

Dirichlet 核の同次変換

名大 医 伊藤嘉房

§ 1. 序

伊藤正之氏の講演抄録にあるように Dirichlet 核のフーリエ変換は逆数が局所可積分な対称負型函数の逆数であり、逆に逆数が局所可積分な対称負型函数の逆数のフーリエ逆変換は Dirichlet 核である。他方、負型函数は Lévy-Khinchine の式として表現され、逆に Lévy-Khinchine の式は負型函数を与える。したがって Dirichlet 核・逆数が局所可積分な対称負型函数・逆数が局所可積分な ^{対称な} Lévy-Khinchine の式は 1 : 1 に対応している。それ故、Lévy-Khinchine の式の性質を調べることによって、Dirichlet 核の性質を調べるのが可能となる。この方法によって同次 Dirichlet 核の性質を調べ、又 Dirichlet 核を Dirichlet 核に変換するような同次変換を決定するのが以下の目的である。

以下すべて $\mathbb{R}^m$ での話である。したがってその旨を毎回

ことわらない。又くどくどしい言い廻しをさけるために用語法を大旨次のようにまとめておく。

楕円：等高線が楕円であるような核や函数を楕円核などと呼ぶ。

同次：例えば $\forall a > 0$ に対して、 $f(ax) = a^\alpha f(x)$ となる函数を同次函数・ α 次の同次函数などと呼ぶ。核や測度に対しても同様な言葉を用いる。同次核を同次核に移すような変換を同次変換と呼ぶ。

対称：以下に現われる楕円核・負型函数などは殆んどすべて原点に関して対称なので一々その旨をこたわることはいない。

§ 2. Lévy-Khinchine の定理

Définition. $\mathbb{R}^n$ の連続函数 ψ が次の条件を満たすとき、 ψ は負型函数であると言う。

$$a') \quad \psi(0) \geq 0, \quad \psi(-x) = \overline{\psi(x)}.$$

$$b') \quad \psi \in C_K^\infty, \quad \int \psi dx = 0 \quad \text{に対して}$$

$$\psi * \psi * \check{\psi}(0) \leq 0, \quad \check{\psi}(x) = \overline{\psi(-x)}.$$

我々は Dirichlet 核を扱う立場にあるので対象を対称な負型函数にかぎってよいから、 $a')$ を次のようにしてよい。

$$a) \quad \psi(0) \geq 0, \quad \psi(-x) = \psi(x).$$

ψ が real に限られるのは当然である。

Lévy-Khinchine の定理は a), b) の意味の負型函数 ψ が

$$\psi(x) = C + i\ell(x) + q(x) + \int \left(1 - \frac{ix \cdot y}{1 + |y|^2} - e^{\frac{2\pi i x \cdot y}{1 + |y|^2}}\right) d\sigma(y)$$

と分解され、逆にこの表現をもつ函数が負型函数であることを云っている。ここで $C \geq 0$, $\ell(x)$ は実一次同次多項式, $q(x)$ は正型同次2次式, σ は $\mathbb{R}^n - \{0\}$ 上の正の測度で

$$\int \frac{d\sigma(y)}{1 + |y|^2} < +\infty$$

を満たすものである。

我々の立場では Lévy-Khinchine の定理を次のように表現してよい。定理中の C , q は上記の如くであり, σ は上記の条件を満たす上にさらに対称であるとしておく。定理中の負型函数は a) と b) によって定義されるものとしておく。

Théoreme 1. ψ が $\mathbb{R}^n$ の函数であるとする。次は同値。

1) ψ は負型函数。

$$2) \quad \psi = C + q(x) + \int \left(1 - e^{\frac{2\pi i x \cdot y}{1 + |y|^2}}\right) d\sigma(y).$$

この定理の証明は通常 Semi-Group の理論を通じて行なわれるようである[1]。しかしながら伊藤正之氏は直接的な証明を広い背景のもとで一般的な形で与えている[2]。その

証明から我々に必要な最小限を取り出して以下にまとめておく。

定理1の証明の概略. $1) \Rightarrow 2)$. R^n の超函数で $u = -\hat{\varphi}$ となるものが存在する. $\varphi \in C_k^\infty$ とすると $\int D_i \varphi dx = 0 \Rightarrow 0 \geq \varphi * (D_i \varphi) * (D_i \check{\varphi})(0) = -D_i^2 (\varphi * \varphi * \check{\varphi})(0) \Rightarrow D_i^2 \varphi$ は type positive $\Rightarrow D_i^2 \varphi \in \mathcal{S}' \Rightarrow \varphi \in \mathcal{S}'$ であるから。

条件 b) もフーリエ変換すると $u(|\hat{\varphi}|^2) \geq 0$ を得る. $\hat{\varphi} \in \mathcal{S}$, $\hat{\varphi}(0) = 0$ に注意すると P を同次一次式とすると $P^2 u$ が R^n の正の超函数 $\Rightarrow$ 正の測度となることがわかる. したがって, $\sigma = \frac{1}{|x|^2} \cdot |x|^2 u$ は $R^n - \{0\}$ の正の測度となる. $pf\sigma$ も σ の有限部分とすると $\{0\}$ 以外で u と一致するから $S_{u-pf\sigma} = \{0\}$. したがって

$$u - pf\sigma = C\varepsilon + l\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right)\varepsilon + q\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right)\varepsilon + r\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right)\varepsilon$$

となる. このにおいて C は常数, l, q はそれぞれ同次/次, 2次の多項式, r は3次以上の項から成る多項式である. 条件 a) によつて $l \equiv 0$. $r \equiv 0$ も次のようにして之をえる. たとへば原点の近くで $\varphi_k = x_i^4$, $S_{\varphi_k} \rightarrow \{0\}$ となるような適当な C_k^∞ の元の列をとると $x_i^2(u - pf\sigma)$ が測度となることから $(u - pf\sigma)(\varphi_k) \rightarrow 0$. したがって $\frac{\partial^4}{\partial x_i^4}$ の係数は0とな

る. $p^2 p f \sigma = p^2 \sigma$ は原点に charge しないので $p^2 u - p^2 \sigma \geq 0$. 右辺をみると $q(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}) p^2 \geq 0 \Rightarrow q \gg 0$.
 あと $\int_{|x|>1} d\sigma(x) < +\infty$ か. これは $C \geq 0$ はたいてい成り立つ. $u = u_1 + \sigma_1$, ただし u_1 は support が $\{|x| \leq 1\}$ に入っている超関数, $\sigma_1 = \sigma|_{|x|>1}$ と書ける. $\hat{u} = -\psi$ および $\hat{u}_1$ は連続な函数であるから $\hat{\sigma}_1$ も連続. $\Rightarrow \hat{\sigma}_1(0) = \int_{|x|>1} d\sigma(x) < +\infty$.
 2) $\Rightarrow$ 1) はさほどの困難をもたない. 終り.

§3. 同次負型函数

$K(x)$ が $\mathbb{R}^n$ の次数 $\alpha - n$ の同次核とすると $\hat{K}(y)$ は次数 $-\alpha$ の同次核となる. したがって同次負型函数の形を求めることは同次 Dirichlet 核の形を求めることに直接つながる.

まず, Lévy - Khinchine の分解式の積分の項から 2 次以上の項がでないことを証明する.

Lemme 1. σ が $\mathbb{R}^n - \{0\}$ の測度で次の条件を満たすとする.

$$\left| \int \frac{|z|^2}{1 + |z|^2} d\sigma(z) \right| < \infty.$$

このとき

$$\lim_{y \rightarrow \infty} \frac{1}{|y|^2} \int (1 - e^{2\pi i y \cdot z}) d\sigma(z) = 0.$$

証明. 任意の $\varepsilon > 0$ に対し $\delta > 0$ が存在して次のようになる.

$$\frac{1}{|y|^2} \left| \int_{|z| < \delta} (1 - e^{2\pi i y \cdot z}) d\sigma(z) \right| \leq 4\pi^2 \int_{|z| < \delta} |z|^2 d|\sigma|(z) < \varepsilon.$$

他方,

$$\lim_{y \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{|y|^2} \int_{|z| \geq \delta} (1 - e^{2\pi i y \cdot z}) d\sigma(z) \right|$$

$$\leq \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{2}{|y|^2} \int_{|z| \geq \delta} d|\sigma|(z) = 0.$$

終り.

この証明は [3] における lemme の証明を見習っている。

たゞちに次のことが成る。

Lemme 2. ψ が $\mathbb{R}^n$ の負型函数で同次 2 次ならば

$$\psi = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} y_i y_j,$$

ここで (a_{ij}) は正型である。逆も成り立つ。

ついで同次随伴核のフーリエ変換が同次随伴核であることを証明する。

Lemme 3. K を $\mathbb{R}^n$ の核, A を $|A| \neq 0$ なる n 次元マトリックスとする。

$$K(x) = \frac{1}{(x^t A x)^{(n-\alpha)/2}} \quad \text{pour } x \in \mathbb{R}^n - \{0\},$$

ならば

$$\hat{K}(y) = \frac{\Gamma(\alpha/2)}{\Gamma((n-\alpha)/2)} \frac{\pi^{n/2-\alpha}}{\sqrt{|A|}} \frac{1}{(y^t A y)^{\alpha/2}} \quad \text{pour } y \in \mathbb{R}^n - \{0\}.$$

証明. 次の枠に書ける。

$$K(x) = \frac{1}{2^{n-\alpha-2} \Gamma((n-\alpha)/2)} \int_0^\infty e^{-x^t A x / 2 \sigma^2} \sigma^{-n+\alpha-1} d\sigma.$$

ここで $h(x) = e^{-x^t A x / 2 \sigma^2}$ とおくと,

$$\hat{h}(y) = \sqrt{\frac{(2\pi)^n}{|A|}} \sigma^n e^{-2\pi^2 \sigma^2 y^T A^{-1} y}.$$

したがって

$$\begin{aligned} \hat{k}(y) &= \frac{2^{\frac{\alpha+2}{2}}}{\Gamma((n-\alpha)/2)} \sqrt{\frac{\pi^n}{|A|}} \int e^{-2\pi^2 \sigma^2 y^T A y} \sigma^{\alpha-1} d\sigma \\ &= \frac{\Gamma(\alpha/2)}{\Gamma((n-\alpha)/2)} \frac{\pi^{\frac{n}{2}-\alpha}}{\sqrt{|A|}} \frac{1}{(y^T A^{-1} y)^{\alpha/2}}. \end{aligned}$$

終り.

Lemme 2 と 3 から次の定理を得る.

Théorème 2. K を $2-n$ 次の同次核とする. K が Dirichlet 核であるための必要充分条件は K が植内核である事.

かように $2-n$ 次の同次 Dirichlet 核にはきつい制約が加わる. しかしながら $\alpha-n$ 次の同次 Dirichlet 核に加わる制約は α が小さくなるにしたがって弱くなる. ひとまず同次 Dirichlet 核を得るための充分条件を定理 2 の系として与えておく.

Corollaire. $0 < \alpha \leq 2$ に対して $\alpha-n$ 次の同次植内核は Dirichlet 核である.

α の範囲に限ったのは, Lévy-Khinchine の定理と Lemme 1 からたいていここで与えるところの次の Lemme による.

Lemme 4. 同次負型函数の次数 α は, $0 < \alpha \leq 2$ に限られる.

系は次の一般論の特別の場合である.

Théorème 3. (Beurling-Deny[4]). K が Dirichlet 核であるとき, $0 < \alpha \leq 1$ に対して次のような Dirichlet 核 h が存在する.

$$\hat{h} = \hat{K}^\alpha.$$

λ_α を α 次の同次負型函数とすると, $0 < \alpha < 2$ ならば, Lévy-Khinchine の定理と Lemme 1 によって

$$\lambda_\alpha(x) = \int (1 - e^{2\pi i x \cdot y}) d\sigma_\alpha(y)$$

となることがわかる. σ_α は Lemme 1 の条件を両す正の測度で α 次の同次負型函数をもたらすものとする.

Lemme 5. σ_α は $-n-\alpha$ 次である.

証明. 球座標を用いて

$$\lambda_\alpha(r, \theta) = \int (1 - e^{2\pi i r r' \theta \cdot \theta'}) d\sigma_\alpha(r', \theta')$$

と書くことにする. $\theta \cdot \theta'$ は単位ベクトルの内積とする.

$$\begin{aligned} \lambda_\alpha(ar, \theta) &= \int (1 - e^{2\pi i ar r' \theta \cdot \theta'}) d\sigma_\alpha(r', \theta') \\ &= a^{-n} \int (1 - e^{2\pi i r r' \theta \cdot \theta'}) d\sigma_\alpha\left(\frac{r'}{a}, \theta'\right). \end{aligned}$$

λ_α は α 次同次であるから $a^\alpha \lambda_\alpha(r, \theta) = \lambda_\alpha(ar, \theta)$ である. 上の式と比較すればよい. 終り.

この Lemme によって σ_α に対して単位球面上の正測度 C'_α があって

$$d\sigma_\alpha(r', \theta') = r'^{-n-\alpha-1} dr' dC'_\alpha(\theta')$$

となることがわかる。

逆に単位球面上に C'_α が与えられると上の式によって特異測度 σ_α が定まる。この特異測度に対応する α 次の同次負型関数は次の Lemme によって定まる。

Lemme 6. C'_α を単位球面上の測度とすると

$$\begin{aligned} \int (1 - e^{2\pi i r r' \theta \cdot \theta'}) r'^{-\alpha-1} dr' dC'_\alpha(\theta') \\ = \frac{2^{\alpha-1} \pi^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+1) \sin \frac{\alpha\pi}{2}} \int |\theta \cdot \theta'|^\alpha dC'_\alpha(\theta) \cdot r^\alpha \end{aligned}$$

ただし $0 < \alpha < 2$ とする。

証明. 少し計算をすればよい。 $0 < \alpha < 2$ のとき

$$\int_0^\infty \frac{\sin ar'}{r'^\alpha} dr' = \frac{\pi a^{\alpha-1}}{2\Gamma(\alpha) \sin \frac{\alpha\pi}{2}}$$

となるがこれを変形すれば次を得る。

$$\int_0^\infty \frac{1 - \cos ar'}{r'^{\alpha+1}} dr' = \frac{\pi a^\alpha}{2\Gamma(\alpha+1) \sin \frac{\alpha\pi}{2}},$$

ここで $a = 2\pi r |\theta \cdot \theta'|$ とおけばよい。

終り。

以上を統合して次の定理を得る。

Théorème 4. ψ が R^m の α 次 ($0 < \alpha \leq 2$) の同次関数とする。 ψ が負型関数ならば単位球面上の正測度 C' があつて

$$\psi(r, \theta) = \int |\theta \cdot \theta'|^\alpha dC'(\theta') \cdot r^\alpha$$

となる. 逆に C' を単位球面上の正測度とすると上式によって与えられる同次関数は負型である.

証明. $0 < \alpha < 2$ に対しては Lemme 5 と 6 を用いればよい. $\alpha = 2$ のときには $r^2 \int |\theta \cdot \theta'|^2 dC'(\theta')$ は随円となるから Lemme 2 に帰着する.

Théorème 5. K を $\mathbb{R}^m$ の α - n 次の同次関数とすると, K が Dirichlet 核ならば $0 < \alpha \leq 2$ であり, 球面上の正測度 C が存在して

$$k(r, \theta) = \frac{1}{r^{m-\alpha}} \int \frac{d\rho(\theta')}{|\theta \cdot \theta'|^{m-\alpha} \int |\theta' \cdot \theta''|^\alpha dC(\theta'')}$$

と書ける. ρ は単位球面上の一般測度である.

逆に任意の $0 < \alpha \leq 2$ と, $r^\alpha \int |\theta' \cdot \theta''|^\alpha dC(\theta'')$ の逆数を局所可積分とするような球面上の任意の正測度 C に対して, 上式は Dirichlet 核を与える.

証明. フーリエ変換の計算をすればよい.

この節を終えるに際して, 随円でない Dirichlet 核の例をあげておく.

Exemple. $0 < \alpha \leq 2$, $C_1, C_2, \dots, C_n > 0$ とすると次によって与えられる核 K は Dirichlet 核である.

$$\hat{K}(y) = \frac{1}{C_1 |y_1|^\alpha + C_2 |y_2|^\alpha + \dots + C_n |y_n|^\alpha}$$

実際、座標軸上にのみ乗って Lemme 1 の条件を満たす正の $\alpha - n$ 次の測度 σ があって

$$\sum_{i=1}^n C_i |y_i|^\alpha = \int (1 - e^{2\pi i y \cdot z}) d\sigma(z)$$

と書ける。 $\hat{K}(y)$ が局所可積分であることは明らかである。

$0 < \alpha < 2$ のとき $\sum C_i |y_i|^\alpha$ は楕円ではないから Lemme 3 によって K も楕円でない。

§4. Dirichlet 核の同次変換.

$T = (t_{ij})_{i,j=1}^m$, $|T| \neq 0$ とする。 $R^m \ni x \rightarrow Tx \in R^m$ が同次函数を、次数を変えないで、同次函数に変換することは明らかである。さらに次の事がいえる。

Théorème 6. K が R^m の Dirichlet 核ならば $K'(x) = K(Tx)$ も又然りである。

証明. Lévy - Khinchine の分解式から始める。 $a \geq 0$, σ は Lemme 1 の条件を満たす正測度, B は n 次元正型マトリックスとする。

$$\frac{1}{\hat{K}(y)} = a + y^t B y + \int (1 - e^{2\pi i x \cdot y}) d\sigma(z).$$

他方,

$$\int K'(x) e^{2\pi i x \cdot y} dx = \frac{1}{\|T\|} \int K(x') e^{2\pi i x' \cdot T^{-1} y} dx',$$

$x' = Tx$, $|T|$ は T の行列式の値である。それ故,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\hat{K}'(y)} &= \|T\| \left[a + (T^{-1}y)^{\dagger} B (T^{-1}y) + \right. \\ &\quad \left. + \int (1 - e^{2\pi i (T^{-1}y) \cdot z}) d\sigma(z) \right] \\ &= \|T\| \left[a + y^{\dagger} B' y + \int (1 - e^{2\pi i y \cdot z'}) d\sigma(Tz') \right] \end{aligned}$$

こゝにおいて $B' = (T^{-1})^{\dagger} B T^{-1}$, $z' = T^{-1}z$ である。 $\sigma \cdot T$ は必要な条件を満たす測度であるから $K(Tx)$ は Dirichlet 核である。 終り。

かようにして T は (必ずしも同次でない) Dirichlet 核を Dirichlet 核に変換するために, 同次変換が満たすべき充分条件の一つを与える。逆に同次変換 T が常に Dirichlet 核を Dirichlet 核に移すなら, T は $|T| \neq 0$ なるマトリックスでなければならない。

Théorème 7. T が同次変換であるとする。次は同値である。

- a) $K(x)$ が Dirichlet 核であるとき, $K(Tx)$ も然り。
- b) $K(x)$ が $2-\pi$ 次の Dirichlet 核であるとき, $K(Tx)$ も然り。
- c) T は $|T| \neq 0$ なるマトリックスである。

証明. 定理をよくみると, 楕円を楕円に移す同次変換がマ

トリックスに限られるといっているに過ぎないことがわかる。
すなわち, $a) \Rightarrow b)$ は明らかであり, $c) \Rightarrow a)$ は定理 6 の
のものである. $b) \Rightarrow c)$ は上記の争柄のいゝ受である.

$Tx = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)), f_i(x) (i=1, 2, \dots, n)$
はお互いに線型独立であるとする. $1 \leq i, j \leq n$ に対して
 $f_i(x) \cdot f_j(x)$ は $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ の同次 2 次式でなければなら
ないから, $f_i(x)$ はすべて同次 1 次式でなければなら
ない. $|T| \neq 0$ でなければならないことは明らかである.

終り.

§ 3 と § 4 の約 3 分の 2 は [5] による.

以上.

参考文献

- [1] P. Courrège: Générateur Infinitésimal
d'un semi-groupe de convolution sur R^n ,
et formule de Lévy-Khinchine. Bull. Sc.
math., 2^e série, 88, 3-30 (1964).
- [2] M. Itô: Lecture note, Nagoya Univ.,
(1971).
- [3] ———: Sur les noyaux de Frostman-Kunugi
et les noyau de Dirichlet. Ann.

Inst. Fourier (à paraître).

- [4] A. Beurling et J. Deny: Dirichlet spaces.
Proc. Nat. Acad. Sc. U. S. A., 45, 208-
215 (1959).
- [5] Y. Ito: Sur la transformation homogène
du noyau de Dirichlet. Proc. Jap. Acad.,
47, 301-304 (1971).