

定期発注方式をもつ在庫管理システムの摂動解析と その最適化への応用

京都大学 工学研究科 高田 英明 (Hideaki Takada)
三好 直人 (Naoto Miyoshi)
長谷川 利治 (Toshiharu Hasegawa)

Abstract

本研究では定期発注方式をもつ在庫管理システムを扱い、その最適化問題を考える。これまで提案されている多くの最適化アルゴリズムは評価量の制御パラメータに関する微分係数を利用しているが、ここではこの微分係数を摂動解析 (perturbation analysis) を用いて推定を試みる。摂動解析は確率的離散事象システムの微分係数を 1 つの標本路から推定する手法として知られており、これを用いることにより 1 度のシミュレーションまたはシステムの観測から直接微分係数の推定値を得ることが可能となる。摂動解析と有限差推定による微分係数の推定値の比較を行なった結果、摂動解析を用いることにより信頼度の高い微分係数値が推定されることが確認できた。また、シミュレーション実験により摂動解析を利用したアルゴリズムがシステムの実時間での最適化に有効であることが示された。

1 序論

本研究では定期発注方式をもつ在庫管理システムを扱い、その最適化問題を考える。定期発注方式とは、定期的に在庫量を調べ前の調査以後出荷があれば規定の最大在庫量 (在庫補充水準) S と現在の在庫量の差を発注する方式である。この方式は品切れ損失が大きい場合や在庫調査が頻繁に行なえない場合などに有効であり、特に高金額商品に対して広く活用されている。この在庫管理システムの制御パラメータとしては最大在庫量 S や発注サイクル R 等が考えられるが、発注サイクルは商品の製造サイクルや運搬サイクルなど他のサイクルと同期をとる必要があるため、一般的に在庫管理システムの立場からの単独の変更は許されない。そのため本研究では最大在庫量 S を制御パラメータとして考える。

在庫管理システムは、出荷の時間間隔、出荷量および発注サイクルを確率的に変化する量とみなすと確率離散事象システム (stochastic discrete event system) と捕らえられる。こうした確率システムを考えると、その評価量はしばしばシステムの特性を表す確率量の期待値として与えられるが、この評価量が制御パラメータの関数として解析的に表現できる場合は非常に限られており、そのため実際のシステムの観測またはシミュレーションに頼らざるを得ないのが現状である。これまで提案されている最適化アルゴリズムは評価量の微分係数を用いたものがほとんどであるため、確率システムの最適化には実際のシステムの観測またはシミュレーションから微分係数を推定することが要求されることになる。従来、微分係数の推定法としては有限差推定法 (finite difference estimate, 以下 FD) と呼ばれる手法が広く用いられてきた。この手法は、実際にパラメータを微小量だけずらしてシミュレーションを行ない、そうして得られる観測値の差とパラメータのずらし幅との比を微分係数の推定量とするものである。この方法を用いた場合、ひとつのパラメータに対し

て少なくとも 2 つの標本路を観測する必要がある、したがって実際のシステムを実時間で制御するのに適しているとは言えない。そこで本研究では、摂動解析 (perturbation analysis, 以下 PA) と呼ばれる手法を用いて微分係数を推定する。PA は確率離散事象システムの微分係数を推定する手法として知られており (Ho & Cao [5] を参照), これを用いることにより 1 度のシミュレーションまたはシステムの観測から直接微分係数を推定することが可能となる。したがって, FD と比較して微分係数の推定に要する計算コストが小さくて済み, また 1 つのシステムの実現のみを観測すればよいので, より分散の小さい推定値を得ることができる。さらに, システムを観測しながら実時間で微分係数を推定することが可能となるため, システムの実時間制御にも向いていると考えられる。

在庫を管理する際に注意すべきことは, 第一に在庫があるときには在庫そのものは利益には貢献せず, 逆に在庫を維持していく上で様々な経費 (倉庫賃貸費, 保険料, 資産税等) がかかるということであり, 第二に在庫が少ない場合には顧客の要求に応えることができない事態が生じるということである。本研究では, こうした過剰/過少在庫の問題を考慮した最適化問題を定式化し, 摂動解析を用いることにより最適な在庫水準 S の値を実時間で導くアルゴリズムを提案する。

本論文の構成は以下のとおりである。まず 2 節では今回扱う定期発注方式をもつ在庫管理システムのモデルを定義し, 次に 3 節でこのモデルに対して最適化問題を定式化する。4 節では 3 節で定義された評価量の在庫水準 S に関する微分係数を PA を用いて推定する。ここでは無限小摂動解析 (infinitesimal PA, 以下 IPA) および平滑化摂動解析 (smoothed PA, 以下 SPA) と呼ばれる手法を用いる。IPA, SPA はそれぞれ PA の手法の 1 つであり, 特に IPA は最も簡単でかつ有益な手法である (Suri [6]) が, 評価量の標本関数がシステムパラメータに関して不連続点を持つ場合には適さないことが Glasserman [2] などにより報告されている。これに対して, Gong & Ho [3] により提案された SPA は, システムパラメータに関して不連続点を持つ標本関数を, 条件付期待値を用いて平滑化することにより微分係数の推定量を求める手法であり, より広いクラスのモデルに適用される。5 節では, 前節で導かれた微分係数の推定量を用いて, 最適な在庫水準 S を計算するアルゴリズムを構築し, 6 節で数値実験を行なう。ここでは, まず PA と FD による微分係数の推定値の比較を行ない, 次いで最適化問題に対して 5 節で構築されたアルゴリズムを適用し, アルゴリズムの正当性を検証する。

2 モデル

本研究で扱う定期発注方式をもつ在庫管理システムは, 在庫量の最大値を正の実数 S とし, ある確率過程に従って在庫を減らす事象 (以下, 出荷と呼ぶ) が起こる状況において, 確率的な時間間隔 R のたびに最大在庫量 S と現在の在庫量の差を発注することを繰り返すシステムである。実際のシステムでは在庫量を調査し発注する時刻 (発注点) と納入される時刻は時間差 (納入リードタイム) が生じるが, 本研究においては納入される時間間隔を R とする。すなわち, 正の実数値をとる時間間隔 R ごとに在庫は最大値 S まで補充される。また, 1 度の出荷にとまらないう出荷量は, すべて独立かつ同一な分布に従う非負の実数値をとり, 出荷時刻および納入時刻とも独立であるものと仮定する。

時刻 $t (\geq 0)$ におけるシステム内の在庫量を $y(t, S)$ と表す。ここに $y(t, S)$ は, 任意の t に関して右連続であり, 左極限をもつ実数値関数とする。また, 在庫が不足した場合も注文を受け, 納入時に不足分をあわせて補充するものとして, $y(t, S) < 0$ となることも許す。初期状態を $y(0, S) = S$ とし, $(k-1)$ 番目の納入時刻 R_{k-1} から k 番目の納入時刻 R_k までの期間を第 k 周期と呼ぶこ

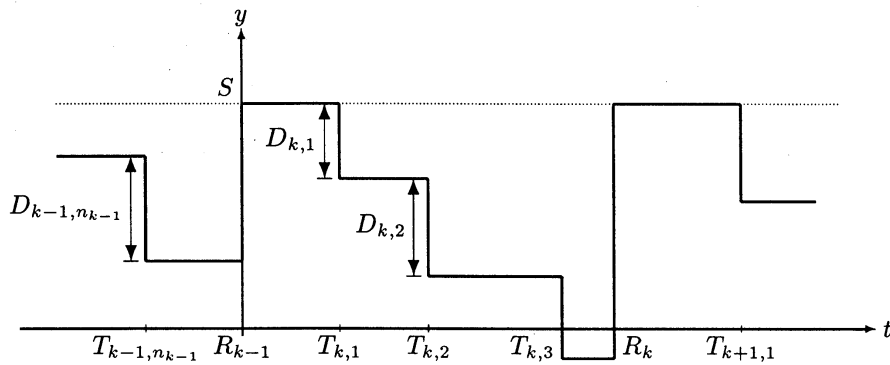


図 1: (R, S) 在庫管理システムにおける在庫量の変化

とにして, 次の各量を定義する (図 1 を参照):

$T_{k,i}$: 第 k 周期中の i 番目の出荷時刻, ただし $T_{k,0} = R_{k-1}$ とする;

$D_{k,i}$: 第 k 周期中の i 番目の出荷量;

n_k : 第 k 周期中に起こる出荷数;

$Y_{k,i}(S)$: 第 k 周期中の i 番目の出荷直後の在庫量, ただし $Y_{k,0}(S) = S$ とする.

在庫量は出荷または納入の起こる時にのみ変化するので, $Y_{k,i}(S)$ を再帰的に

$$Y_{k,i}(S) = \begin{cases} Y_{k,i-1}(S) - D_{k,i} & (1 \leq i \leq n_k); \\ S & (i = 0), \end{cases} \quad (1)$$

と表すことができ, また $T_{k,n_k+1} = R_k (= T_{k+1,0})$ とすると,

$$y(t, S) = Y_{k,i}(S) \quad (T_{k,i} \leq t < T_{k,i+1})$$

が成立する.

システムにかかるコストとして, 現在の在庫量によって決まる管理コストおよび納入時の在庫量と最大在庫量によって決まる納入コストの 2 つを考え, 次の関数を定義する:

$M(y)$: 管理コスト関数 (在庫量が y の時の単位時間あたりの管理コスト);

$B(y, S)$: 納入コスト関数 (納入時の在庫量が y の時の 1 回の納入にかかる納入コスト).

ただし, $M(y)$ は y に関して, $B(y, S)$ は y および S に関して微分可能であるとする. このとき, 第 k 周期の間にシステムにかかるコスト $C_k(S)$ は,

$$C_k(S) = \sum_{i=0}^{n_k} M(Y_{k,i}(S)) \tau_{k,i} + B(Y_{k,n_k}(S), S), \quad k = 1, 2, \dots \quad (2)$$

によって与えられる. ここに $\tau_{k,i} = T_{k,i+1} - T_{k,i}$ である.

3 最適化問題

システムを m 周期観測したときの 1 周期間当りの平均コストを表す標本関数 $V_m(S)$ を,

$$V_m(S) = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m C_k(S) \quad (3)$$

により定義する. 在庫管理システムにおける過剰在庫問題のために, この平均コストの期待値 $E[V_m(S)]$ の最小化を考える. しかしながら, 過少在庫問題すなわち出荷の要求時に在庫が残っていないという状況を避けることも併せて考える必要がある. 任意の k に対して, $Y_{k,i}(S)$ は i に関して単調に減少するので, 在庫量が負になるかどうかは納入直前の在庫量 $Y_{k,n_k}(S)$ を調べれば十分である. よって, $1(A)$ を命題 A が真のとき 1, 偽のとき 0 となる指示関数とすると, 納入直前の在庫量が負となる割合を表す標本関数は,

$$W_m(S) = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m 1(Y_{k,n_k}(S) < 0) \quad (4)$$

によって定義される. したがって, 過少在庫問題による条件を 1 周期当りの納入直前の在庫量が負となる確率が $\alpha (> 0)$ 以下であることとすると, この条件は

$$E[W_m(S)] = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m P(Y_{k,n_k}(S) < 0) \leq \alpha$$

となる. 以上より本研究で考えられる最適化問題は次のように定式化される:

$$\begin{cases} \text{minimize} & E[V_m(S)]; \\ \text{subject to} & E[W_m(S)] \leq \alpha. \end{cases} \quad (5)$$

以下では $E[V_m(S)]$ を目的関数, $E[W_m(S)]$ を制約関数と呼ぶ. この問題に対してラグランジュ乗数法を適用すると, ラグランジュ関数 $L(S, l)$ は

$$L(S, l) = E[V_m(S)] + l(E[W_m(S)] - \alpha)$$

となる. ここに l はラグランジュ乗数である. この問題に対する Kuhn-Tucker 条件は, S^* を局所最適解とすると,

$$\begin{aligned} \frac{\partial L(S^*, l^*)}{\partial S^*} &= \frac{dE[V_m(S^*)]}{dS^*} + l^* \frac{d(E[W_m(S^*)] - \alpha)}{dS^*} = 0; \\ E[W_m(S^*)] - \alpha &\leq 0, \quad l^* \geq 0, \quad l^*(E[W_m(S^*)] - \alpha) = 0 \end{aligned}$$

を満たす l^* が存在するというものになり, この最適化問題を考える際には評価関数 $E[V_m(S)]$, $E[W_m(S)]$ の S に関する微分係数が必要となる. しかしながら, これらの評価関数を解析的に表現することは, 非常に限られた場合を除いて困難であり, 評価関数を直接微分するという手段が適用しない. そこで次節において, 実際のシステムの観測もしくはシミュレーションから PA を用いることにより微分係数を推定する手法について説明する.

4 微分係数の推定

本節では, PA を用いることにより $dE[V_m(S)]/dS$, $dE[W_m(S)]/dS$ の推定量を導く. ここでの問題は,

$$E[v_m(S)] = \frac{dE[V_m(S)]}{dS}; \quad (6)$$

$$E[w_m(S)] = \frac{dE[W_m(S)]}{dS} \quad (7)$$

を満足する $v_m(S)$, $w_m(S)$ をシステムの観測から得られる量 $\tau_{k,i}$, $Y_{k,i}(S)$ 等を用いて表すことである。

4.1 在庫量の微分係数

まず、在庫量 $y(t, S)$ の S に関する微分係数を考える。在庫量の S についての微分係数は在庫の再帰的表現式 (1) より、

$$\frac{dY_{k,i}(S)}{dS} = \begin{cases} \frac{dY_{k,i-1}(S)}{dS} & (1 \leq i \leq n_k); \\ 1 & (i = 0), \end{cases}$$

となり、よって任意の k, i に対して帰納的に $dY_{k,i}(S)/dS = 1$ が導かれる。これにより任意の t , S に対して偏微分係数

$$\frac{\partial y(t, S)}{\partial S} = 1 \quad (8)$$

を得る。

4.2 目的関数の微分係数の推定

期待値と微分の交換が可能となる十分条件は、標本関数が微分パラメータに関して確率 1 で連続となることである (Glasserman[2])。以下に標本関数 $V_m(S)$ が S に関して連続であることを示す。 $y(t, S)$ は明らかに S に関して連続であるので、仮定より $M(y(t, S))$, $B(y(t, S), S)$ はともに S に関して連続である。よって、 $V_m(S)$ は S に関して連続であり、有界収束定理を用いて

$$\frac{dE[V_m(S)]}{dS} = E\left[\frac{dV_m(S)}{dS}\right] \quad (9)$$

が成り立つ。したがって、標本関数の微分係数を求めることにより目的関数の微分係数を推定することができる。すなわち (6) 式において、

$$v_m(S) = \frac{dV_m(S)}{dS} = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m \frac{dC_k(S)}{dS} \quad (10)$$

となる。このように期待値と微分の可換性を利用した微分係数の推定法は無限小摂動解析 (infinitesimal PA) または IPA と呼ばれる。以下、標本関数を構成する各関数の微分係数を順に導く。単位時間あたりの管理コストの微分係数は (8) 式より、

$$\begin{aligned} \frac{\partial M(y(t, S))}{\partial S} &= \frac{dM(y)}{dy} \Big|_{y=y(t, S)} \cdot \frac{\partial y(t, S)}{\partial S} \\ &= \frac{dM(y)}{dy} \Big|_{y=y(t, S)}. \end{aligned} \quad (11)$$

同様に、第 k 周期の納入コストの微分係数は

$$\begin{aligned} \frac{\partial B(Y_{k,n_k}(S), S)}{\partial S} &= \frac{\partial B(y, S)}{\partial y} \Big|_{y=Y_{k,n_k}(S)} \cdot \frac{dY_{k,n_k}(S)}{dS} + \frac{\partial B(y, S)}{\partial S} \Big|_{y=Y_{k,n_k}(S)} \\ &= \left[\frac{\partial B(y, S)}{\partial y} + \frac{\partial B(y, S)}{\partial S} \right] \Big|_{y=Y_{k,n_k}(S)}. \end{aligned} \quad (12)$$

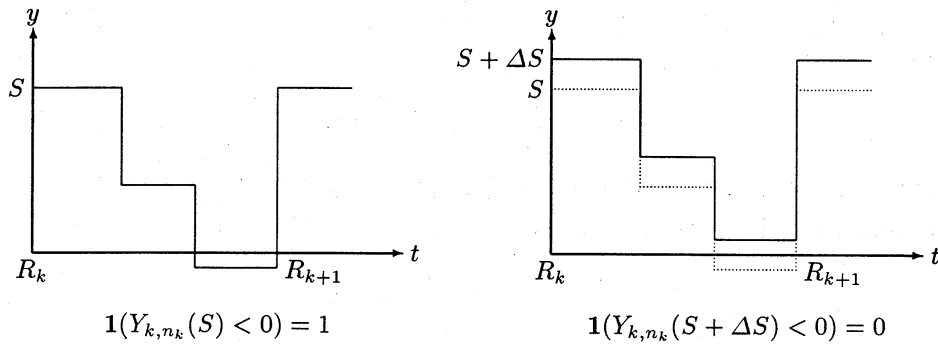


図 2: 在庫量が 0 以下になる状況の変化

となる。したがって (10) 式において、第 k 周期の間にかかるコストの微分係数は、(2), (11), (12) 式より、

$$\begin{aligned} \frac{d}{dS} C_k(S) &= \frac{d}{dS} \left[\sum_{i=0}^{n_k} M(Y_{k,i}(S)) \tau_{k,i} + B(Y_{k,n_k}(S), S) \right] \\ &= \sum_{i=0}^{n_k} \tau_{k,i} \frac{dM(y)}{dy} \Big|_{y=Y_{k,i}(S)} + \left[\frac{\partial B(y, S)}{\partial y} + \frac{\partial B(y, S)}{\partial S} \right] \Big|_{y=Y_{k,n_k}(S)} \end{aligned} \quad (13)$$

となり、これを用いて目的関数の微分係数の推定量が得られる。

4.3 制約関数の微分係数の推定

制約関数 $E[W_m(S)]$ に関しては、その標本関数 $W_m(S)$ が指示関数を用いて与えられているため、システムパラメータ S に関して不連続点を持ち (図 2), 目的関数の場合と同様の IPA による微分係数の推定が不可能である。実際、 $dW_m(S)/dS$ の値は S に関してほとんどいたるところで 0 であるが、在庫量が負となる確率が S に関して区分的に一定であるとは思えない。そこで条件付き期待値を用いることにより標本関数を連続関数に変形し、それを基に微分係数の推定を行うことを考える。ここで用いる手法は、Wardi ら [7] によって報告されている平滑化摂動解析 (smoothed PA, または SPA) の応用の一例である。

第 k 周期最後の出荷直前の在庫量 $Y_{k,n_k-1}(S)$ が与えられたときの $1(Y_{k,n_k}(S) < 0)$ の条件付き期待値を用いると制約関数は、

$$\begin{aligned} E[W_m(S)] &= \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m E[1(Y_{k,n_k}(S) < 0)] \\ &= \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m E[E[1(Y_{k,n_k}(S) < 0) | Y_{k,n_k-1}(S)]] \end{aligned}$$

と表される。ここで、 $Y_{k,n_k-1}(S) - Y_{k,n_k}(S)$ は出荷量 D_{k,n_k} に他ならないことから、

$$\begin{aligned} E[1(Y_{k,n_k}(S) < 0) | Y_{k,n_k-1}(S)] &= P(Y_{k,n_k}(S) < 0 | Y_{k,n_k-1}(S)) \\ &= P(D_{k,n_k} > Y_{k,n_k-1}(S) | Y_{k,n_k-1}(S)) \end{aligned} \quad (14)$$

を得ることができ、 $D_{k,i}$ の確率分布関数 $G(\cdot)$ が既知であるとする、(14) 式より

$$E[1(Y_{k,n_k}(S) < 0) | Y_{k,n_k-1}(S)] = 1 - G(Y_{k,n_k-1}(S))$$

となる。したがって、制約関数 $E[W_m(S)]$ に対する標本関数を

$$W'_m(S) = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m [1 - G(Y_{k,n_k-1}(S))]$$

と再定義することにより、 $G(\cdot)$ が微分可能であるという仮定のもとで目的関数の場合と同様に期待値と微分の交換をすることができ、 $dE[W_m(S)]/dS$ の推定量として、

$$\begin{aligned} w_m(S) &= \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m \frac{d[1 - G(Y_{k,n_k-1}(S))]}{dS} \\ &= -\frac{1}{m} \sum_{k=1}^m \frac{dG(y)}{dy} \Big|_{y=Y_{k,n_k-1}(S)} \cdot \frac{dY_{k,n_k-1}(S)}{dS} \\ &= -\frac{1}{m} \sum_{k=1}^m \frac{dG(y)}{dy} \Big|_{y=Y_{k,n_k-1}(S)} \end{aligned} \quad (15)$$

が得られる。

5 最適化アルゴリズム

最適化問題 (5) に対して、スラック変数 x を導入し、次のような等式制約条件のついた問題に変換する。

$$\begin{cases} \text{minimize} & E[V_m(S)]; \\ \text{subject to} & E[W_m(S)] - \alpha + x = 0, \\ & x \geq 0. \end{cases} \quad (16)$$

この最適化問題に対してペナルティ関数と呼ばれる関数 Q を以下のように定義する：

$$Q(S, l, x) = E[V_m(S)] + l(E[W_m(S)] - \alpha + x) + \frac{1}{r}(E[W_m(S)] - \alpha + x)^2 \quad (17)$$

ここに、 l はラグランジュ乗数であり、 $r (> 0)$ はペナルティ係数と呼ばれる十分小さな値である。ペナルティ関数が (17) 式で与えられる最適化手法は特に修正ペナルティ関数法と呼ばれる (Hestenes [4])。このペナルティ関数 Q を用いて最適な S の値を次の手順により導く：

ステップ 0: 実行可能な初期値 $S^{(0)}, l^{(0)}$ の値を決める。

以下ステップ 1 から 3 を繰り返す。(ただし、 $S^{(i)}, l^{(i)}, x^{(i)}$ はそれぞれ i 回目のサイクルでの S, l, x の値とする)。

ステップ 1: x に関する最適化を行なう。 $Q(S^{(i)}, l^{(i)}, x)$ を x に関して偏微分すると、

$$\frac{\partial Q(S^{(i)}, l^{(i)}, x)}{\partial x} = l^{(i)} + \frac{2}{r}(E[W_m(S^{(i)})] - \alpha + x).$$

これを 0 にするような非負の x が存在するなら、それが求める x であり、そうでないならば x は 0 である。よって最適な $x = x^{(i)}$ は次のように求まる。

$$x^{(i)} = \max \left\{ - \left(E[W_m(S^{(i)})] - \alpha + \frac{r l^{(i)}}{2} \right), 0 \right\}$$

このとき, (17) 式は上の結果を用いて次のように書き換えられる.

$$Q(S^{(i)}, l^{(i)}, x^{(i)}) = E[V_m(S^{(i)})] + \frac{1}{r} \left(E[W_m(S^{(i)})] - \alpha + \frac{r l^{(i)}}{2} \right)^2 \cdot 1(x^{(i)} = 0) - \frac{r (l^{(i)})^2}{4}.$$

ステップ 2: 摂動解析を用いて, ペナルティ関数 $Q(S^{(i)}, l^{(i)}, x^{(i)})$ の $S^{(i)}$ に関する偏微分係数 $\partial Q / \partial S^{(i)}$ を推定する. このとき

$$\left[\frac{\partial Q(S^{(i)}, l^{(i)}, x^{(i)})}{\partial S^{(i)}} \right]^2 \leq \varepsilon$$

となれば, 手続きを終了する. ただし, $\varepsilon (> 0)$ は与えられた小さな定数とする. そうでないならば, 先に推定した微分係数を用いて

$$S^{(i+1)} = S^{(i)} - \frac{\partial Q}{\partial S^{(i)}} h_i$$

により S の値を更新する. ここに, $h_i (> 0)$ は与えられたステップ幅とする.

ステップ 3: ラグランジュ乗数 l を更新する. $Q(S, l^{(i)}, x^{(i)})$ を最小とする S に関しては, 次の式が満足されなければならない.

$$\frac{\partial Q(S, l^{(i)}, x^{(i)})}{\partial S} = \frac{dE[V_m(S)]}{dS} + \frac{2}{r} \left(E[W_m(S)] - \alpha + \frac{r l^{(i)}}{2} \right) 1(x^{(i)} = 0) \frac{\partial E[W_m(S)]}{\partial S} = 0.$$

よって, この式から容易に Kuhn-Tucker 条件を満たすラグランジュ乗数を求めることができ, 次のような更新規則が与えられる.

$$l^{(i+1)} = \frac{2}{r} \left(E[W_m(S^{(i+1)})] - \alpha + \frac{r l^{(i)}}{2} \right) 1(x^{(i)} = 0).$$

6 数値実験

6.1 推定量の比較

平均在庫量 (表 1) と在庫が負となる確率 (表 2) について, PA および FD により微分係数をそれぞれ 50 回ずつ推定し, それを基に平均値と 95 % の信頼区間の比較を行なった. ここでは, $S = 2.0$ とし, 出荷量 D を平均 0.25 の指数分布に従うものとした. 出荷の生起をポアソン過程に従うものとし, 強度 $\lambda = 2, 4, 8$ の場合についての比較を行なった. その結果, 全ての場合において PA と FD の推定値の平均はかなり近い値をとり, PA による信頼区間は FD に比べてより小さい値をとることが確認された. これにより PA は FD に比べてより信頼性の高い推定値を与えることができると言える.

6.2 最適化問題への応用

PA によって得られる微分係数の推定値を用いて, 実際にシステムの最適化を行なう. モデルとして次のものを考える. 納入時間間隔を $R = 1.0$ と固定し, 管理コスト関数と納入コスト関数を

表 1: 平均在庫量の PA と FD の推定量の比較

λ	$y(t, S)$	$(dy/dS)_{PA}$	$(dy/dS)_{FD}$	(dy/dS)
2	1.748 ± 0.003	1.0	1.004 ± 0.007	1.0
4	1.501 ± 0.004	1.0	1.001 ± 0.010	1.0
8	1.001 ± 0.005	1.0	0.997 ± 0.016	1.0

表 2: 在庫量が負になる確率の PA と FD の推定量の比較

λ	$P(Y_{k,n_k} < 0)$	$(dP/dS)_{PA}$	$(dP/dS)_{FD}$
2	0.016 ± 0.001	-0.037 ± 0.002	-0.040 ± 0.003
4	0.095 ± 0.002	-0.166 ± 0.004	-0.168 ± 0.008
8	0.449 ± 0.005	-0.385 ± 0.005	-0.387 ± 0.013

それぞれ,

$$M(y) = \begin{cases} \log(y+1) & y \geq 0; \\ 0 & y < 0, \end{cases}$$

$$B(y, S) = \sqrt{S - y},$$

とする. 出荷の生起を強度 4 のポアソン過程に従うものとし, 1 回の出荷量を平均 0.25 の指数分布に従うものとする. 制約条件として, $\alpha = 0.01$, すなわち在庫量が負となる確率が $1/100$ を越えないこととする. 初期ラグランジュ乗数を $l = 0$ とし, ペナルティ係数 $r = 0.1$ を固定して, 以下の 4 種の実験を行なった.

実験 1 (初期在庫量についての比較) 初期最大在庫量 $S = 1.0, 2.0, 3.0, 4.0, 5.0$ の 5 種類の場合について, 最適化のシミュレーション実験を行なった. ただし, ステップ幅 $h = 0.1$, 観測サイクル $m = 50$ は固定した. 縦軸を最大在庫量 S , 横軸を観測サイクル ($m = 50$) の数として実験結果を図 3 に示す. その結果, 初期値に関係なく最適値に落ち着くことが確認された. 初期値が小さい場合のほうが初期値が大きな場合よりも立ち上がりが早いのは, 在庫が負になることを避ける条件がコストを抑えることよりも強い条件であるためと推測される.

実験 2 (ステップ幅による比較 1) ステップ幅 $h = 0.05, 0.1, 0.5$ にそれぞれ固定した場合について, 最適化シミュレーションにより比較実験を行なった. ただし, 初期最大在庫量 $S = 1.0$, 観測サイクル $m = 50$ は固定した. 縦軸を最大在庫量 S , 横軸を観測サイクル ($m = 50$) の数として実験結果を図 4 に示す. グラフよりステップ幅が小さいと落ち着くまでの観測サイクル数が大きくなり, 逆にステップ幅が大きいと振動が激しくなり, 最適な最大在庫量の決定が困難になることが確認される. 実際に実時間で最適化を行なう場合, 適当なステップ幅 h を決定することが重要であり, 例として h を観測サイクル数に関する減少関数とすること等が考えられる.

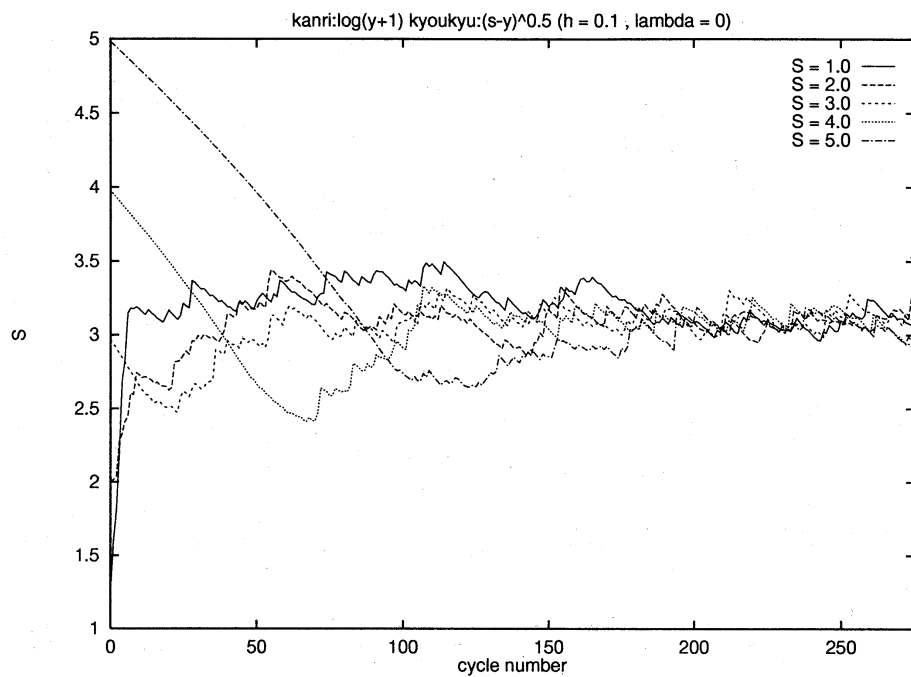


図 3: 初期在庫量についての比較

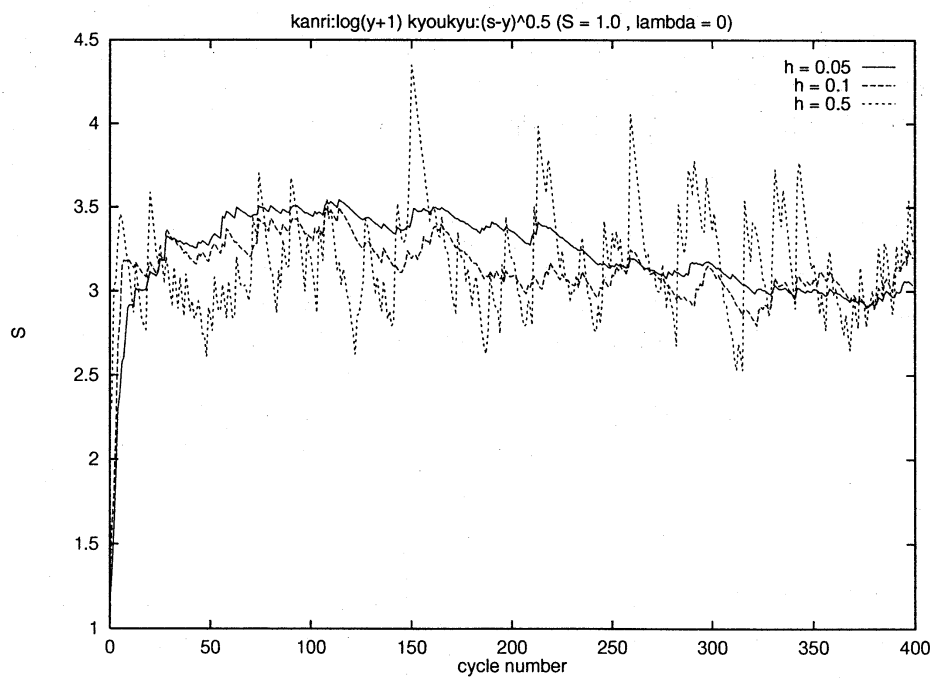


図 4: ステップ幅による比較 1

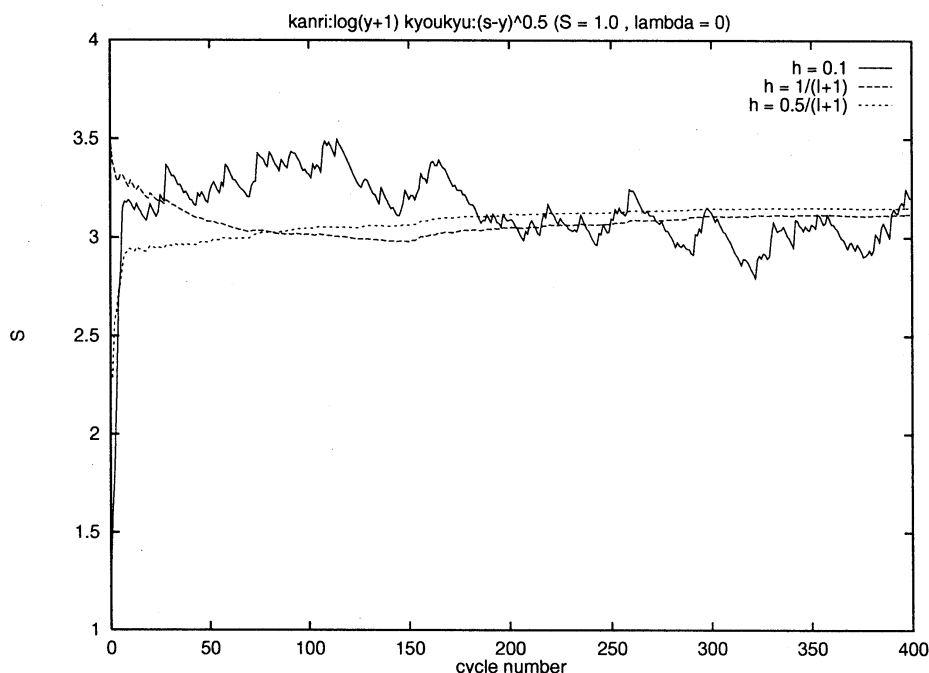


図 5: ステップ幅による比較 2

実験 3 (ステップ幅による比較 2) ステップ幅 $h = 0.1, 0.5/(I+1), 1/(I+1)$ の 3 種類の場合について、最適化シミュレーションにより比較実験を行なった。ここに、 I は観測サイクル数 (= 最適化ステップ数) である。初期最大在庫量を $S = 1.0$ 、観測サイクルを $m = 50$ と固定し、縦軸を最大在庫量 S 、横軸を観測サイクル ($m = 50$) の数として、実験結果を図 5 に示す。 h を観測サイクル数に関する減少関数とすることによって、 h が一定の場合よりも早く最適な値に落ち着き、かつ揺れ幅も小さくなるという期待通りの効果を得ることができた。

実験 4 (出荷率の変化) 1,000 回の最適化ステップを繰り返したあと出荷率が 2 倍になる場合について、最適化シミュレーションによる実験を行なった。ただし、初期最大在庫量を $S = 1.0$ 、ステップ幅を $h = 0.1$ と固定した。縦軸を最大在庫量 S 、横軸を観測サイクル ($m = 50$) の数として、実験結果を図 6 に示す。出荷率が変わると同時に次の最適な状態へと実時間で対応することが確認された。

7 結論

定期発注方式をもつ在庫管理システムに対して、PA を用いることにより平均コストおよび在庫が負となる確率の微分係数の推定量を導出した。数値実験の結果、PA による微分係数の推定値は従来の FD による推定値よりも信頼度が高く、また実時間での最適化を行なう際に有効な手法であることが確認された。

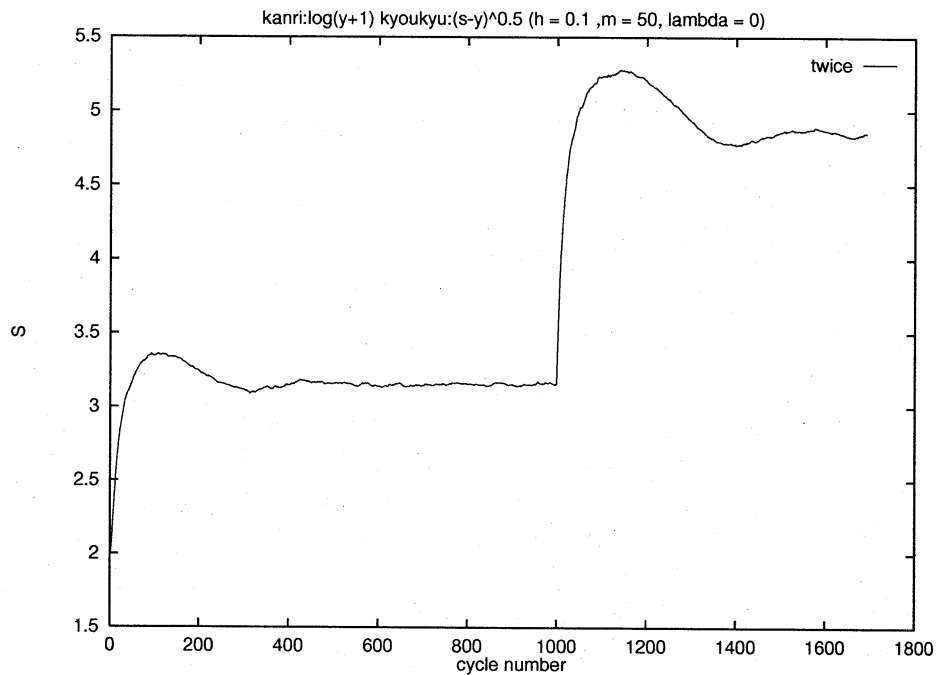


図 6: 出荷率の変化

参考文献

- [1] M. C. Fu, "Sample Path Derivatives for (s, S) Inventory Systems," *Operat. Res.*, vol. 42, pp. 351–364, 1992.
- [2] P. Glasserman, "Structural Condition for Perturbation Analysis Derivative Estimation: Finite-Time Performance Indices," *Operat. Res.*, vol. 39, pp. 724–738, 1991.
- [3] W.-B. Gong and Y.-C. Ho, "Smoothed (Conditional) Perturbation Analysis of Discrete-Event Dynamic Systems," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 32, pp. 858–867, 1987.
- [4] M. R. Hestenes, "Multiplier and Gradient Methods," *J. of Optimization Theory and Applications*, vol. 4, pp. 303–320, 1969.
- [5] Y.-C. Ho and X.-R. Cao, *Discrete Event Systems and Perturbation Analysis*, Kluwer Academic Publishers, 1991.
- [6] R. Suri, "Infinitesimal Perturbation Analysis for General Discrete Event System," *J. of ACM*, vol. 34, pp. 686–717, 1987.
- [7] Y. Wardi, W.-B. Gong, C. G. Cassandras and M. H. Kallmes, "Smoothed Perturbation Analysis for a Class of Piecewise Constant Sample Performance Functions," *J. of Discrete Event Dynamic Sys.: Theory and Applications*, vol. 1, pp. 393–414, 1992.