

Real elliptic operator の解析的指数と Real Lie group の誘導表現

京大 理 河野 明

阪市大 理 橋本 伸

§1 序文

G を compact Real Lie group つまり, compact Lie group G で $\tau^2 = 1_G$ をみたす Lie group の同型 $\tau: G \rightarrow G$ を持つ物とする。 τ による, G と $\mathbb{Z}/2$ の半直積を $\tilde{G}$ と書き $\tilde{G}$ の元を (g, ε) , $g \in G$, $\varepsilon = \pm 1$ で表わす。 Real G space とは $\tilde{G}$ space X のこととする。

定義 1.1. M が Real G -module とは

- 1) M は $\mathbb{C}$ 上の有限次元 vector space.
- 2) M に G が連続かつ $\mathbb{C}$ -線型に作用する。
- 3) conjugate linear involution $\bar{\tau}: M \rightarrow M$ があって,
 $\bar{\tau}(g \cdot m) = \tau(g) \bar{\tau}(m)$ $g \in G$, $m \in M$ をみたす。

上の定義で, 1) を

1)' M は $\mathbb{C}$ 上の locally convex complete Hausdorff な linear topological space である。

に変えた物を "広い意味の Real G -module" と言う。

Real G module が irreducible e.t.c は complex G -module と同様に定義される。irreducible Real G -module で生成される自由アーベル群を $R_R(G)$ と書く。Real structure を forget して

$$\phi: R_R(G) \longrightarrow R(G)$$

が定義されるが, ϕ は単射であることがわかっていて [1]。

G の closed subgroup H は $\tau(H) \subset H$ ($\Leftrightarrow \tau(H)=H$) の時 Real subgroup と呼ばれる。さて, H を Real subgroup とし

$i_1: R(H) \rightarrow R(G)$ を Bott [3], Segal [6] の誘導表現とする。この時 橋本 [4] は

$$\begin{array}{ccc} R_R(H) & \xrightarrow{i_1} & R_R(G) \\ \phi \downarrow & & \downarrow \phi \\ R(H) & \xrightarrow{i_1} & R(G) \end{array}$$

を可換にする, 準同型 $i_1: R_R(H) \rightarrow R_R(G)$ を定義した。しかし [4] の定義は, transfer [5] を用いており, 直接 幾何学的意味をとらえにくい面がある。このノートの目的は, この $i_1: R_R(H) \rightarrow R_R(G)$ が実際に, ある Real elliptic operator の解析的指数で表現出来ることを示すことにある。注意すべきは, ϕ が常に単射であるから, 上の図式を可換にする $i_1: R_R(H) \rightarrow R_R(G)$ が存在すれば, それは一意になることである。よって, 上を可換にする i_1 は, すべて [4] の定義と一致する。

§2 Real G manifold の tangent space と tangent bundle.

M を smooth manifold とする時 $T(M)$ ($T^*(M)$) で M の tangent (cotangent) bundle を $T_x(M)$ ($T_x^*(M)$) で $x \in M$ における tangent (cotangent) space を表わす。Real G manifold とは smooth な $\tilde{G}$ manifold のこととする。今 Real G manifold M に対して, $T(M)$ に (又は同様に $T^*(M)$ に) $\tilde{G}$ が作用するが, この作用は我々の場合には少し都合が悪い。 $f: \mathbb{R} \rightarrow M$ を smooth map とする。

$$((g, \varepsilon)f)(t) = (g, \varepsilon)(f(\varepsilon t))$$

とおくと $((g, \varepsilon)f): \mathbb{R} \rightarrow M$ smooth map となる。この作用は自然に tangent bundle の smooth $\tilde{G}$ 作用になるが, この作用を持つ Real G manifold を $TR(M)$ と書く。

(Cotangent についても同様にして $TR^*(M)$ を定義する。)

$x \in M$ とし, $(e, \varepsilon)x = x$ $\varepsilon = \pm 1$ とする。この時

補題 2.1. $H_x = \{g \in G; (g, 1)x = x\}$ は Real subgroup

証明. $(\tau(g), 1) = (e, -1)(g, 1)(e, -1)$ より明らか。

$T_x(M)$ には H_x が作用するが, 上と同様に作用をとりかえた space を $TR_x(M)$ と書く。($TR_x^*(M)$) も同様。

$(x, 0) \in TR(M)$ をとると $(e, \varepsilon)(x, 0) = (x, 0)$ $H_{(x, 0)} = H_x$ が成立する。

今 $TR_{(x,0)}(TR(M))$ を考えると, 実数体上の vectorspace として,

$$TR_{(x,0)}(TR(M)) \cong T_x(M) \oplus T_x(M)$$

ここで 前の直和因子は M 方向の, 後の直和因子は $T_x(M)$ 方向の tangent vector を表わす。 $TR_{(x,0)}(TR(M))$ の H_x 作用は,

$$(g, \varepsilon)(u, v) = ((-1)^\varepsilon(g, \varepsilon)u, (g, \varepsilon)v)$$

と上の直和分解を使って書ける $g \in H_x, \varepsilon = \pm 1$ として,

$g(u, v) = (g, 1)(u, v)$ によって $TR_{(x,0)}(TR(M))$ を (実数体上の) H_x vector space と考える。この複素構造を $i(u, v) = (-v, u)$ で定義し $\bar{i}(u, v) = (e, -1)(u, v)$ とおく。

$$\bar{i} \circ i(u, v) = \bar{i}(-v, u) = (v, u)$$

$$i \circ \bar{i}(u, v) = i(-u, v) = (-v, -u) = -\bar{i} \circ i(v)$$

$$\begin{aligned} \bar{i}(g(u, v)) &= (e, -1)(g, 1)(u, v) = (e, -1)(g, 1)(e, -1)(e, -1)(u, v) \\ &= (\tau(g), 1)\bar{i}(u, v) = \tau(g)\bar{i}(u, v) \end{aligned}$$

従って次を得る。

定理 2.2. M を Real G manifold $x \in M$ が $(e, -1)x = x$ を満たすとする。この時

$$TR_{(x,0)}(TR(M))$$

は Real H_x -module になる。さらに complex H_x -module として

$$TR_{(x,0)}(TR(M)) \cong T_x(M) \otimes \mathbb{C}$$

(後半は作り方より明らか。 $TR_{(x,0)}^*(TR(M)) \cong T_x^*(M) \otimes \mathbb{C}$ も同様)

§ 3 誘導表現の定義

G を compact Real Lie group H を Real subgroup とすると, G/H は自然に Real G manifold になる。明らかに $(e, -1)[H] = [H]$ であるから, $TR = TR_{([H], 0)}^* (TR(G/H))$ が定義され, Real H -module になる。

M を Real H -module とする時

$$G \ltimes M \rightarrow G/H$$

で定義される Real G vector bundle を E_M と書く。また $\Gamma(\quad)$ でその smooth section 全体を表わす。任意の Real G vector bundle に対して, $\Gamma(\xi)$ は自然に (適当な topology で) 広義の意味の Real G module になる。

G 同変 Real connection

$$\nabla: \Gamma(E_M) \rightarrow \Gamma(E_M \otimes TR)$$

を選ぶと ∇ は自然に G 同変 Real operator

$$D: \Gamma(E_M \otimes \wedge^p TR) \rightarrow \Gamma(E_M \otimes \wedge^{p+1} TR)$$

に拡張される。(くわしくは Atiyah-Singer [2] を見よ)。

この D の作る symbol の列は外変微分の定義からただちにわかるように zero section 以外では exact である。しかし

$D^2 \neq 0$ の可能性があるので, 各 bundle に G 不変

かつ $(\tilde{\tau}(x), \tilde{\tau}(y)) = (x, y)$ をみたす内積を定義し (この存在

は G 不変内積 $\langle, \rangle$ に対して $(x, y) = \frac{1}{2}(\langle x, y \rangle + \overline{\langle \tilde{\tau}(x), \tilde{\tau}(y) \rangle})$

とおけばよい); これに関する adjoint を D^* とし

$$D+D^* \xrightarrow[\text{even}]{\text{odd}} \prod P(E_M \otimes \wedge^p T^*R) \rightarrow \prod_{\text{odd}} P(E_M \otimes \wedge^p T^*R)$$

を考えると, これは G 同変 Real elliptic operator となる。

定義 3.1. $i_!(M) = a\text{-ind}(D+D^*) = \text{Ker}(D+D^*) - \text{Coker}(D+D^*)$

この Real structure を forget すると, Segal の定義から

$$\begin{array}{ccc} \text{定理 3.2.} & R_R(H) & \xrightarrow{i_!} R_R(G) \\ & \downarrow \phi & \downarrow \phi \\ & R(H) & \xrightarrow{i_!} R(G) \end{array}$$

は可換である。

よくに

系 3.3. 上の定義は 橋本 [4] の $i_!$ と一致する。

参考文献

- [1] M. F. Atiyah-G. B. Segal; Equivariant K-theory and completion, J. Diff. Geom. 3(1968) 1-18.
- [2] M. F. Atiyah-I. M. Singer; The index of elliptic operators V, Ann. Math.
- [3] R. Bott; The index theorem for homogeneous differential operators, Diff. and comb. topology 167-186.
- [4] S. Hashimoto; The transfer map in the KR-theory (to appear in Osaka J. Math.) (本講究録)
- [5] G. Nishida; The transfer homomorphism in equivariant generalized cohomology, J. Math. Kyoto Univ. 18(1978), 435-451.
- [6] G. B. Segal; The representation ring of compact Lie group, Publ. I.H.E.S. 34(1968), 113-128.