

一般化された Mycielski グラフの boxicity と chromatic number について

*[†]上別府 陽 (島根大学大学院総合理工学研究科)

グラフはすべて有限かつ単純な無向グラフとし, グラフ G の頂点集合を $V(G)$, 辺集合を $E(G)$ で表す. また, グラフの頂点 u と v を結ぶ辺を uv と書くことにする. 空でない, ある集合族 $\mathcal{F}$ に対して, 頂点集合が $\mathcal{F}$ で, 辺集合が

$$\{F_1 F_2 \mid F_1, F_2 \in \mathcal{F}, F_1 \neq F_2, F_1 \cap F_2 \neq \emptyset\}$$

で定義されるグラフを集合族 $\mathcal{F}$ の *intersection* グラフと呼ぶ. 特に, $\mathcal{F}$ が実数直線上の閉区間からなるある集合族のとき, この intersection グラフを *interval* グラフと呼ぶ. また, あるグラフ G が $\mathcal{F}$ の intersection グラフで表現できるとは, $V(G)$ と $\mathcal{F}$ の間に全単射があって, 「 G の 2 頂点が u と v が辺で結ばれること」と「 u と v に対応する集合族 $\mathcal{F}$ の元 F_u と F_v の共通部分が空でないこと」が必要十分であるときとする.

実数直線上の k 個の閉区間 $I_1, I_2, \dots, I_k$ の直積 $I_1 \times I_2 \times \dots \times I_k$ のことを k 次元ユークリッド空間内の *box* と呼ぶ. 一般に, n 個の頂点を持つグラフ G は n 次元ユークリッド空間の box からなるある集合族の intersection グラフで表現できる ([8], Chapter 5, Theorem 5.3). そこで,

「グラフ G が k 次元ユークリッド空間の box からなるある集合族の intersection グラフで表現できるときの最小値 k 」

をグラフ G の *boxicity* と呼び, $\text{box}(G)$ で表す. グラフ H が G の誘導部分グラフならば, $\text{box}(G) \geq \text{box}(H)$ である.

グラフの boxicity の概念は, Roberts [7] によって紹介され, 生態学における生態ニッチの交差やオペレーションズリサーチにおける艦隊維持等, 様々な分野へ応用されている ([6, 9]). また, Roberts は n 個の頂点を持つグラフの最大 boxicity が $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ であることを示した. 具体的には, 完全多部グラフ $K_{2,2,\dots,2}$ または $K_{2,2,\dots,2,1}$ の boxicity が最大 boxicity に達することがわかっている. なお, 講演内で紹介したが, 文献 [2] にはグラフの boxicity を計算に役立つ強力なツールが記されている. 近年, Chandran [1] らが boxicity $\text{box}(G)$ と chromatic number $\chi(G)$ との間に, 次の関係があることを発見した.

Theorem 1 ([1]). $s \geq 0$ とする. $\text{box}(G) = \frac{|V(G)|}{2} - s$ ならば, $\chi(G) \geq \frac{|V(G)|}{2s+2}$ である.

Theorem 1 は「グラフ G の boxicity が最大 boxicity に近ければ, G の chromatic number も大きくなること」を示している. これにより, boxicity と chromatic number の挙動が似ているかもしれないと期待できるが, 一般には期待できない. また, これまでに多くの研究者が良く知られたグラフの boxicity の上界・下界を調べたが, そもそも, boxicity を大きく

*This work was supported by Grant-in-Aid for Young Scientists (B), No.25800091.

[†]Interdisciplinary Faculty of Science and Engineering, Shimane University, Shimane 690-8504, Japan.
E-mail address: kamibeppu@riko.shimane-u.ac.jp

するグラフの構造に関する情報は多くない。本講演の目的は、boxicity を大きくする新たなグラフの族を紹介することである。例えば、chromatic number を大きくするようなグラフの再構成法は、boxicity を大きくするかもしれない。グラフ G の focalization G^f (G に 1 頂点を加えて、 G のすべての頂点と辺で繋いで得られるグラフ) は、chromatic number を大きくするが、boxicity を大きくしないことを注意しておく。そこで、グラフの focalization の一般化に相当する、[3, 5] で紹介されたグラフの再構成法「generalized Mycielski's construction」を紹介する。

G をグラフとし、 r を 2 以上の整数、 $z \notin V(G)$ とする。 $V(G)_i$ ($i = 1, 2, \dots, r$) を頂点集合 $V(G)$ のコピーとし、 v_i を $V(G)$ の元 v に対応する $V(G)_i$ の元とする。また、

$$\begin{aligned} E_1 &= \{u_1 v_1 \mid uv \in E(G)\}, \\ E_i &= \{u_{i-1} v_i, v_{i-1} u_i \mid uv \in E(G)\} \quad (i = 2, 3, \dots, r), \\ E_{r+1} &= \{z u_r \mid u \in V(G)\} \end{aligned}$$

とする。頂点集合を $\{z\} \cup \bigcup_{i=1}^r V(G)_i$ とし、辺集合を $\bigcup_{i=1}^{r+1} E_i$ とするグラフを、 G の generalized Mycielski グラフと呼び、 $M_r(G)$ で表す。 $M_2(\cdot)$ は chromatic number が十分に大きい、

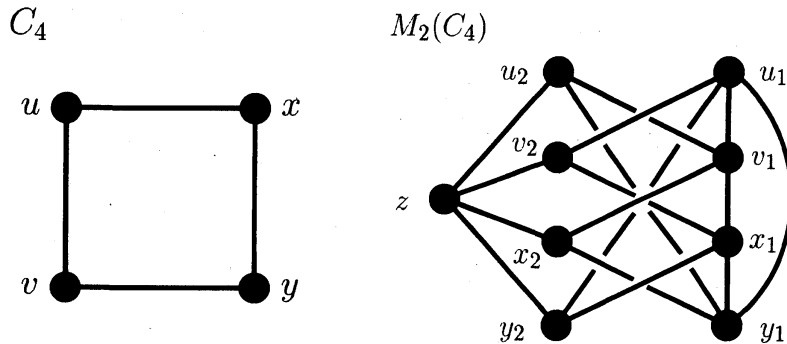


Fig. 1: Cycle C_4 and its Mycielski graph $M_2(C_4)$.

triangle-free グラフの構成のために、Mycielski が考案した有名なグラフである。また、 $V(G)_1$ が誘導する $M_r(G)$ の部分グラフは元のグラフ G だから、 $\text{box}(M_r(G)) \geq \text{box}(G)$ であることがわかる。

Lemma A ([4], cf. [2], Corollary 3.6). H_1, H_2 をグラフ G の補グラフ $\bar{G}$ の誘導部分グラフとする。2 つのグラフ H_1 と H_2 の距離 $d_{\bar{G}}(H_1, H_2)$ が 2 以上ならば、次が成り立つ:

$$\text{box}(G) \geq \text{box}(H_1) + \text{box}(H_2).$$

G^{f^n} をグラフ G に対する n 回の focalization $\overbrace{((G^f)^f)^f \dots}^n$ とする。Lemma A を使えば、次の結果を得ることができる。次の定理の証明は、 $r = 2$ の場合に示しておけば十分であることがわかる。

Theorem B ([4]). 自然数 n に対して、 $\text{box}(M_r(G^{f^n})) \geq \text{box}(G^{f^n}) + \lceil \frac{n}{2} \rceil$ が成り立つ。

グラフの focalization と Mycielski's construction を繰り返すことで、あらかじめ指定しておいた定数を超えるような boxicity と chromatic number を持つグラフを構成することができる。

Corollary C ([4]). どんな整数 k および, どんなグラフ G が与えられても, $\text{box}(X(G)) > k$ かつ $\chi(X(G)) > k$ を満たすグラフ $X(G)$ を G から再構成できる.

References

- [1] L. S. Chandran, A. Das, and C. D. Shah, Cubicity, boxicity, and vertex cover, *Discrete Math.* 309 (2009) 2488-2496.
- [2] M. B. Cozzens and F. S. Roberts, Computing the boxicity of a graph by covering its complement by cointerval graphs, *Discrete Appl. Math.* 6 (1983) 217-228.
- [3] A. Gyárfás, T. Jensen, and M. Stiebitz, On graphs with strongly independent color-classes, *J. Graph Theory* 46 (2004) 1-14.
- [4] A. Kamibepu, On the boxicity of generalized Mycielski graphs, submitted. (<http://arxiv.org/abs/1308.2368>)
- [5] J. Mycielski, On graph coloring (in French), *Colloq. Math.* 3 (1955) 161-162.
- [6] R. J. Opsut, and F. S. Roberts, On the fleet maintenance, mobile radio frequency, task assignment, and traffic phasing problems, in: G. Chartrand et al., eds., *The Theory and Applications of Graphs*, Wiley, New York (1981) 479-492.
- [7] F. S. Roberts, On the boxicity and cubicity of a graph, in: *Recent Progress in Combinatorics*, Academic Press, New York (1969) 301-310.
- [8] F. S. Roberts. *Graph Theory and its Applications to the Problems of Society*, CBMS-NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics 29 (1978), SIAM.
- [9] F. S. Roberts. Food webs, competition graphs, and the boxicity of ecological phase space, *Theory and Applications of Graphs*, *Lecture Notes in Mathematics* 642 (1978), Y. Alavi and D. Lick, eds., Springer-Verlag, 447-490.