

非線形SOR型反復について

愛媛大学理学部 山本 哲朗 (YAMAMOTO Tetsuro)
大阪女子大学学芸学部 石原 和夫 (ISHIHARA Kazuo)
早稲田大学理工学部 室谷 義昭 (MUROYA Yoshiaki)

§1. はじめに

非線形方程式

$$F(z) = 0, \quad F = (F_1, \dots, F_n)^t, \quad z = (z_1, \dots, z_n) \quad (1.1)$$

に対するSOR法は $k = 0, 1, 2, \dots$ につき次で定義される。

$$(I) \quad F_i(z_1^{(k+1)}, \dots, z_{i-1}^{(k+1)}, z_i, z_{i+1}^{(k)}, \dots, z_n^{(k)}) = 0 \text{ を } z_i \text{ につき解き} \quad (1.2)$$

$$z_i^{(k+\frac{1}{2})} = z_i$$

とおく。

$$(II) \quad z_i^{(k+1)} = z_i^{(k)} + \omega(z_i^{(k+\frac{1}{2})} - z_i^{(k)}) \text{ とおく。 } 1 \leq i \leq n. \quad (1.3)$$

一般に (1.2) を z_i について解くことはできないから、Newton法の第1近似を z_i として代用し

$$z_i^{(k+\frac{1}{2})} = z_i^{(k)} - \frac{F_i(z^{(k,i-1)})}{F_{ii}(z^{(k,i-1)})}, \quad 1 \leq i \leq n, \quad k \geq 0$$

とする。但し、 $z^{(k,i-1)} = (z_1^{(k+1)}, \dots, z_{i-1}^{(k+1)}, z_i^{(k)}, \dots, z_n^{(k)})$. これを (one-step) SOR-Newton法という。従ってそのプロセスは

$$z_i^{(k+1)} = z_i^{(k)} - \omega \frac{F_i(z^{(k,i-1)})}{F_{ii}(z^{(k,i-1)})}, \quad 1 \leq i \leq n, \quad k \geq 0 \quad (1.4)$$

と書ける。特に $F = Az - b$ の場合には SOR-Newton法は通常のSOR法

$$z_i^{(k+1)} = z_i^{(k)} - \omega \frac{\sum_{j<i} a_{ij} z_j^{(k+1)} + \sum_{j \geq i} a_{ij} z_j^{(k)} - b_i}{a_{ii}}, \quad 1 \leq i \leq n, \quad k \geq 0$$

または、

$$z^{(k+1)} = \mathcal{L}_\omega z^{(k)} + (D - \omega L)^{-1} b, \quad k \geq 0$$

$$\mathcal{L}_\omega = (D - \omega L)^{-1} \{(1 - \omega)D + \omega U\}, \quad A = D - L - U$$

と一致するから、(1.4) も SOR法と呼ばれることが多い。

§2. 多項式解法への応用

近年 研究対象とされる多項式解法は D-K 法、Aberth 法等のいわゆる全根同時型解法であり、それらは

$$z_i^{(k+1)} = z_i^{(k)} - P(z_i^{(k)})Q_i(z^{(k)}), \quad 1 \leq i \leq n, \quad k \geq 0 \quad (2.1)$$

の形に書ける。例えば D-K 法では、

$$Q_i(z^{(k)}) = \frac{1}{\prod_{j \neq i} (z_i^{(k)} - z_j^{(k)})}.$$

である。これらの SOR 型加速

$$z_i^{(k+1)} = z_i^{(k)} - \omega P(z_i^{(k)})Q_i(z_1^{(k+1)}, \dots, z_{i-1}^{(k+1)}, z_i^{(k)}, \dots, z_n^{(k)}), \quad 1 \leq i \leq n, \quad k \geq 0 \quad (2.2)$$

または、

$$z_i^{(k+1)} = z_i^{(k)} - \omega P(z_i^{(k)})\hat{Q}_i(z_1^{(k+1)}, \dots, z_{i-1}^{(k+1)}, z_1^{(k)}, z_2^{(k)}, \dots, z_n^{(k)}), \quad 1 \leq i \leq n, \quad k \geq 0 \quad (2.3)$$

に対し、次の結果が成り立つ。

定理 2.1 (2.1) が Traub の意味で 少なくとも 2 次収束であれば、その SOR 型加速 (2.2), (2.3) は $|\omega - 1| < 1$ のとき $P(z) = 0$ の解 $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ に局所収束し、 $|\omega - 1| > 1$ のとき発散する。局所的には $\omega = 1$ のとき最適である。

従って、D-K 法、Aberth 法、Tanabe 法、Nourein 法、Kjurkchiev-Andreev 法 (1992), 等すべての全根同時型解法には 定理 2.1 が適用可能であり、実計算の手法として、反復の初期値の段階では $\omega > 1$, 後半では、 $\omega \doteq 1$ とするのがよい。

§3. Mildly nonlinear equation への応用

R^n における方程式

$$Ax + \varphi(x) = 0, \quad A: n \text{ 次行列}, \varphi(x) = (\varphi_1(x_1), \dots, \varphi_n(x_n)) \quad (3.1)$$

に対する SOR 法と SOR-Newton 法を考える。 A が M -行列、 φ が R^n 上 isotone のとき、SOR 法が $0 < \omega < 2$ で局所収束、また $0 < \omega \leq 1$ で大域収束 ($\forall z^{(0)} \in R^n$ につき収束) することはよく知られている。次の結果が成り立つ。

定理 3.1 A を 正値対称行列、 φ が R^n 上 isotone のとき、SOR-Newton 法は $0 < \omega < 2$ で局所収束、 $0 < \omega \leq 1$ で大域収束する。

また 次の結果が成り立つ。

定理 3.2 A が 正値対称行列、 $0 \leq \varphi' \leq \kappa$ のとき *SOR-Newton* 法は

$$0 < \omega < \omega^* = \min_i \frac{2a_{ii}}{a_{ii} + \kappa}$$

において大域収束する。また、 ω は 次の何れかの条件の下で、各ステップ毎、各成分毎に動かしてよい。

- (a) $\varepsilon > 0$ を与えられた定数として、 $0 < \varepsilon \leq \omega_i^{(k)} \leq \omega^* - \varepsilon$, $1 \leq i \leq n$. (k は充分大).
 (b) $0 < \omega_i^{(k)} = \omega_i < \omega^*$, $1 \leq i \leq n$, $k \geq 0$.

特に Dirichlet 問題

$$\begin{cases} \Delta u = f(u) & \text{in } \Omega \subset R^N \\ u = g & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

を離散化して生ずる方程式 (3.1) においては $\varphi' = h^2 f'$ であるから、定理 3.1 より、次のことが結論される: $0 \leq f' \leq M$ ならば *SOR-Newton* 法は

$$0 < \omega < \omega_h^* = \min_i \frac{2a_{ii}}{a_{ii} + h^2 M} = 2 - O(h^2)$$

において大域収束する。さらに、次のことも成り立つ。

定理 3.3 $0 \leq f' \leq M$ のとき、*SOR* 型反復

$$x_i^{(k+1)} = x_i^{(k)} - \omega \frac{\sum_{j < i} a_{ij} x_j^{(k+1)} + \sum_{j \geq i} a_{ij} x_j^{(k)} + \varphi_i(x_i^{(k)})}{a_{ii} + h^2 M}, \quad 1 \leq i \leq n$$

は $0 < \omega < 2$ において大域収束する。 ω は 次の何れかの条件の下で動かしてよい。

- (a) $0 < \varepsilon \leq \omega_i^{(k)} \leq \omega_h^* - \varepsilon$, $1 \leq i \leq n$ (k は充分大)
 (b) $0 < \omega_i^{(k)} = \omega_i < 2$, $1 \leq i \leq n$, $k \geq 0$.

尚、 φ に関する条件を一般にして $\kappa_* \leq \varphi' \leq \kappa^*$ (κ_* , κ^* は定数) を仮定するときには、 $\tilde{A} = A + \kappa_* I$ が 正値対称のとき、 $\tilde{A}x + \psi(x) = 0$, $\psi(x) = \varphi(x) - \kappa_* x$ として 定理 3.1–3.3 を適用すればよい。

(附記) 本稿は 1995 年 10 月 27 日における山本の講演内容に手を加え、その後 著者達との交流により得られた研究成果を追加したものである。

文献

- [1] S.Kanno, N.V.Kjurkchiev, T.Yamamoto, On some methods for the simultaneous determination of polynomial zeros, Japan JIAM (掲載予定)

- [2] T.Yamamoto, SOR-like methods for the simultaneous determination of polynomial zeros, Proceedings of IMACS-GAMM symposium held in Oldenburg, 1995 (Herzberger 編, Elsevier より 1996 年 4 月出版予定)
- [3] T.Yamamoto, On nonlinear SOR-like methods, I – Applications to simultaneous methods for polynomial zeros, Japan JIAM (掲載予定)
- [4] K.Ishihara, Y.Muroya, T.Yamamoto, On nonlinear SOR-like methods, II – Convergence of the SOR-Newton method for mildly nonlinear equations (準備中)