

変形 Riemann ゼータ分布とその応用

中村隆 (東京理科大学理工学部)

概要

これは論文 [4] の概要である。§1 で古典的な Riemann ゼータ分布について簡単な紹介をする。§2 で変形 Riemann ゼータ分布を定義する。§3 で数論への応用について述べる。証明などは [4] を参照して頂きたい。

1 Riemann ゼータ分布

Riemann ゼータ関数は以下の級数又は Euler 積で定義される。

$$\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_p (1 - p^{-s})^{-1}, \quad s = \sigma + it, \quad \sigma > 1. \quad (1.1)$$

ただし $\prod_p$ は素数全体にわたる積とする。Euler 積表示から Riemann ゼータ関数は $1 < \sigma := \Re(s)$ で零点を持たない。Riemann ゼータ関数 $\zeta(s)$ は全 s 平面の有理型関数に解析接続される。

絶対収束領域 $\sigma > 1$ において、Riemann ゼータ関数を用いた以下の $\mathbb{R}$ 上の分布が古くから知られている。

定義 1.1. $n \in \mathbb{N}$, $\sigma > 1$ に対して、確率変数 X_σ が以下の分布に従うとき Riemann ゼータ確率変数、その分布を Riemann ゼータ分布という。

$$P_{X_\sigma}(\{-\log n\}) = \frac{n^{-\sigma}}{\zeta(\sigma)}.$$

その特性関数 $f_\sigma(t)$, $t \in \mathbb{R}$ は以下の様にゼータ関数を正規化した形で与えられる。

$$f_\sigma(t) = \mathbb{E} e^{itX_\sigma} = \int_{\mathbb{R}} e^{itx} P_{X_\sigma}(dx) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-it \log n} \frac{n^{-\sigma}}{\zeta(\sigma)} = \frac{\zeta(\sigma + it)}{\zeta(\sigma)}.$$

Riemann ゼータ分布は最も古い文献として Khinchine [2] に記されているが、この Riemann ゼータ分布は絶対収束領域を超えることはできない。それは以下のように示される ([1, Remark 1.12] 参照)。 $1/\zeta(1) = 0$, $\zeta(1+it) \neq 0$ であるから、 $\zeta(1+it)/\zeta(1) = 0$, $t \neq 0$ である。よって $\zeta(1+it)/\zeta(1)$ は一様連続関数でないから特性関数でない。任意に固定された $1/2 < \sigma < 1$ に対し $\{\zeta(\sigma+it) : t \in \mathbb{R}\}$ は $\mathbb{C}$ で稠密になることが知られている ([3, 定理 6.1] 参照)。従って任意に $1/2 < \sigma < 1$ を固定すると、 $|\zeta(\sigma+it)| > |\zeta(\sigma)|$ なる t が存在する。さらに $|\zeta(1/2+it)| > |\zeta(1/2)|$ を充たす t が存在することは、Mathematica などの計算ソフトを使えばすぐにわかる。よって $1/2 \leq \sigma < 1$ において $|\zeta(\sigma+it)/\zeta(\sigma)| > 1$ となる $t \in \mathbb{R}$ が存在する。特性関数は確率測度のフーリエ変換であるからその絶対値は 1 を越えない。よって $\zeta(\sigma+it)/\zeta(\sigma)$ は $1/2 \leq \sigma \leq 1$ において特性関数でない。

2 変形 Riemann ゼータ分布

Khinchine [2] 以来知られている古典的な Riemann ゼータ分布は絶対収束領域を超えられないというのは数論関係者にとっては非常に残念な結果である。そこで [4] において Riemann ゼータ分布を上手く変形することにより、絶対収束域を越えられるような数論的かつ確率論的に自然なゼータ分布を定義した。

まず指数分布について簡単にまとめる。パラメーター $\alpha > 0$ の指数分布は

$$\mu(B) = \alpha \int_{B \cap (0, \infty)} e^{-\alpha x} dx, \quad B \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$$

で定義される。その特性関数は

$$\hat{\mu}(z) = \alpha \int_0^\infty e^{itz} e^{-\alpha x} dx = \frac{\alpha}{\alpha - it}$$

であることが知られている ([6, 例 1.2.14] 参照)。

変形 Riemann ゼータ分布を特性関数

$$F_\sigma(t) := \frac{f_\sigma(t)}{f_\sigma(0)}, \quad f_\sigma(t) := \frac{\zeta(\sigma - it)}{\sigma - it}, \quad 0 < \sigma \neq 1. \quad (2.1)$$

により定義する。これが $0 < \sigma < 1$ で特性関数になるのは全く自明ではない。 $\sigma > 1$ で特性関数になることは、 $\zeta(\sigma + it)/\zeta(\sigma)$ は $\sigma > 1$ で特性関数であり、 $\sigma(\sigma - it)^{-1}$ は $\sigma > 0$ で特性関数であり、特性関数同士の積はまた特性関数になることからわかる。 $\sigma = 1$ で特性関数にならないことは、 $\zeta(\sigma + it)/\zeta(\sigma)$ が $\sigma = 1$ で特性関数にならないことの証明と同じ論法で示される。

定理 2.1. $F_\sigma(t)$ は $0 < \sigma \neq 1$ において特性関数になる。さらにその確率密度関数 $P_\sigma(y)$ 次で与えられる。

$$P_\sigma(y) := \begin{cases} \frac{\sigma}{\zeta(\sigma)} \frac{[e^y]}{e^{y\sigma}} & \sigma > 1, \\ \frac{\sigma}{\zeta(\sigma)} \frac{[e^y] - e^y}{e^{y\sigma}} & 0 < \sigma < 1. \end{cases} \quad (2.2)$$

上の定理は $F_\sigma(t) = \int_{-\infty}^\infty e^{itx} P_\sigma(y) dy$ を意味している。これは

$$\frac{\zeta(\sigma + it)}{\zeta(\sigma)} = \int_{-\infty}^\infty e^{ity} \mu_\sigma(dy), \quad \mu_\sigma(dy) := \frac{1}{\zeta(\sigma)} \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^\sigma} \delta_{-\log n}(dy)$$

と比較されるべきである。即ち変形 Riemann ゼータ分布は絶対連続な分布であるが、古典的な Riemann ゼータ分布は離散分布である。変形 Riemann ゼータ分布は指数分布と Riemann ゼータ分布の畳み込みである。特性関数の言葉でいえば、指数分布の特性関数と Riemann ゼータ分布の特性関数の積である。よって変形 Riemann ゼータ分布は確率論的に自然な分布ということができる。

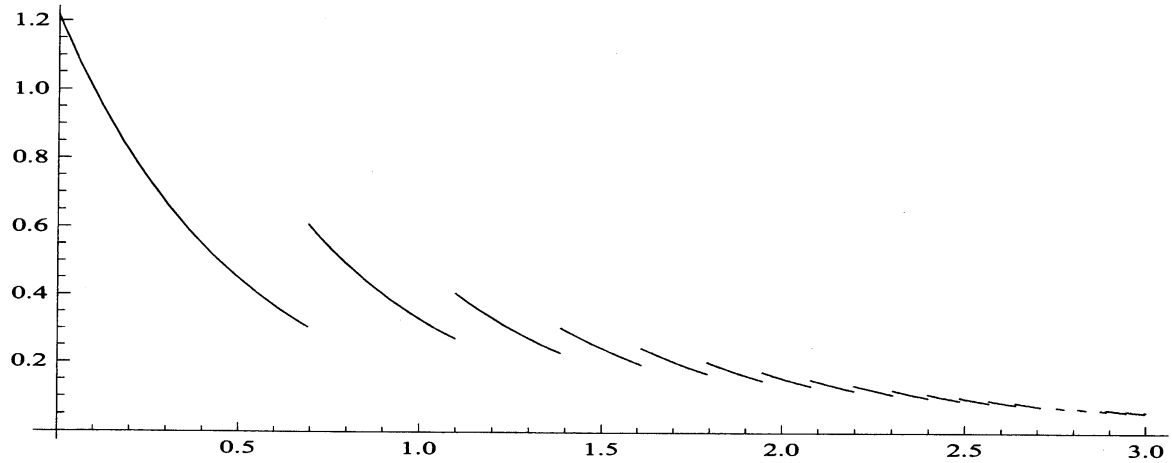


図 1: $\{P_2(y) : 0 \leq y \leq 3\}$

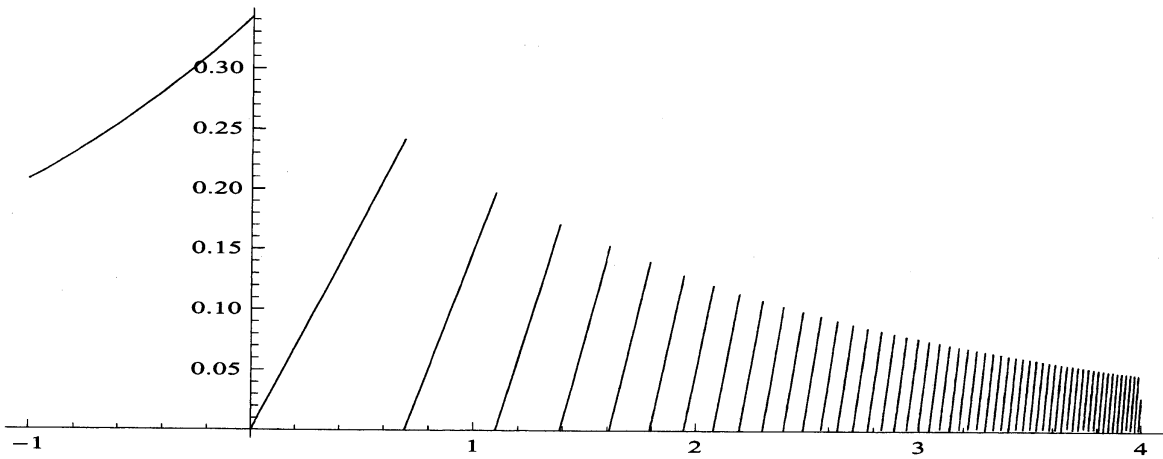


図 2: $\{P_{1/2}(y) : -1 \leq y \leq 4\}$

3 数論への応用

特性関数の絶対値は 1 を超えないことから次の系を得る.

Corollary 3.1. 任意の $t \in \mathbb{R}$ と $0 < \sigma \neq 1$ に対して,

$$|\zeta(\sigma + it)| \leq \frac{|\zeta(\sigma)|}{\sigma} |\sigma + it|. \quad (3.1)$$

ここで $0 < \theta_0 < \theta_1 < 1 < \theta_2$ とし, $M := \max_{\sigma \in [\theta_0, \theta_1] \cup \{\theta_2\}} |\zeta(\sigma)|/\sigma$ とおく. 上の系から次の命題を得る.

命題 3.2. $|C| > M$ を充たす $C \in \mathbb{C}$ に対し, 関数 $\zeta(s) + Cs$ は帯領域 $\theta_0 \leq \sigma \leq \theta_1$, $\theta_2 \leq \sigma$ において零点を持たない.

この命題では $\zeta(s)$ の特異点である $s = 1$ を含む帯領域が除外されている．次の定理では非零領域を右半平面に広げてはいるが， $C \in \mathbb{C}$ の実部について新たな条件が加わる．

定理 3.3. $C \in \mathbb{C}$ は条件 $|C| > 10$ と $-19/2 \leq \Re(C) \leq 17/2$ を満たすとする．このとき $\zeta(s) + Cs$ は右半平面 $\sigma > 1/18$ で零点を持たない．

C の条件を強く (例えば $|C| > 100$) すれば，非零領域は広がる．上の数値は色々数値実験をした結果，最も良い (と思われる) ものを選んだだけであり，深い意味はない．式の形が似ているだけという理由であるが， $\zeta(s) + c^s$ ，ただし $c \in \mathbb{R}$ ，は帯領域 $1/2 < \sigma < 1$ は無限個複素零点を持つことを注意しておく ([5] 参照)．

関数等式などを用いれば， $\sigma < -1/2$ であるとき，任意に固定された $C_+ > 0$ に対して， $|\zeta(\sigma + it)| > C_+ |\sigma + it|$ なる $t \in \mathbb{R}$ が存在する．よって非零領域を全複素平面に拡張することは不可能と推測される．さらに $\sigma < -1/2$ であるときは同様の理由で (3.1) は成り立たないので， $F_\sigma(t)$ は $\sigma < -1/2$ では特性関数にならない．

最後に今後の課題について述べる．それは

$$F_{n,\sigma}(t) := \frac{\sigma}{\sigma - it} \frac{\zeta^n(\sigma - it)}{\zeta^n(\sigma)}$$

が特性関数になるかどうか判定せよという問題である． $n = 1$ である場合はこの論説の主結果により正しい．もし上記の関数が全ての $0 < \sigma \neq 1$ に対して，特性関数になるのであれば，特性関数の絶対値は 1 を超えないことから，

$$|\zeta(\sigma + it)| \leq \frac{|\zeta(\sigma)|}{\sigma^{1/n}} |\sigma + it|^{1/n}.$$

が成り立つ．よって任意の自然数 n に対して， $F_{n,\sigma}(t)$ が全ての $0 < \sigma \neq 1$ において特性関数になるのであれば，Lindelöf 予想は正しいことになる．残念ながら現状では $n = 2$ である場合すら全く手つかずである．

参考文献

- [1] A. Takahiro and T. Nakamura, ‘Multidimensional polynomial Euler products and infinitely divisible distributions on $\mathbb{R}^d$ ’, *arXiv:1204.4041*.
- [2] A. Ya. Khinchine, *Limit Theorems for Sums of Independent Random Variables (in Russian)*, (Moscow and Leningrad, 1938).
- [3] 松本耕二, リーマンのゼータ関数 (開かれた数学), 朝倉書店 2005.

- [4] T. Nakamura, ‘A modified Riemann zeta distribution in the critical strip’, to appear in *Proceedings of the American Mathematical Society*.
- [5] T. Nakamura and Łukasz Pańkowski, “On complex zeros off the critical line for non-monomial polynomial of zeta-functions”, *arXiv:1212.5890*.
- [6] 佐藤健一, 加法過程 (紀伊國屋数学叢書 33), 紀伊國屋書店 1990.