

Multivariate Tests with Restricted Alternatives

九大 理学部 工藤 昭夫

§ 1. 序

p 次元正規分布 $N(\theta, \Sigma)$ について。帰無仮説 $H_0: \theta = \theta_0$ の検定法は $H_1: \theta \neq \theta_0$ のときには次の3種の事情に応じた検定法がある。a) Σ 既知のとき、b) $\Sigma = \sigma^2 \Lambda$ と書けて Λ は既知、 σ^2 未知であるが χ^2 分布 (自由度 m) をし 標本平均ベクトルと独立な $m\sigma^2$ の推定値が存在する場合 c) Σ が全く未知であるときの それぞれの場合の検定は a) 自由度 p の χ^2 分布によるもの、b) 自由度 p, n の F 分布によるもの、c) Hotelling T^2 を用いた検定があり、それらの検定の性質もよく知られている。 $|\Sigma| = 0$ のときには a) および b) の場合には p の代りに $\text{rank}(\Sigma)$ を用いればよいことも知られている。

ここでは $\theta' = (\theta_1, \dots, \theta_p)$ としたとき $H_1: \theta_i \geq 0 \ i=1, \dots, p$ (p 個の不等式のうち少なくとも1個は $\neq$) 即ち

multivariate analogue of sided test および H_1 :
 $\theta \geq 0$ ($i=1, \dots, p$) 或いは $\theta_i \leq 0$ ($i=1, \dots, p$), などの形の対
 立仮説を持つ検定についての研究も 既発表のものと未発表
 のものをまとめて 総合報告をする。

§2. Σ が既知の場合の片側検定

大きさ n の標本の平均値ベクトルも $\bar{x}$ とする。尤度比検
 定の統計量は $n\{\bar{x}'\Sigma^{-1}\bar{x} - \min_{\substack{\theta_i \geq 0 \\ i=1, \dots, p}} (\bar{x} - \theta)' \Sigma^{-1} (\bar{x} - \theta)\} = n\{\bar{x}'\Sigma^{-1}\bar{x} - (\bar{x} - x^0)' \Sigma^{-1} (\bar{x} - x^0)\}$ であ
 る。右辺の x^0 は対立仮説のもとでの平均値ベクトルの最尤推
 定で *unique* に存在する。

この統計量の分布は次の定理により与えられる。統計量を
 $\bar{x}^2$ と書くと

$$P(\bar{x}^2 \geq \bar{x}_0^2) = \sum_{\emptyset \neq M \subseteq P} P(\chi^2_{n(M)} \geq \bar{x}_0^2) P\{(\Sigma_M)^{-1}\} P\{\Sigma_{M^c} M^c\}$$

ここで Σ は $P = (1, \dots, p)$ の部分集合 M (例えば $M_0 = (1, 2, \dots, m)$) についての和で M が空集合 $\emptyset$ のこともあり得
 る。 $\chi^2_{n(M)}$ は M の要素の数 ($n(M_0) = m$) を自由度に持つ
 χ^2 変量 $P\{A\}$ は z が $N(0, 1)$ に従って分布するとき、
 z のすべての component が ≥ 0 である確率 M^c は M の補集
 合 ($M^c = (m+1, \dots, p)$) Σ_M は $x_i, i \in M$ の分散行列, (Σ_{M^c}
 は, $x_{m+1}, \dots, x_p$ の分散行列) $\Sigma_{M^c M^c}$ は $x_j: j \in M^c$ を条件
 づけたときの $x_i, i \in M$ の分散行列 ($\Sigma_{M_0 M_0^c}$ は $x_{m+1}, \dots,$
 x_p を止めたときの $(x_1, \dots, x_m)$ の条件附分散行列。 $\bar{x}_0^2 = 0$,

$$P(\Sigma_P^{-1}) = P(\Sigma_{P|P}) = 1$$

この分布を導くには次の定理が必要である。高次元空間中に独立な k 個のベクトル $(a_1, \dots, a_k)$ を取り、 $S = \{y: (a_i, y) \geq 0, i=1, \dots, k\}$ とする。 S は closed convex polyhedral cone になる。 S の外点 y_1 に最も近い S の点を $\hat{y}_1$ とし、部分空間 $\{y: (a_i, y) = 0, i=1, \dots, m\}$ への y_1 の射影を $\hat{y}_1$ と書く。 $a^{(i)}$ を $(a_1, \dots, a_m)$ である空間にはいり $(a^{(i)}, a_j) = \delta_{ij}$ ($i, j=1, \dots, m$) であるようなベクトルとする。

定理 1. $(a_i, y_0) = 0, i=1, \dots, m, (a_i, y_0) > 0, i=m+1, \dots, k$ であるための必要十分条件は $(a^{(i)}, y_1) \leq 0, i=1, \dots, m, (a_i, \hat{y}_1) > 0, i=m+1, \dots, k$

$\bar{x}$ の分散行列 $\frac{1}{n} \Sigma$ に対して $\frac{1}{n} A \Sigma A' = I$ となる行列 A を取り $Y = AX$ と変数変換をすれば、密度関数は $C \exp \left[-\frac{1}{2} (y - A\theta)' (y - A\theta) \right]$ と書けるので 相互反説のもとでの θ , 最尤推定の問題は、 y が与えられたとき

$\min_{A'm \geq 0} (y - m)' (y - m) = (y - m_0)' (y - m_0)$ を満足する m_0 を求める問題に帰着する。 θ の最尤推定量 $\hat{\theta}$ のコンポーネントは幾つかは $= 0$ (例えば $\theta_i = 0, i \notin M$) 幾つかは > 0 ($\theta_i > 0, i \in M$)。 M は P の部分集合のどれかであり 2^P 通りの可能性がある。標本平均値ベクトルの空間もそれに対応して 2^P 通りにわけられる。定理 1 は y が標本平均値の空間のどこには

いるかを特徴づける定理である。

この§の内容は Kudô 1963, Niinich 1966 に於いて
る

§3 Σ が既知の場合の両側検定

ここで言う両側検定とは $H_1; \theta_i \geq 0$ ($i=1, \dots, p$) 或いは
 $\theta_i \leq 0$ ($i=1, \dots, p$) (どちらの場合でも少くとも一つの θ_i につ
いて $\neq 0$ が成立する) を対立仮説とする検定である。対立仮
説の空間は 片側検定の場合の対立仮説 $H_1^{(+)}$ の空間 $\Omega^{(+)}$ と
 ≥ 0 を ≤ 0 で入れ替えて出来た対立仮説 $H_1^{(-)}$ の空間 $\Omega^{(-)}$ と
の和集合 $\Omega^{(+)} \cup \Omega^{(-)}$ となっている。検定問題 $(H_0, H_1^{(+)})$ と
 $(H_0, H_1^{(-)})$ の検定統計量を $\bar{x}^{(+)}$, $\bar{x}^{(-)}$ と書くと (H_0, H_1)
のそれは $\bar{x}^2 = \text{Max}(\bar{x}^{(+)2}, \bar{x}^{(-)2})$ となるが その分布および検
定力関数は Kudô and Fujisawa 1964, 1966 2次元の場合
のみ求められている。次元数が2より大なる場合には 非
常に複雑になるが $\Sigma = I$ の場合には

$$\begin{aligned} \Pr(\bar{x}^2 \geq C^2) &= \frac{1}{2^{k-1}} \sum_{m=1}^k C_m \Pr(\chi_m^2 \geq C^2) \\ &\quad - \frac{1}{2^k} \sum_{m=1}^k C_m \Pr(\chi_m^2 \geq C^2) \Pr(\chi_{k-m}^2 \geq C^2) \end{aligned}$$

が 九代の葉能哲氏により求められており、数表の作製を計
画中である。

§3 Σ が既知でない場合

§1 で述べたように (a) (c) 2つの場合があるが (a)

の場合には 片側検定の検定統計量は $n(\bar{x} - x_0)'A^{-1}(\bar{x} - x_0)/\hat{\sigma}^2$ となる。但し $\hat{\sigma}^2$ は σ^2 , 不偏推定量である。

この統計量 $\bar{F}$ の分布は

$$P_r(\bar{F} \geq \bar{F}_0) = \sum_{\phi \leq M \leq P} P_r(F_{n(M)}, m \geq n(M)\bar{F}_0) P(\Sigma_{H'}) P(\Sigma_{H, M'})$$

となる。両側検定も同様である。c) の場合には、解くことは非常に困難で Niesch 1966 で提案している検定は 1. 計算間違いがあるので尤度比検定と云えない。2. その結果統計量自身が未知母数 Σ に依存する 3. H_0 のもとでの分布が Σ に依存する欠点がある。 Σ を標本分散行列から推定し、それを Σ であるかの如く統計量を計算すれば 2 の欠点は克服出来るが 3. の欠点 すなわち分布が Σ に無関係に出来るかどうかは分らない。

§ 4. 応用と拡張

線型回帰モデル, $E(y) = \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_k x_k$, $V(y) = \sigma^2$ を考え 正規性を仮定すれば $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ の線型最良推定 $(\hat{\lambda}_1, \dots, \hat{\lambda}_k)$ の分散は 部分的に既知 即ち b) の場合になる。

$\lambda_1, \dots, \lambda_k$ の m 個の線型関数 $L_1, \dots, L_m$ について、

$H_0: L_i = 0$ ($i=1, \dots, m$). $H_1: L_i \geq 0$ ($i=1, \dots, m$) とする検定問題は L_i が独立で $m \leq k$ の場合には L_i の最良線型推定量 に片側検定の手法を適用すればよい。 Bartholomew 1959, 1961 に述べられている問題は上に述べた一般の for-

mulation のうちにはいる。問題は $m \geq k$ の場合である。

変数変換をすれば $(\hat{\lambda}_1, \dots, \hat{\lambda}_k)$ は 分散行列 $\sigma^2 I$, を持つ変量 $y_1, \dots, y_k$ に変換出来るので、そこから問題を考えることにする。

$y_1, \dots, y_p$ が独立で平均 $\theta_1, \dots, \theta_p$ 共通の分散 1 を持つとする。 $a_1, \dots, a_k$ ($k > p$) を p 次元 vector とし $\theta' = (\theta_1, \dots, \theta_p)$ とする。 $(a_1, \dots, a_k)$ の張る空間 $\dim \{a_1, \dots, a_k\} = p$ とする。(この仮定は必ずしも必要ではない。 $H_0: (a_i, \theta) = 0$, $H_1: (a_i, \theta) \geq 0$ なる検定問題を考える。このとき $(a_i, \theta) \geq 0$ を満足する θ の集合は空ではないとする。尤度比検定は簡単に求められる 即ち $\bar{\chi}^2 = \chi^2 - \min_{(a_i, \theta) \geq 0} (y - \theta)'(y - \theta)$ である。

この統計量の分布を求めるためには定理 1 の拡張が必要である。 $\mathcal{S}$, y_1 , y_0 , $\hat{y}_1$ を定理 1 の場合と同様に定義する。 $\dim \{a_1, \dots, a_m\} = l (\leq m)$ とする。 $a_1, \dots, a_m$ から $l-1$ 個の独立なベクトル, 一般性を失うことなく $a_1, \dots, a_{l-1}$ を取る。 $a^{(l)}$ としては、 $a^{(l)} \in \{a_1, \dots, a_m\}$, $(a^{(l)}, a_i) = 0$, $i=1, \dots, l-1$, $(a^{(l)}, a_i) > 0$, $i=l, l+1, \dots, m$ となるような $a^{(l)}$ を考える。

定理 2. $(a_i, y_0) = 0$ ($i=1, \dots, m$), $(a_i, y_0) > 0$ ($i=m+1, \dots, k$) であるための必要十分条件は, 上により定めたすべての $a^{(l)}$ に対して $(a^{(l)}, y_1) \leq 0$, および $(a_i, \hat{y}_1) > 0$, $i=m+1,$

..., k.

この定理を用いれば $\bar{x}^2$ の分布を求めることが出来るが
その具体的な形は $(a_1, \dots, a_k)$ で非常に複雑な形で定まる
ので一般の形は省略する。

この部分は 葉, 工藤の最近の結果で, 未発表のものである。

実例として x_1, x_2, x_3 が独立な正規分布 $N(\theta_i, 1)$ ($i=1, 2, 3$)
とし, $H_0: \theta_1 = \theta_2 = \theta_3 = 0$, $H_1: \theta_1 \geq 0, \theta_2 \geq 0, \theta_3 \geq 0, \theta_1 + \theta_2 - \theta_3 \geq 0$
を持つ仮説検定問題を考える. (sample size が 1 とする仮定, 分散が 1 とする仮定は, 前述の理由からここでは一般性を失わない). 尤度比検定は $\bar{x}^2 = \{x'x - \min_{(a_i, \theta) \geq 0} (x - \theta)'(x - \theta)\}$
と検定統計量として持つ. 但し $a'_1 = (1, 0, 0)$, $a'_2 = (0, 1, 0)$,
 $a'_3 = (0, 0, 1)$, $a'_4 = (1, 1, -1)$.

定理 2. を用いて $\bar{x}^2$ の分布を計算すると

$$\begin{aligned} P_r(\bar{x}^2 \geq c^2) &= P_r(\bar{x}_{(0)}^2 \geq c^2) P_r(\bar{x}_1 \leq 0, \bar{x}_2 \leq 0, \bar{x}_1 + \bar{x}_3 \leq 0, \bar{x}_2 + \bar{x}_3 \leq 0) \\ &\quad + P_r(\bar{x}_{(1)}^2 \geq c^2) [P_r(\bar{x}_1 > 0, \bar{x}_2 \leq 0, \bar{x}_3 \leq 0) + P_r(\bar{x}_2 > 0, \bar{x}_3 \leq 0, \bar{x}_1 \leq 0) \\ &\quad + P_r(\bar{x}_2 + \bar{x}_3 > 0, \bar{x}_2 - \bar{x}_3 \leq 0, 2\bar{x}_1 - \bar{x}_2 + \bar{x}_3 \leq 0) \\ &\quad + P_r(\bar{x}_1 + \bar{x}_3 > 0, \bar{x}_1 - \bar{x}_3 \leq 0, 2\bar{x}_2 - \bar{x}_1 + \bar{x}_3 \leq 0)] \\ &\quad + P_r(\bar{x}_{(2)}^2 \geq c^2) [P_r(\bar{x}_1 > 0, \bar{x}_2 > 0, \bar{x}_3 \leq 0) + P_r(\bar{x}_3 > 0, \bar{x}_2 - \bar{x}_3 > 0, \\ &\quad \bar{x}_1 \leq 0) + P_r(\bar{x}_1 - \bar{x}_3 > 0, \bar{x}_3 > 0, \bar{x}_2 \leq 0) + P_r(2\bar{x}_1 - \bar{x}_3 + \bar{x}_3 > 0, \\ &\quad 2\bar{x}_2 - \bar{x}_1 + \bar{x}_3 > 0, \\ &\quad \bar{x}_1 + \bar{x}_2 - \bar{x}_3 \leq 0)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + P_r(\bar{\chi}_3^2 \geq C^2) P_r(\bar{x}_1 > 0, \bar{x}_2 > 0, \bar{x}_3 > 0, \bar{x}_1 + \bar{x}_2 - \bar{x}_3 > 0) \\
& = \frac{1}{6} P_r(\bar{\chi}_{(0)}^2 \geq C^2) + \left[\frac{3}{4} - \frac{1}{4\pi} \cos^{-1}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \right] P_r(\bar{\chi}_{(1)}^2 \geq \frac{C^2}{n}) \\
& + \frac{1}{3} P_r(\bar{\chi}_{(2)}^2 \geq C^2) + \left[\frac{3}{8} - \frac{1}{4\pi} \left(\cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}}\right) + \cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \right) \right] P_r(\bar{\chi}_{(3)}^2 \geq \frac{C^2}{n})
\end{aligned}$$

となる。

References

- Bartholomew, D. J., A test of homogeneity for ordered alternatives. *Biometrika*, 46, 35-48, (1959a)
- Bartholomew, D. J., A test of homogeneity for ordered alternatives. II. *Biometrika*, 46, 328-35, (1959b)
- Bartholomew, D. J., A test of homogeneity of means under restricted alternatives. *J. R. Statist. Soc. B*, 23, 239-81, (1961a)
- Bartholomew, D. J., Ordered tests in the analysis of variance. *Biometrika*, 48, 325-32, (1961b)
- Kudô, A., A multivariate analogue of the one-sided test. *Biometrika*, 50, 3 and 4, 403-18, (1963)
- Kudô, A. and Fujisawa, H., Some multivariate tests with restricted alternative hypotheses. *Multivariate analysis, Proceeding of an international symposium held in Dayton, Ohio, June 14-19, (1965)*
- Kudô, A. and Fujisawa, H., A bivariate normal test with two sided alternative. *Mem. Fac. Sci., Kyushu Univ., Ser. A, Math.*, 18, 1, 104-08, (1964)
- Nüesch, P. E., On the problem of testing location in multivariate populations for restricted alternatives. *Annals Math. Stat.*, 37, 1, 113-19, (1966)