

巡回的消散作用素により生成された

非線形半群について

東大 理 渡辺 二郎

序

実ヒルベルト空間 H における縮小作用素の半群の理論は高村幸男氏により基礎が確立された (Komura [1], [2])。この理論によれば $H \times H$ の極大な消散⁽¹⁾部分集合は H における縮小作用素の半群を生成する。ところで H 上で定義された下半連続な凸関数 f の劣微分⁽²⁾ ∂f に対して、 $-\partial f$ は極大な消散集合であることが証明される (§ 5, Moreau [1])。本稿では、 H 上の連続な凸関数 f が与えられたとき、 $-\partial f$ によって生成される縮小作用素の半群をとりあつかう。

§§ 1, 2, 3 と 5 においては必要となる概念について、最後の § 9 においては主要な結果について述べる。§§ 4 と 8 は

(1) 消散 = dissipative.

(2) 劣微分 = sub-differential.

§ 9 における理論の展開のための準備であり, §§ 6 と 7 において例をあげる.

記号についての説明. 二つの集合 X と Y の直積 $X \times Y$ の要素を $[x, y]$ とかく. $X \times Y$ の部分集合 A に対して $Ax = \{y; [x, y] \in A\}$, $D(A) = \{x; Ax \neq \emptyset\}$ とかく. $D(A)$ を A の定義域という. 各 $x \in D(A)$ に対して Ax がただひとつの点からなる集合のとき A を作用素という. Y がノルム空間であるとき, もし Ax に最小のノルムをもつ要素がただひとつだけあるならば, この要素を A^0x とかく.

§ 1. 凸関数

X は実線形位相空間, X' はその双対空間とする. f は X において定義された広義の実数値関数とする. すべての $x \in X$ に対して $f(x) > -\infty$ であり, ある点において f が有限の値をとるとき, f は適性⁽¹⁾関数であるということにする. f は X 上の適性関数とする. 点 x_0 において f は有限の値をとるとする. $y \in X$ に対して, もし下記の式の右辺が存在するならば,

$$f'(x_0; y) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{r} \{f(x_0 + ry) - f(x_0)\}$$

とかく (directional derivative). f の劣微分 f' は

(1) 適性 = proper.

$$\partial f = \{[x, x'] \in X \times X'; f(y) \geq f(x) + \langle y - x, x' \rangle, \forall y \in X\}$$

と定義する。 f が適性であるから、明らかに ∂f の定義域 $D(\partial f)$ に属する点において f は有限である。 $[x, x'] \in \partial f$ であるとき、 f は x において劣微分可能であるといひ、 x' は x における f のひとつの劣勾配といふ⁽¹⁾。

f は X 上の適性凸関数とする。点 $x \in X$ において f が有限ならば、任意の $y \in X$ に対して $f'(x; y)$ が定義される。このとき $[x, x'] \in \partial f$ と $f'(x; y) \geq \langle y, x' \rangle$ ($\forall y \in X$) が同値であることが容易に証明される。 f が x において劣微分可能であるとき、関数 $y \mapsto f'(x; y)$ も適性凸であることが容易にわかる。

凸関数の劣微分可能性に関して二つの定理を述べる。

定理1 (Brøndsted - Rockafellar [1])。 X は実バナハ空間、 f は X 上の下半連続な適性凸関数とすれば、 $\{x; f(x) \text{ が有限}\}$ は $D(\partial f)$ の閉包に包まれる。

定理2 (Moreau [2])。 X は実線形位相空間、 f は X 上の適性凸関数とする。もし f が $x \in X$ において有限かつ連続ならば、 f は x において劣微分可能である。

あとで定理2をもちいる。

(1) 劣微分可能 = sub-differentiable, 劣勾配 = subgradient.

§ 2. 共役凸関数

X は実局所凸線形位相空間, X' はその双対空間, f は X 上の適性関数とする. f の共役関数 f^* は

$$f^*(x') = \sup_{x \in X} \{ \langle x, x' \rangle - f(x) \}, \quad x' \in X'$$

により定義される. f^* は X' 上の (たとえは弱* 位相に関して) 下半連続な適性凸関数である. さらに f が下半連続で凸であるならば

$$f(x) = \sup_{x' \in X'} \{ \langle x, x' \rangle - f^*(x') \}, \quad x \in X$$

がなりたつ.

§ 3. 巡回的単調集合⁽¹⁾

定義 3. A は $X \times X'$ の部分集合とする. (i) すべての $[x_i, x'_i] \in A$, $i=1, 2$, に対して $\langle x_1 - x_2, x'_1 - x'_2 \rangle \geq 0$ がなりたつとき A は単調であるという. (ii) (Rockafellar [1]). A のすべての有限部分集合 $\{[x_i, x'_i]\}_{i=0}^n$ に対して

$$\langle x_0 - x_n, x'_n \rangle + \langle x_n - x_{n-1}, x'_{n-1} \rangle + \cdots + \langle x_1 - x_0, x'_0 \rangle \leq 0$$

がなりたつとき, A は巡回的単調であるという.

(1) 巡回的 = cyclically, 単調 = monotone.

実線形位相空間 X 上の適性関数 f に対してその劣微分 ∂f は巡回的単調である。逆に $X \times X'$ の部分集合 A が巡回的単調であれば、 X 上の下半連続な適性凸関数 f で、 $A \subseteq \partial f$ をみたすものが存在する (Rockafellar [1])。したがって A が極大な巡回的単調集合ならば、 X 上の下半連続な適性凸関数 f で、 $A = \partial f$ をみたすものが存在する。

§ 4. 劣微分と directional derivative の関係

つぎに述べる定理は Rockafellar [1] が注意したものである。

定理 4. X は実局所凸線形位相空間、 f は X 上の適性凸関数とする。もし f が $z \in X$ において劣微分可能であれば

$$(1) \quad \liminf_{y \rightarrow z} f'(z; y) = \sup_{u \in (\partial f)z} \langle x, u \rangle, \quad x \in X$$

がなりたつ。

略証. (1) の左辺によって定義される関数を $g(x)$ とかくことにすれば、 g は X 上の下半連続な適性凸関数であることがわかる。 g の共役凸関数 g^* は

$$g^*(u) = \begin{cases} 0, & u \in (\partial f)z \\ \infty & u \in X' \setminus (\partial f)z \end{cases}$$

となることが、 g の正同次性などからわかる。したがって

$$g(x) = \sup_{u \in X'} \{ \langle x, u \rangle - g^*(u) \} = \sup_{u \in (\partial f)z} \langle x, u \rangle \text{ が得られる.}$$

Moreau [2] はつぎの定理を証明した.

定理 5. X は実線形位相空間, f は X 上の適性凸関数とする.
 f が $z \in X$ において有限かつ連続であれば

$$f'(z; x) = \sup \{ \langle x, u \rangle; u \in (\partial f)z \}, \quad x \in X$$

がなりたつ.

もし定理 5 において, X が局所凸であると仮定するならば
 定理 5 は定理 4 から容易にみちびかれる.

つぎの補題は §9 において利用される.

補題 6. f は実ヒルベルト空間 H 上の適性凸関数とする.

f が $z \in H$ において有限かつ連続であれば, $(\partial f)^0 z \neq 0$ のとき

$$f'(z; -\frac{(\partial f)^0 z}{\|(\partial f)^0 z\|}) = \min_{\|x\|=1} f'(z; x) = -\|(\partial f)^0 z\|.$$

略証. $x \in H, \|x\|=1$ とする.

$$f'(z; -\frac{(\partial f)^0 z}{\|(\partial f)^0 z\|}) = \sup_{y \in (\partial f)z} \left(-\frac{(\partial f)^0 z}{\|(\partial f)^0 z\|}, y \right) = \left(-\frac{(\partial f)^0 z}{\|(\partial f)^0 z\|}, (\partial f)^0 z \right)$$

$$\leq (x, (\partial f)^0 z) \leq \sup_{y \in (\partial f)z} (x, y) = f'(z; x).$$

§5. ヒルベルト空間上の凸関数の劣微分

f は実ヒルベルト空間 H 上の下半連続な適性凸関数とする.

$z \in H$ と $t > 0$ に対して

$$g(u) = \frac{1}{2t} \|u - z\|^2 + f(u), \quad u \in H$$

とおけば, g は最小値をただひとつの点においてとる. この点を $J_f(t)z$ とかくことにする.

定理 7. f は H 上の下半連続な適性凸関数, f^* は f の共役凸関数とすれば

$$z = J_f(t)z + tJ_{f^*}\left(\frac{1}{t}\right)\frac{z}{t}, \quad z \in H, t > 0$$

と

$$\partial f = \left\{ \left[J_f(t)z, J_{f^*}\left(\frac{1}{t}\right)\frac{z}{t} \right] ; z \in H \right\}$$

がなりたつ.

Moreau [1] では, $t=1$ の場合が述べられているが, それは本質的な変更なしに一般の $t > 0$ に対しても有効である. もし f が最小値をとるならば, f が最小値をとる点の全体 N は閉かつ凸である. このときつぎの式がなりたつ

$$\lim_{t \rightarrow \infty} J_f(t)z = \text{proj}_N z, \quad z \in H.$$

定理 7 から, H 上の下半連続な適性凸関数 f に対して, ∂f は極大な単調集合であることがわかる. したがって §3 に述べたひとつの結果をもちいれば, $H \times H$ の極大な巡回的単調部分集合は極大な単調集合であることもわかる.

§ 6. 巡回的単調な線形作用素

実ヒルベルト空間 H における線形非負対称作用素は巡回的単調であることが容易に証明できる。また、 H における線形非負自己共役作用素 A はあきらかに極大単調である。したがって A に対して H 上の下半連続な適性凸関数 f で、 $\partial f = A$ をみたすものが存在する (§ 3)。逆に、もし f が H 上の下半連続な適性凸関数であり、 ∂f が一価線形的作用素で、その定義域 $D(\partial f)$ が H において稠密ならば、 ∂f は H における非負自己共役作用素である。さらにこのとき

$$f(x) = f(0) + \frac{(x, (\partial f)x)}{2}, \quad x \in D(\partial f)$$

がなりたつ。これらのことは数直線上の有限な凸関数は各有限区間において絶対連続であるというよく知られた結果をもちいて証明するととができる。

§ 7. 巡回的単調な非線形作用素の例

極大な巡回的単調非線形作用素の例をあげる。 Ω は R^3 の有界な開集合で、その境界はなめらかとする。 $L^2(\Omega)$ における二つの作用素 A と B をつぎのように定義する： A と B の定義域はともに $H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ であり、 $u \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ に対して

$$Au = -\Delta u, \quad Bu = |u|^p u, \quad (p > 1)$$

とおく。このとき A は $L^2(\Omega)$ における非負自己共役作用素であるから、極大巡回的単調である (§6)。 $H^2(\Omega)$ に属する関数は Ω において有界であるから、 $u \in D(B)$ に対して Bu は $L^2(\Omega)$ に属することに注意する。

$\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ の単調集合は巡回的単調であることが容易に証明される。したがって $\mathbb{R}$ から $\mathbb{R}$ への単調増加関数 $\xi \rightarrow |\xi|^p \xi$ は巡回的単調である。したがって B は $L^2(\Omega)$ において巡回的単調である。ところで高村氏の方法により $A+B$ は $L^2(\Omega)$ において極大な単調作用素であることがわかる (この講義録の中で高村氏の論文をみよ)。したがって $A+B$ は $L^2(\Omega)$ において極大巡回的単調であることがわかる。したがって、§3 の結果によれば、 H 上の下半連続な適性凸関数でその劣微分がちょうど $A+B$ に一致するようなものが存在する。

§ 8. 連続な凸関数

この節ではつぎの定理が基本的である。

定理 8. A は $H \times H$ の単調部分集合で、その定義域の内部、 $\text{Int } D(A)$ 、は空でないとする。このとき A は $\text{Int } D(A)$ において局所有界である。すなわち各 $u \in \text{Int } D(A)$ に対して u の近傍 $U \subseteq \text{Int } D(A)$ が存在して

$$\sup \{ \|v\|; [v, w] \in A \text{ かつ } v \in U \} < \infty.$$

この定理 8 は Crandall - Pazy [1], p. 392, Remark 2.4 において注意されたものである。この証明に Kato [1] の結果をもちいる。

定理 9. f は H 上の適性凸関数で、 $D(\partial f)$ は空でない開集合であるとする。ば、 f は $D(\partial f)$ において連続である。

証明. 任意の $z \in D(\partial f)$ に対して

$$f(x) \leq (x - z, y) + f(z), \quad [x, y] \in \partial f$$

がなりたつ。したがって定理 8 により、 f は $D(\partial f)$ において局所的に上に有界である。したがって f の凸性により f は $D(\partial f)$ において連続である。

定理 10. A は $H \times H$ の極大な巡回的単調部分集合で、 $D(A)$ は H の開集合であるとする。このとき

(i) H 上の下半連続な適性凸関数 f で, $A = \partial f$ かつ f は $D(A)$ において連続であるような f が存在する.

(ii) もし f と g が H 上の下半連続な適性凸関数で $A = \partial f = \partial g$ をみたすならば, 実数 c が存在して $f(x) = g(x) + c$, $x \in D(A)$ になりつつ.

(i) の証明. §3 の結果により, $A = \partial f$ をみたす下半連続な適性凸関数 f が存在するが, このとき定理 9 により f は $D(A)$ において連続である. (ii) の証明には定理 5 を適用すればよい.

§9. 縮小作用素の半群

f は実ヒルベルト空間 H 上の下半連続な適性凸関数であり, その劣微分の定義域 $D(\partial f)$ は H の開集合であるものとする. 非線形半群の理論によれば, ∂f の極大単調性により, 任意の $x \in D(\partial f)$ に対して絶対連続な関数 $u: [0, \infty) \rightarrow D(\partial f)$ で

$$u(0) = x, \quad u'(t) \in -(\partial f)u(t) \quad (\text{ほとんどすべての } t \geq 0)$$

をみたす u がただひとつ存在する. このときすべての $t \geq 0$ において $D^+u(t) = -(\partial f)^0 u(t)$ になりつつことが証明される. $u(t)$ を $T_t x$ とかくことにすれば, $\{T_t; t \geq 0\}$ は $D(\partial f)$ 上の縮小作用素の半群である. $\{T_t\}$ を $-\partial f$ によ

生成された半群とよぶ。 $\{T_t\}$ と f とのあいだにつぎの関係が成立する: $x \in D(\partial f)$ に対して

$$(2) \quad f(T_t x) - f(T_s x) = - \int_s^t \|T'_r x\|^2 dr, \quad t, s \geq 0$$

および

$$(3) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} f(T_t x) = \inf \{ f(y); y \in H \}.$$

(2) の証明に補題6と, f の $D(\partial f)$ 上の局所リプシッツ連続性をもちいる。(3) の証明は容易である。

定理10と(3)をもちいてつぎの定理を証明することができ。

定理11. 定義域が開集合であるような極大巡回的単調集合 A に対して, $-A$ により生成された $D(A)$ 上の半群 $\{T_t\}$ とする。もし $x \in D(A)$ と t_n , $t_n \rightarrow \infty$, が存在して, $T_{t_n} x$ が $n \rightarrow \infty$ のときある $z \in H$ に弱収束するならば, z は $\{T_t\}$ の不動点である。

定理11からつぎのことがわかる: H が有限次元であらう, $-A$ により生成された半群 $\{T_t\}$ が不動点をもつならば, 任意の $x \in D(A)$ に対して $T_t x$ は $t \rightarrow \infty$ のとき $\{T_t\}$ のある不動点に収束する。このことは H が無限次元である場合にも成立するであろうと予想される。

$\{T_t\}$ が不動点をもつ場合につぎの補題がなりたつ。

補題 12. A は極大な巡回的単調集合であり, $D(A)$ は開集合であるとする. $-A$ により生成された半群 $\{T_t\}$ が不動点をもつと仮定する. このとき任意の $x \in D(A)$ に対して関数 $t \mapsto t \|T_t x\|^2$ は $[0, \infty)$ において可積分である.

補題 12 をもちいれば, つぎの定理を証明することができ
る.

定理 13. A と $\{T_t\}$ は補題 12 の仮定をみたすものとする. もし $x \in D(A)$ に対して, ある $z \in H$ があり

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t T_r x \, dr = z$$

であるならば, z は $\{T_t\}$ のひとつの不動点である.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} T_t x = z$$

がなりたつ.

参考文献

Bishop, E. and R.R. Phelps: [1] The support functional of a convex set, Convexity, Proc. Sympos. Pure Math. Vol. 7, Am. Math. Soc. 27

- 35 (1962).

Brøndsted, A. and R. T. Rockafellar : [1] On the subdifferentiability of convex functions, *Proc. Am. Math. Soc.* 16, 605-611 (1965).

Crandall, M. G. and A. Pazy : [1] Semi-groups of nonlinear contractions and dissipative sets, *J. Func. Anal.* 3, 376-418 (1969).

Kato, T. : [1] Demicontinuity, hemicontinuity, and monotonicity. II, *Bull. Am. Math. Soc.* 73, 886-889 (1967).

Kōmura, Y. : [1] Nonlinear semi-groups in Hilbert space, *J. Math. Soc. Japan*, 19, 493-507 (1967).

[2] Differentiability of nonlinear semigroups, *J. Math. Soc. Japan*, 21, 375-402 (1969).

Moreau, J. J. [1] Proximité et dualité dans un espace hilbertien, *Bull. Soc. math. France*, 93, 273-299 (1965).

[2] Fonctionnelles convexes, *Seminaire sur les équations aux dérivées partielles II*, Collège de France (1966-1967).

Rockafellar, R. T. [1] Characterization of the sub-differentials of convex functions, *Pacific J. Math.* 17, 497-510 (1966).