反応拡散系を用いた数値スキーム

反応拡散系 (4) を時間離散化した時間離散スキーム (6) に基づく数値スキームを提出する. アイデアはやはり単純なものである. 空間離散化に差分法を適用し, 解くべき非線形連立方程式は Newton 法により解く. 空間離散化には有限要素法や有限体積法など他の方法も適用できるであろう. 特に, moving (adaptive) mesh 有限要素法などの方法は自由境界問題を取り扱う際には非常に強力な方法である [2, 14, 21, 22, 23].

Newton 法を適用したときに得られる連立一次方程式は次の形をしている.

$$\begin{pmatrix} A^{(k-1)} & B^{(k-1)} \\ C^{(k-1)} & D^{(k-1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U^{(k)} \\ V^{(k)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U^{(k-1)} \\ V^{(k-1)} \end{pmatrix}.$$

ここで, $A^{(k-1)}$ は離散ラプラシアンと同じ形の対称な疎行列であり, $B^{(k-1)}, C^{(k-1)}, D^{(k-1)}$ は対角行列である. したがって, 行列 $B^{(k-1)}$ は $A^{(k-1)}$ の形を変えずに消去することができる. つまり, $U^{(k)}$ と $V^{(k)}$ に対する連立一次方程式は, $U^{(k)}$ に対する連立一次方程式と $V^{(k)}$ に対する陽的な代数方程式に置き換えることができる. 従って, 連立一次方程式の数値解法の利点を活用することができる. 実装の面でも計算コストにおいても単独の半線型方程式の場合とほとんど変わらない. 我々は単独の方程式 (1) を系で表現したが, 系であることの難しさはここでは全くない.

5.2 テスト問題

次の古典的 2 相 Stefan 問題を取り扱う。これは Furzeland [9] や Mackenzie と Robertson [14] が取り扱った問題である。

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial t} = \Delta \beta(z) & \text{in } \cup_{t>0} \Omega \times \{t\}, \\ \beta(z(0, t)) = k_1 \theta^* & \text{for } t > 0, \\ \frac{\partial \beta(z(x, t))}{\partial x} = 0 & \text{as } x \rightarrow \infty, t > 0, \\ z(x, 0) = C_2 \theta_0 & \text{for } x > 0. \end{cases}$$

ここで, $\beta(r) = \kappa_2 \max(r - \lambda, 0) + \kappa_1 \min(r, 0)$, $\kappa_i = k_i/C_i$, $\theta^* < 0$, $\theta_0 > 0$ である。 k_i は熱伝導率, c_i は比熱, λ は潜熱係数を表す。関数 θ を $\theta(r) = \max(r, 0)/k_2 + \min(r, 0)/k_1$ と定義すると, z と $\theta(\beta(z))$ はそれぞれエンタルピーと温度を表す。この問題は次の解を持つ。

$$z(x, t) = \begin{cases} C_1 \theta^* \left(1 - \frac{\operatorname{erf}(x/(2\sqrt{\kappa_1 t}))}{\operatorname{erf} \phi} \right) & \text{if } x \leq s(t), \\ C_2 \theta_0 \left(1 - \frac{\operatorname{erfc}(x/(2\sqrt{\kappa_2 t}))}{\operatorname{erfc}(\phi\sqrt{\kappa_1/\kappa_2})} \right) + \lambda & \text{if } x > s(t). \end{cases}$$

ここで, $s(t) = 2\phi\sqrt{\kappa_1 t}$ は時刻 t における界面の位置であり ϕ は次の方程式の解である。

$$\frac{e^{-\phi^2}}{\operatorname{erf} \phi} + \frac{k_2}{k_1} \sqrt{\frac{\kappa_1}{\kappa_2}} \frac{\theta_0 e^{-\kappa_1 \phi^2 / \kappa_2}}{\theta^* \operatorname{erfc}(\phi\sqrt{\kappa_1/\kappa_2})} + \frac{\phi \lambda \sqrt{\pi}}{C_1 \theta^*} = 0.$$

数値計算のために, 計算領域は $\Omega \times (T_0, T] = (0, 1) \times (0.01, 1.01]$ とし, 無限遠方での境界条件を $x = 1$ における解の値に置き換える。また, $k_1 = 2.22$, $k_2 = 0.556$, $C_1 = 1.762$, $C_2 = 4.226$, $\lambda = 338$, $\theta^* = -20$, $\theta_0 = 10$ とする。このとき, ϕ の近似は 0.205428 で与えられる。

5.3 数値実験

我々の数値スキームの有用性を示すために数値実験を行う。実験は CPU が Intel Pentium M 1.2 GHz のパソコンで行う。Newton 法反復の許容誤差は 10^{-15} とし, $\mu = 0.79$ とする。我々のスキームは時間空間分割数の他に, μ と ε をパラメータとして持っているが, μ の値は数値結果にはほとんど影響しない。

まず, 空間領域内の格子点数 $N_X = 50$, 時間分割数 $N_T = 10$, $\varepsilon = 10^{-7}$ ととり, 数値実験を行った。図 2 は, 時刻 $t = 0.21, 0.41, 0.61, 0.81, 1.01$ における数値エンタルピーと真の解とを比較したものである。時間刻み幅は 0.1 と大きいにもかかわらず, 数値解は真の解にかなり近いことが見て取れる。解の不連続性もよく捉えられている。図 3 は界面の位置を示している。ここで, 空間について 1 次補間し, s^n を $Z^n(s^n) = \lambda/2$ となる点とする。このときの s^n を時刻 $t^n = n\tau + T_0$ における数値界面の位置とした。時間刻み幅 $\tau = 0.1$ の間に, 界面の位置は劇的に移動するにも

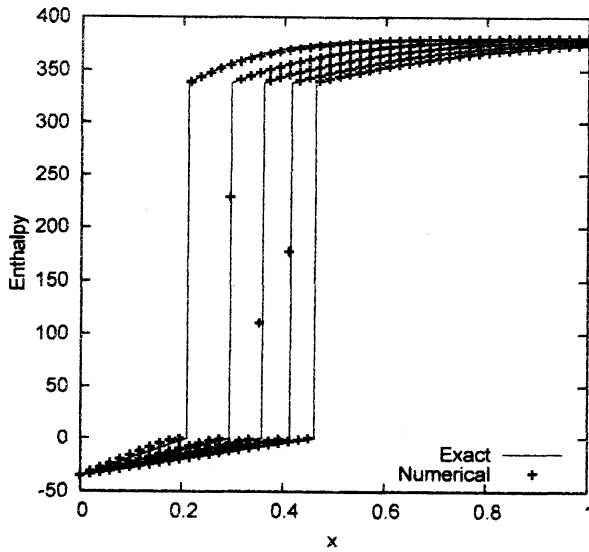


図2 Solutions.

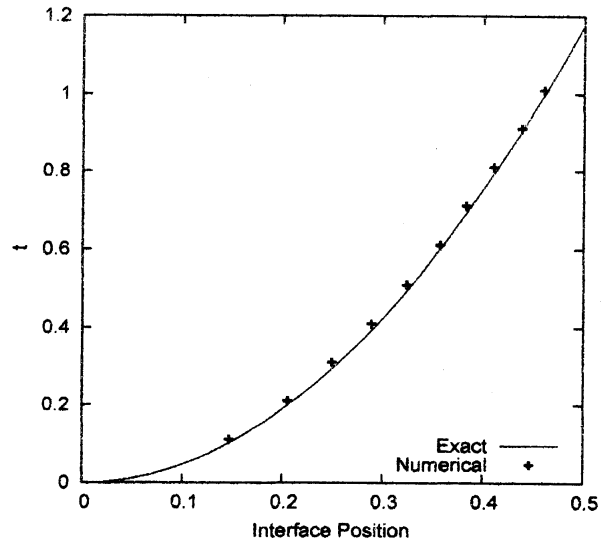


図3 Free boundaries.

かわらず、数値解は真の解をかなり良い精度で近似していることが分かる。この数値結果はエンタルピーと界面の位置の近似において我々のスキームが有効であることを示している。因みに、他の方法でも数値実験を行ったが、 $\tau = 0.1$ という大きな時間刻み幅では良い近似は得られなかった。時間刻み幅 τ が大きくても良い近似が得られるため、moving mesh 法を適用した場合に、非常に効率的な数値解法が得られることが期待できる。

次に、 $N_X = 10^3$ と $N_T = 10^3$ を固定して、 ε を変えたときの収束性について調べる。このために、 E_E , E_T , E_T^∞ , E_I をそれぞれ、エンタルピーに関する相対離散 $L^2(Q)$ 誤差、温度に関する相対離散 $L^2(Q)$ 誤差、相対離散 $L^\infty(Q)$ 誤差、界面の位置に関する離散 $L^\infty(T_0, T)$ 誤差とする。つまり、

$$E_E = \left(\sum_{\substack{0 \leq i \leq N_X \\ 0 \leq n \leq N_T}} |Z_i^n - z(x_i, t^n)|^2 / \sum_{\substack{0 \leq i \leq N_X \\ 0 \leq n \leq N_T}} |z(x_i, t^n)|^2 \right)^{1/2},$$

$$E_T = \left(\sum_{\substack{0 \leq i \leq N_X \\ 0 \leq n \leq N_T}} |\theta(U_i^n) - \theta(\beta(z(x_i, t^n)))|^2 / \sum_{\substack{0 \leq i \leq N_X \\ 0 \leq n \leq N_T}} |\theta(\beta(z(x_i, t^n)))|^2 \right)^{1/2},$$

$$E_T^\infty = \max_{\substack{0 \leq i \leq N_X \\ 0 \leq n \leq N_T}} |\theta(U_i^n) - \theta(\beta(z(x_i, t^n)))| / \max_{\substack{0 \leq i \leq N_X \\ 0 \leq n \leq N_T}} |\theta(\beta(z(x_i, t^n)))|,$$

$$E_I = \max_{0 \leq n \leq N_T} |s^n - s(t^n)|$$

と定義する。ここで、 Z_i^n と U_i^n は $x_i = i/(N_X + 1)$, t^n における真の解 z と $u = \beta(z)$ の近似解である。エンタルピーに関する誤差 $E_E = E_E(\varepsilon)$ の収束のオーダーが $O(\varepsilon^{\alpha_E})$ とすると、つまり、ある正の数 C に対して $E_E(\varepsilon) = C\varepsilon^{\alpha_E}$ が成り立つとすると、指数 α_E は次のように書くことがで

表 1 Results with $N_X = 10^3$ and $N_T = 10^3$.

ε	E_E	α_E	E_T	α_T	E_T^∞	α_T^∞	E_I	α_I	CPU	ITR
4^{-5}	0.10619		0.09716		0.39361		0.01989		1.82	2.6
4^{-6}	0.07330	0.27	0.04796	0.51	0.26315	0.29	0.00844	0.62	1.83	2.7
4^{-7}	0.05114	0.26	0.02373	0.51	0.15589	0.38	0.00384	0.57	1.83	2.7
4^{-8}	0.03585	0.26	0.01171	0.51	0.08545	0.43	0.00189	0.51	1.85	2.8
4^{-9}	0.02518	0.25	0.00578	0.51	0.03899	0.57	0.00094	0.50	1.84	2.7
4^{-10}	0.01781	0.25	0.00285	0.51	0.01642	0.62	0.00047	0.49	1.86	2.8
4^{-11}	0.01204	0.28	0.00158	0.43	0.01027	0.34	0.00027	0.42	1.85	2.8

きる.

$$\alpha_E = \frac{\log(E_E(\varepsilon_1)/E_E(\varepsilon_2))}{\log(\varepsilon_1/\varepsilon_2)}.$$

温度や界面の位置に関する誤差の収束のオーダー α_T , α_T^∞ , α_I も同様に定義する. 表 2 で用いる τ に関する収束のオーダー α_T^∞ など同様に定義する. 実際の計算時間 (秒) を CPU で表し, Newton 法の時間ステップごとの平均反復回数を ITR で表す. 実験結果は表 1 の通りである. パラメータ ε を 0 に近づけると, 数値解が真の解に収束していることが見られる. 温度に関する L^∞ 誤差も 0 に収束していることが見られ, 近似界面も真の界面に収束していることが分かる. オーダーはエンタルピーに関しては $O(\varepsilon^{1/4})$, 温度 (L^2) と界面の位置に関しては $O(\varepsilon^{1/2})$ であるようである. 温度に関して, L^∞ ノルムでの収束のオーダーにはばらつきがあるが, 概ね $O(\varepsilon^{1/2})$ といったところであろうか. この実験では, 計算時間と必要な Newton 反復の回数は ε によらない. しかし, ε を小さく ($\varepsilon = 4^{-12}, 4^{-13}$ など) とすると, Newton 法が収束しない. 数値界面の位置は補間により求めている. 空間刻み幅は約 10^{-3} であるため, 界面の位置に関する誤差はその半分の $10^{-3}/2$ くらいが限界であろう. 実際の界面の位置に関する誤差を見てみると, ε が 4^{-10} 以下では $10^{-3}/2$ 以下になっており, $\varepsilon = 4^{-10}, 4^{-11}$ くらいで十分な近似が得られていると考えられる. したがって, 時間空間分割数に応じてうまく ε をとると, 効率的に数値解を得ることができるであろう.

次に, $N_X = 10^3$, $\varepsilon = 0.1\tau^2$ として, 時間刻み幅 τ を小さくしたときの収束性について調べる. 数値結果を表 2 に示す. 温度に関する L^2 誤差は τ に関して線形であり, 退化型の場合の解析的結果よりも良い. エンタルピーと界面の位置に関する収束のオーダーはそれぞれ $O(\tau^{1/2})$ と $O(\tau)$ のようである. 時間刻み幅 τ が 0 に近づいても, Newton 反復の平均回数は増えていないことが分かる. このことは, 我々のスキームの有用性を表している.

我々の数値結果 (表 2) と Kačur 等の方法 (3) による結果とを比較する. 計算には次の値を使う: $N_X = 10^3$, $\alpha = 0.999$, $K = 10 \times N_T$. また, (3) の 2 番目の不等式の $o(1/\sqrt{N_T})$ の部分は τ で置き換える. Kačur [12] 等は (3) を用いて Stefan 問題に対する数値実験を行っているが, β の

表 2 Results with $\varepsilon = 0.1 \times \tau^2$.

τ	E_E	α_E^τ	E_T	α_T^τ	E_T^∞	$\alpha_T^{\infty, \tau}$	E_I	α_I^τ	CPU	ITR
0.1	0.10943		0.08643		0.17424		0.01849		0.016	4.9
0.1×2^{-1}	0.07566	0.53	0.04668	0.89	0.16617	0.07	0.00897	1.04	0.047	4.8
0.1×2^{-2}	0.05280	0.52	0.02484	0.91	0.14264	0.22	0.00440	1.03	0.093	4.7
0.1×2^{-3}	0.03710	0.51	0.01297	0.94	0.10866	0.39	0.00210	1.07	0.188	4.5
0.1×2^{-4}	0.02574	0.53	0.00665	0.96	0.07230	0.59	0.00103	1.03	0.375	4.3
0.1×2^{-5}	0.01807	0.51	0.00338	0.98	0.04160	0.80	0.00050	1.05	0.719	3.8
0.1×2^{-6}	0.01217	0.57	0.00174	0.96	0.01998	1.06	0.00031	0.70	1.281	3.3

近似 β_{N_T} については何も述べていない。ここでは、 β_{N_T} として次の関数を採用する。

$$\beta_{N_T}(s) = \begin{cases} \kappa_2(s - \lambda) & \text{if } s > \lambda + \xi\lambda/(2(\kappa_2 - \xi)), \\ \kappa_1 s & \text{if } s < -\xi\lambda/(2(\kappa_1 - \xi)), \\ \xi(s - \lambda/2) & \text{otherwise.} \end{cases}$$

ここで、 $\xi = 10^{-4}\tau$ とする。この関数は C^2 級ではないが、数値計算には影響ないであろう。図 4 は我々の方法と Kačur 等の方法 (3) による結果を示している。同じ時間刻みの場合、我々の方法の方が精度が良く、特に、温度の L^∞ ノルムと界面の位置に関する精度は我々の方法の方が圧倒的に良い。計算時間に関する比較を図 5 に示す。我々の方法のほうが少ない計算時間で良い精度に達していることが分かる。界面の位置に関しては、同じ精度を得るために我々の方法は (3) に比べて 10 分の 1 以下の計算時間しか掛からない。このように、このテスト問題に関してであるが、我々の方法は短い計算時間で精度良く数値解を求めることのできる、効率の良い数値スキームであると言えよう。

実は、異なる数値解法を比較することは容易ではない。Kačur 等の方法 (3) を用いた数値実験では、数多くの数値実験を行った上で、計算時間に対して精度が良いパラメータを選んだが、より良いパラメータがあるかもしれない。しかしながら、我々のスキームの方が (3) よりも解析でも数値実験でも容易であることは事実であろうし、ここでは見えなかった利点もあろう。例えば、(3) の方がパラメータの数は多いし、(3) では β の近似、その逆関数、さらに人工的な cut-off 関数が必要である。我々の方法には、関数 f が強い非線形性を持つ場合にも手続きを変えずに、陰解法などを適用できるという利点もある。また、我々の方法において、 μ を関数に置き換えるという Kačur 等のアイデアを適用することも可能であると思われる。

我々の方法の有効性を示してきた。上にも述べたが、空間離散に moving mesh 法を適用した場合には、さらに効率的に数値解を得ることができるであろう。解法の詳細については省くこととするが、最後に、moving mesh 法を適用したときの数値実験結果を述べる。上記の問題において $T_0 = 0.0012$, $T = 0.288$ とし、空間分割数を 40, 時間刻みを $\tau = 0.0012$ とする。これは Mackenzie と Robertson [14] が行った数値実験の問題と同じである。また、 $\varepsilon = 10^{-7}$ とする。図 6 左は $t = 0.0024, 0.0036, 0.018, 0.072, 0.144, 0.288$ における真の解と我々の方法を用いた数値解を示したものである。時間刻み幅が十分小さいこともあり、精度よく近似できていることが分

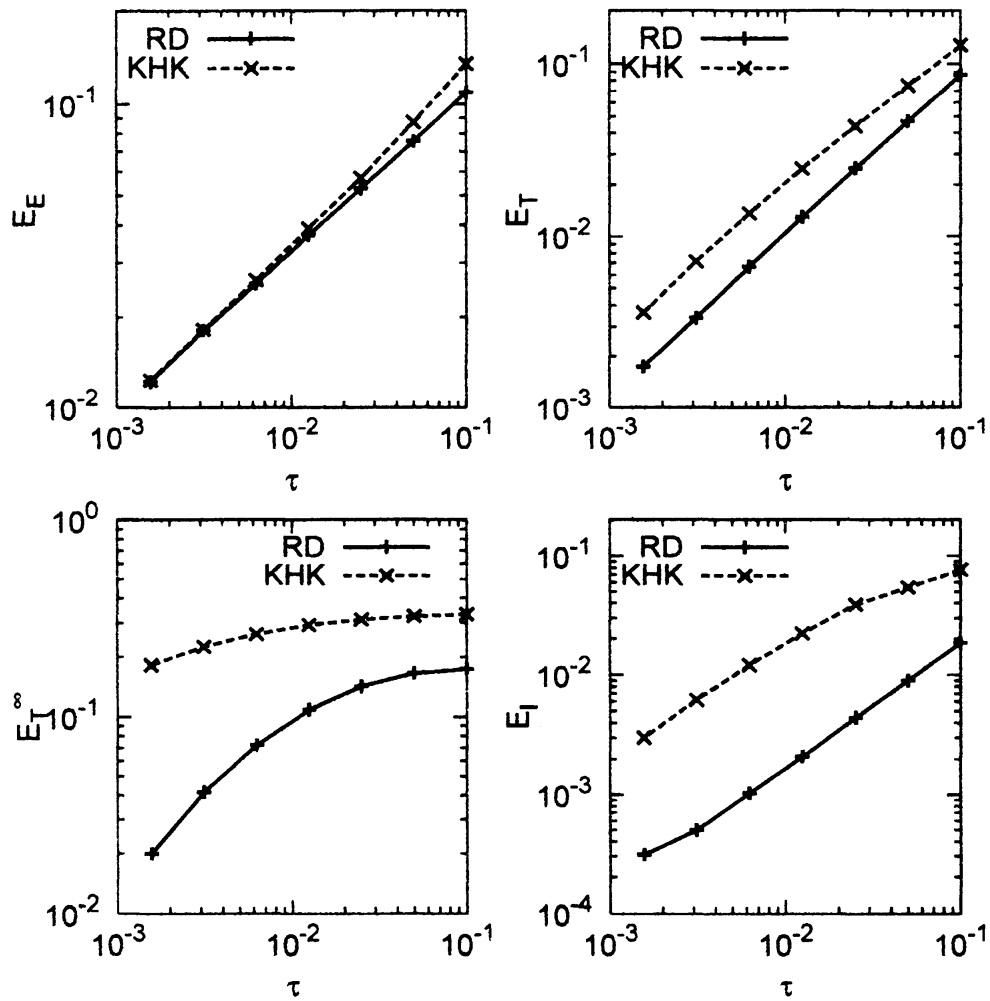


図4 Comparison between our method(RD) and the method by Kačur et al.(KHK). Errors vs. τ .

かる. Mackenzie と Robertson [14] を参照していただき、我々の結果との違いを見ていただきたい。Mackenzie と Robertson の解法ではエンタルピーが急激に変化する部分において少なくとも2つの格子点が必要であるとのことである。そうなるようにパラメータを選ばなければならないと共に、数値解は界面付近でなまってしまう。我々の方法ではそのようなことは(少なくとも今回の数値実験では) 気にする必要はなく、解の不連続性が良く捉えられている。このことは、界面についても良い近似が得られることを示唆しており、実際に精度の良い近似界面が得られている(図6右)。

謝辞

本研究は科学研究費補助金(若手研究(B), 課題番号 19740046)の援助を受けています。

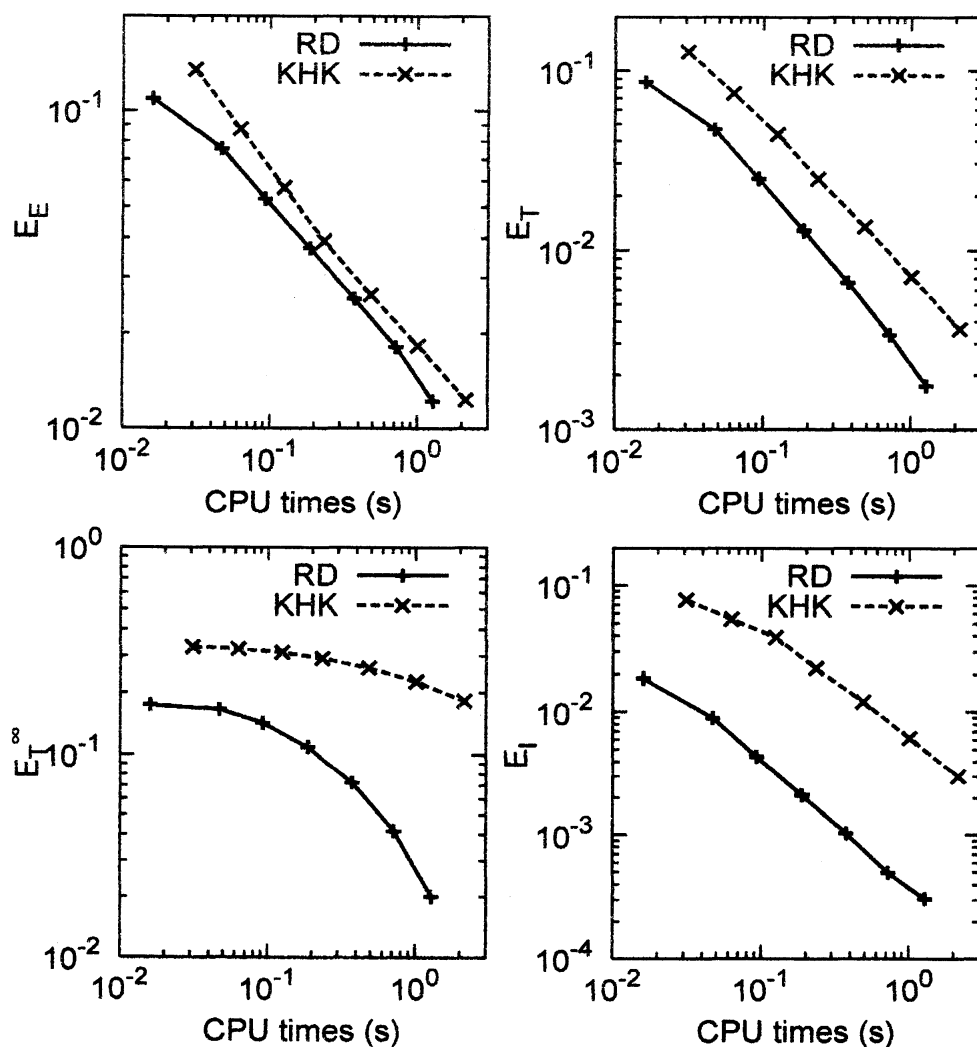


图 5 比较我们的方法(RD)和Kačur et al.(KHK)的方法。
Errors vs. CPU time.

参考文献

- [1] H. W. ALT AND S. LUCKHAUS, *Quasilinear elliptic-parabolic differential equations*, Math. Z., 183 (1983), pp. 311–341.
- [2] G. Beckett, J. A. Mackenzie and M. L. Robertson, A moving mesh finite element method for the solution of two-dimensional Stefan problems, *J. Comp. Phys.* **168** (2001), 500–518.
- [3] A. E. Berger, H. Brezis and J. C. W. Rogers, A numerical method for solving the problem $u_t - \Delta f(u) = 0$, *R.A.I.R.O. Anal. Numér.* **13** (1979), 297–312.
- [4] L. A. Caffarelli and A. Friedman, Regularity of the free boundary for the one-dimensional

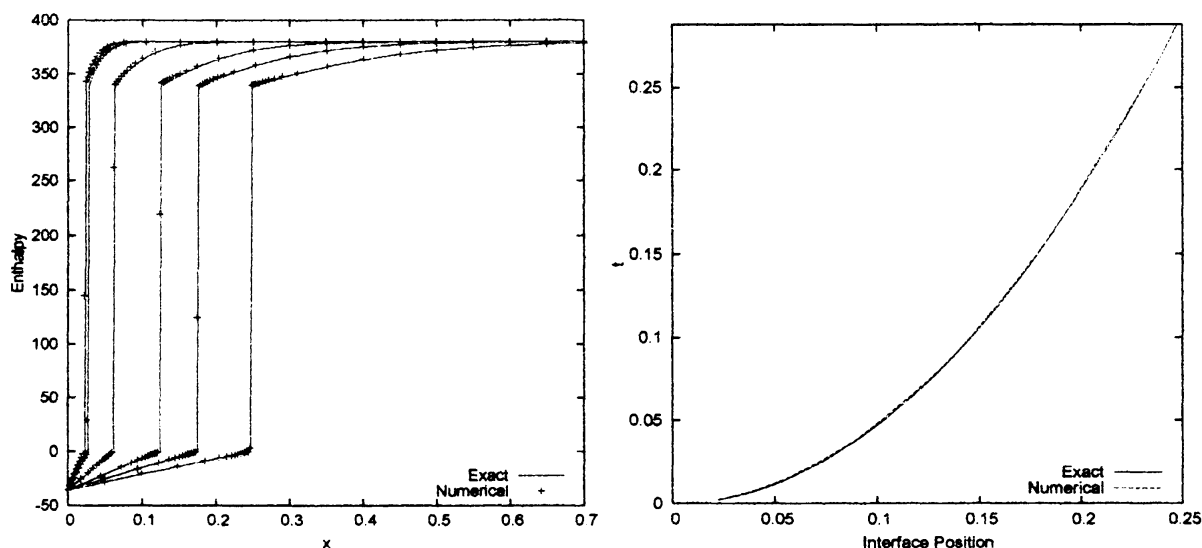


Fig. 6 Numerical results by our moving mesh method.

- flow of gas in a porous medium, *Amer. J. Math.* **101** (1979), 1193–1218.
- [5] L. A. Caffarelli and A. Friedman, Regularity of the free boundary of a gas flow in an n -dimensional porous medium, *Indiana Univ. Math. J.* **29** (1980), 361–391.
 - [6] J. Crank, *Free and moving boundary problems*, Clarendon Press, Oxford, 1984.
 - [7] A. DAMLAMIAN, *Some results on the multi-phase Stefan problem*, Comm. Partial Differential Equations, **2** (1977), pp. 1017–1044.
 - [8] C. M. Elliott, Error analysis of the enthalpy method for the Stefan problem, *IMA J. Numer. Anal.* **7** (1987), 61–71.
 - [9] R. M. Furzeland, A comparative study of numerical methods for moving boundary problems, *J. Inst. Maths Applics* **26** (1980), 411–429.
 - [10] W. Jäger and J. Kačur, Solution of porous medium type systems by linear approximation schemes, *Numer. Math.* **60** (1991), 407–427.
 - [11] J. W. Jerome and M. E. Rose, Error estimates for the multidimensional two-phase Stefan problem, *Math. Comp.* **39** no. 160 (1982), 377–414.
 - [12] J. Kačur, A. Handlovičová and Kačurová, Solution of nonlinear diffusion problems by linear approximation schemes, *SIAM J. Numer. Anal.* **30** no. 6 (1993), 1703–1722.
 - [13] E. Magenes, R. H. Nochetto and C. Verdi, Energy error estimates for a linear scheme to approximate nonlinear parabolic problems *Math. Mod. Numer. Anal.* **21** (1987), 655–678.
 - [14] J. A. Mackenzie and M. L. Robertson, The numerical solution of one-dimensional phase change problems using an adaptive moving mesh method, *J. Comp. Phys.* **161** (2000), 537–557.
 - [15] H. Murakawa, Reaction-diffusion system approximation to degenerate parabolic systems,

Nonlinearity **20** (2007), 2319–2332.

- [16] H. Murakawa: Discrete-time approximation to nonlinear degenerate parabolic problems using a semilinear reaction-diffusion system. Preprint.
- [17] R. H. Nochetto, A class of non-degenerate two-phase Stefan problems in several space variables, *Comm. Partial Differential Equations* **12** (1987), 21–45.
- [18] R. H. Nochetto, Error estimates for two-phase Stefan problems in several space variables, I: linear boundary conditions, *Calcolo* **22** (1985), 457–499.
- [19] R. H. Nochetto, Error estimates for two-phase Stefan problems in several space variables, II: non-linear flux conditions, *Calcolo* **22** (1985), 501–534.
- [20] R. H. Nochetto, A note on the approximation of free boundaries by finite element methods, *RAIRO Modél. Math. Anal. Numér.* **20** (1986) 355–368.
- [21] R. H. Nochetto, M. Paolini and C. Verdi, An adaptive finite element method for two-phase Stefan problems in two space dimensions. Part I: stability and error estimates, *Math. Comp.* **57** no. 195 (1991), 73–108.
- [22] R. H. Nochetto, M. Paolini and C. Verdi, An adaptive finite element method for two-phase Stefan problems in two space dimensions. Part II: implementation and numerical experiments, *SIAM J. Sci. Stat. Comput.* **12** no. 5 (1991), 1207–1244.
- [23] R. H. Nochetto, M. Paolini and C. Verdi, A fully discrete adaptive nonlinear Chernoff formula, *SIAM J. Numer. Anal.* **30** no. 4 (1993), 991–1014.
- [24] R. H. Nochetto and C. Verdi, An efficient linear scheme to approximate parabolic free boundary problems: error estimates and implementation, *Math. Comp.* **51** no. 183 (1988), 27–53.
- [25] R. H. Nochetto and C. Verdi, Approximation of degenerate parabolic problems using numerical integration, *SIAM J. Numer. Anal.* **25** no. 4 (1988), 784–814.
- [26] R. H. Nochetto and C. Verdi, The combined use of a nonlinear Chernoff formula with a regularization procedure for two-phase Stefan problems, *Numer. Funct. Anal. Optimiz.* **9** (1988), 1177–1192.
- [27] J. M. Ortega and W. C. Rheinboldt, *Iterative solution of nonlinear equations in several variables*, Academic Press, New York-London 1970.
- [28] C. Verdi, Optimal error estimates for an approximation of degenerate parabolic problems, *Numer. Funct. Anal. Optimiz.* **9** (1987), 657–670.
- [29] C. Verdi, Numerical aspects of parabolic free boundary and hysteresis problems, *Lecture Notes in Mathematics* **1584** (1994), 213–284.
- [30] A. Visintin, *Models of phase transitions*, Birkhäuser, Boston, 1996.