

内部領域における消散項を持つ非線型双曲型方程式の大域解

筑波大 数学系 柴田 良弘

§1. 結果. $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, 有界領域, $\partial\Omega$ はその境界でコンパクト, C^∞ とする. $x = (x_1, \dots, x_n) \in \Omega$ は空間, t は時間変数とし, 微分記号として, $\partial_t = \partial/\partial t$, $\partial_x = (\partial_1, \dots, \partial_n)$ ($\partial_j = \partial/\partial x_j$) 等を用いる. 次の混合問題を考える.

$$(1.1) \quad \begin{aligned} \Phi(u) &= \mathcal{L}u + F(t, x, \Lambda u) = f(t, x) && \text{in } [0, \infty) \times \Omega \\ u(t, x) &= 0 && \text{on } [0, \infty) \times \partial\Omega \end{aligned}$$

$$u(0, x) = \phi_0(x), \quad \partial_t u(0, x) = \phi_1(x) \text{ in } \Omega.$$

ここで作用素 $\mathcal{L}$, Λ 及び非線形関数 F に次の仮定を置く.

(1.2) 仮定. A° $\mathcal{L}$ は

$$\begin{aligned} \mathcal{L}u &= \partial_t^2 u - \sum_{j=1}^n \partial_i (a_{ij}(t, x) \partial_j u) + \sum_{j=1}^n a_j(t, x) \partial_j \partial_t u + \sum_{j=0}^n b_j(t, x) \partial_j u \\ &\quad + c(t, x) u + d(t, x) u \end{aligned}$$

の形をしており, 係数は次の条件を満足する.

1° 係数 a_{ij}, a_j, b_j, c, d はすべて real-valued $B^\infty([0, \infty) \times \overline{\Omega})$ functions である.

2° $a_{ij} = a_{ji}$ かある正定数 k_0, k に対して

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}(t, x) \xi_j \geq 2k_0 |\xi|^2$$

が任意の $\xi \in \mathbb{R}^n$, $(t, x) \in [0, \infty) \times \Omega$ について成立する。

3° $c(t, x) \geq 0$.

4° ある正定数 k_1, T_0 に対して

$$b_0(t, x) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \partial_i a_i(t, x) \geq 2k_1$$

が任意の $(t, x) \in [0, \infty) \times \Omega$ について成立する。

5° $\lim_{t \rightarrow \infty} \left\{ \sup_{x \in \bar{\Omega}} \left[\sum_{j=1}^n |\partial_t a_j(t, x)| + \sum_{j=1}^n |\partial_t a_j(t, x)| + \sum_{j=1}^n |b_j(t, x)| \right. \right.$

$$\left. + |\partial_t c(t, x)| + |\partial_t c(t, x)| \right] \} = 0$$

が成立する。

B° $\Lambda u = (u, \partial_0 u, \dots, \partial_n u; \partial_i \partial_j u, 0 \leq i, j \leq n)$ また作用素 Λ に対する変数を $\lambda = (\lambda^*, \lambda_0, \dots, \lambda_n; \lambda_{ij}, 0 \leq i, j \leq n)$ とする。

さらに関数 $F(t, x, \lambda)$ は次の性質をもつ。

1° $F \in \mathcal{B}^\infty([0, \infty) \times \bar{\Omega} \times \{|\lambda| \leq 1\})$

2° F は real valued

3° $F(t, x, 0) = 0, \quad \text{grad}_\lambda F(t, x, 0) = 0 \quad \text{for all } (t, x) \in [0, \infty) \times \bar{\Omega}$

以上の仮定の下で次の (A1) に対する大域解の存在と一意性及び、解の t についての減りの order に関する結果が得られる。

定理 1. (存在) $K \geq 0$, fixed number, $m \geq 2$ 整数, 仮定 (1.2) が成立しているとする。この時次の事が成立する。

十分小なる正定数 δ_m と十分大なる正整数 M_m (共に m のみに依存する) があって, data, ϕ_0, ϕ_1, f が m 回の整合条件 (後に定義) を満足し, さらに

$$\sup_{x \in \bar{\Omega}} \left\{ \sum_{|k| \leq M_m+2} |\partial_x^k \phi_0(x)| + \sum_{|k| \leq M_m+1} |\partial_x^k \phi_1(x)| \right\} + \sup_{\substack{x \in \bar{\Omega} \\ t \geq 0}} \sum_{|k|+j \leq M_m} (1+t)^K |\partial_x^k \partial_t^j f(t, x)| \leq \delta_m$$

であれば, (1.1) の古典解 $u \in C^m([0, \infty) \times \bar{\Omega})$ で

$$\sup_{\substack{x \in \bar{\Omega} \\ t \geq 0}} \sum_{|k|+j \leq m} (1+t)^K |\partial_x^k \partial_t^j u(t, x)| \leq C \delta_m$$

なるものが存在する。ここで C は $\delta_m, M_m, \phi_0, \phi_1, f$ には独立の定数である。□

定理 2 (-一意性) $m \geq 3$ 整数, 仮定 (1.2) が成立しているとする。

δ_m, M_m を定理 1 のものとする。この時ある $\delta_m' (\leq \delta_m)$ が存在して, data ϕ_0, ϕ_1, f は δ_m', M_m について定理 1 の条件を満足しているものとする。 u を定理 1 で保証された (1.1) の C^m class の解とする。もし $v \in C^m([0, \infty) \times \bar{\Omega})$ が (1.1) に対するもう一つの解であれば, $u = v$ である。□

[注] (1.1) の解という時は $| \wedge v | \leq 1$ なる条件は満足されている。

□

定理 3. (exponential decay) $m \geq 3$ 整数, この時, ある δ_m''

で次の性質を満足するものが存在する: M_m, δ_m を定理 1 のものとし, $0 < \delta_m'' \leq \delta_m$. $\phi_0, \phi_1, f \in K=0$. M_m, δ_m'' に対して定理 1 の条件を満足しているものとする。さらに f は

$$\int_{\Omega} |f(t, x)|^2 dx \leq C e^{-\beta t} \quad t \gg 0$$

とある定数 $\beta > 0, C > 0$ に対して満足しているものとし、 u を (1.1) の定理 1 で保証されている解とする。ならば

$$\int_{\Omega} [|\partial_t u(t, x)|^2 + \sum_{i=1}^n |\partial_i u(t, x)|^2] dx \leq C' e^{-\beta' t}, \quad t \gg 0$$

が、ある定数 $\beta' > 0, C' > 0$ に対して成立する。 $\square$

定理 1 の証明は、線形化した問題に対しての一般的な decay 評価を用いて、smoothing process をもつ quadratic iteration scheme を作ることにより行なわれる。これはいわゆる Nash-Moser technique として良く知られている。

以下定理 1 の証明の概略を述べる。尚、定理 2, 3 の証明は省略するが、簡単に言えば、例えば定理 2 であれば、 $w = u - v$ とおいて問題を

$$\mathcal{L}w + \int_0^1 \partial_\lambda F(t, x, \lambda v + \theta \lambda w) d\theta \cdot \lambda w = 0, \quad w(0, \infty) \times \Omega, \quad w = 0 \text{ on } [0, \infty) \times \partial\Omega$$

$w(0, x) = \partial_t w(0, x) = 0$ in Ω と w についての線形な双曲型混合問題にして、 $w, v \in C^3$ の仮定から通常の energy method を用いて $w = 0$ を示す。

§2. 準備.

2.1. 記号. ここで述べないものについては、通常の記号とする。

$$\text{semi-norms: } \|\phi\|_{p,N} = \sum_{|\alpha| \leq N} \|\partial_x^\alpha \phi\|_{L_p(\Omega)}$$

$$\|f\|_{p,N,[a,b]} = \sup_{a \leq t \leq b} \sum_{j+|\alpha| \leq N} \|\partial_t^j \partial_x^\alpha f(t, \cdot)\|_{L_p(\Omega)}$$

$$\|f\|_{p,N,K} = \sup_{t \geq 0} (1+t)^K \sum_{j+|\alpha| \leq N} \|\partial_t^j \partial_x^\alpha f(t, \cdot)\|_{L_p(\Omega)}$$

$f = (f_1, \dots, f_s)$, vector の時

$$\|\partial_t^j \partial_x^\alpha f\|_{p,N,[a,b]} = \sum_{k=1}^s \|\partial_t^j \partial_x^\alpha f_k\|_{p,N,[a,b]}$$

$$\|\partial_t^j \partial_x^\alpha f\|_{p,N,K} = \sum_{k=1}^s \|\partial_t^j \partial_x^\alpha f_k\|_{p,N,K}$$

関数 F の Λ についての微分.

$$\partial_\Lambda^k F(t, x, \Lambda u)(\Lambda v_1, \dots, \Lambda v_k) = \partial_{\theta_1} \dots \partial_{\theta_k} F(t, x, \Lambda u + \theta_1 \Lambda v_1 + \dots + \theta_k \Lambda v_k) \Big|_{\theta_1 = \dots = \theta_k = 0}$$

$$\Lambda_1 u = (u, \partial_1 u, \dots, \partial_n u), \quad \Lambda_2 u = (u, \partial_1 u, \dots, \partial_n u, \partial_i \partial_j u, 1 \leq i \leq j \leq n)$$

$$F(t, x, \Lambda u) = F(t, x, \Lambda_2 u, \Lambda_1 \partial_t u, \partial_t^2 u).$$

また $C, C_1, \dots, C_s$ を夫々絶対定数, 本質的に量 $p_1, \dots, p_s$ へのみ依存する定数を表わすものとする。

2.2. 補間不等式.

2.1 で定義された semi-norms に外して次の補間不等式が成り立つことが重要である。これは Leeley's ext Theorem と呼ばれるが、この定理を用いれば、もっと一般に凹性条件を満たす領域について変数によって異なる norm も含む semi-norms の族について補間不等式を示すことが可能である。

Lemma 2.1. $0 \leq M \leq N$, 整数, $1 \leq p \leq \infty$, $K \geq 0$ real number.

$$(i) \sum_{|\alpha|=M} \|\partial_x^\alpha \phi\|_{L_p(\Omega)} \leq C_{N,p} (\|\phi\|_{L_p(\Omega)})^{1-\frac{M}{N}} (\|\phi\|_{p,N})^{\frac{M}{N}}$$

$$(ii) \sum_{j+|\alpha|=M} |\partial_x^j \partial_x^\alpha f|_{p,0,K} \leq C_{p,N,K} (|f|_{p,0,K})^{1-\frac{M}{N}} (|f|_{p,N,K})^{\frac{M}{N}}$$

$$(iii) \sum_{j+|\alpha|=M} |\partial_t^j \partial_x^\alpha f|_{p,0,[a,b]} \leq C_{p,N,a,b} (|f|_{p,0,[a,b]})^{1-\frac{M}{N}} (|f|_{p,N,[a,b]})^{\frac{M}{N}}$$

Lemma 2.1 と Hölder's meq. $a \cdot b \leq \frac{1}{p} a^p + \frac{1}{q} b^q$ ($\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$)

を用いて次のように示す。

$$\text{Lemma 2.2.1}^\circ \|\phi\|_{p,N} \|x\|_{q,M} \leq C [\|\phi\|_{p,K} \|x\|_{q,N+M-K} + \|\phi\|_{p,N+M-L} \|x\|_{q,L}]$$

$$2^\circ \|\phi\|_{p,N} |f|_{q,M,[a,b]} \leq C [\|\phi\|_{p,K} |f|_{q,N+M-K,[a,b]} + \|\phi\|_{p,N+M-L} |f|_{q,L,[a,b]}]$$

$$3^\circ \|\phi\|_{p,N} |f|_{q,M,K} \leq C [\|\phi\|_{p,K} |f|_{q,N+M-K,K} + \|\phi\|_{p,N+M-L} |f|_{q,L,K}]$$

$$4^\circ |f|_{p,N,[a,b]} |g|_{q,M,[a',b']} \leq C [|f|_{p,N+M-L,[a,b]} |g|_{q,L,[a',b']} + |f|_{p,K,[a,b]} |g|_{q,N+M-K,[a',b']}]$$

$$5^\circ |f|_{p,N,[a,b]} |g|_{q,M,K} \leq C [|f|_{p,K,[a,b]} |g|_{q,N+M-K,K} + |f|_{p,N+M-L,[a,b]} |g|_{q,L,K}]$$

$$6^\circ |f|_{p,N,K} |g|_{q,M,K'} \leq C [|f|_{p,K,K} |g|_{q,N+M-K,K'} + |f|_{p,N+M-L,K} |g|_{q,L,K'}]$$

但し定数 C は次の量 $p, q, a, b, a', b', N, M, K, K'$ に依存し

k, l, N, M は正整数で $0 \leq k \leq N, 0 \leq l \leq M$ を満足し,

$1 \leq p, q \leq \infty, a, b, a', b'$ は実数 ($a \leq b, a' \leq b'$) $K, K' \geq 0$

□

2.3 整合条件。 $u \in C^\infty$ と簡単のために仮定する。 u に対し

$$f, \phi_0, \phi_1 \in$$

$$(A) f = \Phi(u), \quad u(0, x) = \phi_0(x), \quad \partial_t u(0, x) = \phi_1$$

とあく。 すると

$$(B) \quad u_j(x) = (\partial_t^p u)(0, x) \quad p \geq 2, \quad u_0 = \phi_0, \quad u_1 = \phi_1$$

とあく。 以下 u_j ($j \geq 2$) を f, ϕ_0, ϕ_1 で評価し、さらに整合条件を導き入る。 定義から

$$(C) \quad u_2 + a_1^{(0)}(0, x, \partial_x) u_1 + a_2^{(0)}(0, x, \partial_x) u_0 + F(0, x, \lambda_2 u_0, \lambda_1 u_1, u_2) \\ = f(0, x)$$

$$\text{但し} \quad a_1^{(j)}(t, x, \partial_x) \chi(x) = \sum_{k=1}^n \partial_t^j a_{1k}(t, x) \partial_k \chi(x) + \partial_t^j b_0(t, x) \chi(x) \\ a_2^{(j)}(t, x, \partial_x) \chi(x) = \sum_{i,k=1}^n \partial_i (\partial_t^j a_{ik}(t, x) \partial_k \phi(x)) \\ + \sum_{i=1}^n \partial_t^j b_i(t, x) \partial_i \chi(x) + (\partial_t^j c(t, x) + \partial_t^j d(t, x)) \chi(x).$$

今 $F(t, x, 0) = 0, \quad \partial_\lambda F(t, x, 0) = 0$ より陰関数の定理を用い、

ある十分小さな正定数 σ_0 と $U(x, \lambda_1, \lambda_2, g) \in C^\infty(\bar{\Omega} \times$

$\{(\lambda_1, \lambda_2, g) : |\lambda_1| + |\lambda_2| + |g| \leq \sigma_0\})$ があって、 U は一意的に決ま

り、かつ $U(x, 0, 0, 0) = 0$ また、非線形方程式：

$$U - \sum_{j=1}^n a_{ij}(0, x) \lambda_{ij} - \sum_{j=1}^n \partial_i a_{ij}(0, x) \lambda_j + \sum_{j=1}^n a_j(0, x) \lambda_{0,j} + \\ + \sum_{j=0}^n b_j(0, x) \lambda_j + c(0, x) \lambda^* + d(0, x) \lambda^* + F(0, x, \lambda_2, \lambda_1, U) - g = 0$$

を満足する。 (λ_2, λ_1 は λ_2, λ_1 に対応する変数) により

$$\text{すなわち} \quad \|\lambda_2 \phi_0\|_\infty + \|\lambda_1 \phi_1\|_\infty + \|f(0, \cdot)\|_\infty \leq \sigma_0 \Rightarrow$$

$$u_2(x) = U(x, \lambda_2 \phi_0, \lambda_1 \phi_1, f(0, x))$$

さらに、帰納法により、ある C^∞ functions $G_{\alpha, \beta, \gamma}^{(j)}$ ($j=0, 1, \dots, p-2$)
 があって

$$(i) \quad \frac{\partial^{p-2}}{\partial t} \bar{F}(0, x, \Lambda_2 u, \Lambda_1 \partial_t u, \partial_t^2 u) \Big|_{t=0} = \partial_{\lambda_0, 0} \bar{F}(0, x, \Lambda_2 u_0, \Lambda_1 u_1, u_2) u_p + \\
 + \sum_{\alpha, \beta, \gamma} G_{\alpha, \beta, \gamma}^{(0)}(x, \Lambda_2 u_0, \Lambda_1 u_1, u_2) (\Lambda_2 u_1)^{\alpha_1} \cdots (\Lambda_2 u_{p-2})^{\alpha_{p-2}} (\Lambda_1 u_1)^{\beta_1} \cdots (\Lambda_1 u_{p-1})^{\beta_{p-2}} \\
 (u_3)^{\gamma_1} \cdots (u_{p-1})^{\gamma_{p-3}},$$

$$(|\alpha_1| + \cdots + (p-2)|\alpha_{p-2}| + |\beta_1| + \cdots + (p-2)|\beta_{p-2}| + \gamma_1 + \cdots + (p-3)\gamma_{p-3} = p-2)$$

$$(ii) \quad \frac{\partial^{p-2-j}}{\partial t} \bar{F}^{(j)}(0, x, \Lambda_2 u, \Lambda_1 \partial_t u, \partial_t^2 u) \Big|_{t=0} = \sum_{\alpha, \beta, \gamma} G_{\alpha, \beta, \gamma}^{(j)}(x, \Lambda_2 u_0, \Lambda_1 u_1, u_2) \times \\
 \times (\Lambda_2 u_1)^{\alpha_1} \cdots (\Lambda_2 u_{p-2-j})^{\alpha_{p-2-j}} (\Lambda_1 u_2)^{\beta_1} \cdots (\Lambda_1 u_{p-1-j})^{\beta_{p-2-j}} (u_3)^{\gamma_1} \cdots (u_{p-j})^{\gamma_{p-2-j}} \quad (j \geq 1)$$

$$\left(\sum_{\ell=1}^{p-2-j} \ell (|\alpha_\ell| + |\beta_\ell| + \gamma_\ell) = p-2-j \right)$$

$$\text{但し、} \quad \bar{F}^{(j)}(0, x, \lambda) = \frac{\partial^j}{\partial t} \bar{F}(t, x, \lambda) \Big|_{t=0} \quad \text{であり、} t=0$$

$$\text{が成立する。以上より} \quad \bar{F}(0, x, 0) = 0, \quad \partial_\lambda \bar{F}(0, x, 0) = 0,$$

$$\bar{U}(x, 0, 0, 0) = 0. \quad \text{ト注意して、帰納法的に次の事が示せる。}$$

Lemma 2.2 を用いて

Lemma 2.3. u に対して $\phi_0, \phi_1, f, u_j \in (F), (K), (E)$ で定義さ

れたものとする。この時 ある十分小さな正定数 σ_1 があって

$$\text{もし} \quad \|\phi_0\|_{\infty, 2} + \|\phi_1\|_{\infty, 1} + \|f\|_{\infty, 0, [0, 1]} \leq \sigma_1, \quad \text{であれば}$$

は

$$\|u_p\|_{\infty, L} \leq C_L \{ \|\phi_0\|_{\infty, L+p} + \|\phi_1\|_{\infty, L+p-1} + \|f\|_{\infty, L+p-2, [0, 1]} \}$$

が満足する。

図

定義 2.4. $\phi_0 \in C^L(\bar{\Omega}), \phi_1 \in C^{L-1}(\bar{\Omega}), f \in C^{L-2}([0, \infty) \times \bar{\Omega})$

とし σ_1 は Lemma 2.3 のものとする。

ϕ_0, ϕ_1, f が L 階の整合条件を満足するとは次の 2 つの条件を満足することと云ふ。

$$(i) \quad \|\phi_0\|_{W,2} + \|\phi_1\|_{W,1} + \|f\|_{W,0,[0,1]} \leq \sigma,$$

$$(ii) \quad u_j(x) \text{ と } u_2(x) \text{ は (4) で表わされたもの. } j \geq 3 \text{ につ$$

いて

$$\begin{aligned} u_j(x) = & -(1 + \partial_{\lambda_{0,0}} F(0, x, \Lambda_2 u_0, \Lambda_1 u_1, u_2))^{-1} x \\ & \times \left\{ \sum_{k=0}^{p-2} \binom{p-2}{k} [G_1^{(k)}(0, x, \partial x) u_{p-1-k} + G_2^{(k)}(0, x, \partial x) u_{p-2-k}] + \right. \\ & \sum_{j=0}^{p-2} \frac{(p-2)!}{(p-2-j)! j!} \sum_{\alpha, \beta, \gamma} G_{\alpha, \beta, \gamma}^{(j)}(x, \Lambda_2 u_0, \Lambda_1 u_1, u_2) (\Lambda_2 u_1)^{\alpha_1} \cdots (\Lambda_2 u_{p-2-j})^{\alpha_{p-2-j}} \\ & \left. \times (\Lambda_1 u_2)^{\beta_1} \cdots (\Lambda_1 u_{p-1-j})^{\beta_{p-2-j}} (u_3)^{\gamma_1} \cdots (u_{p-j})^{\gamma_{p-2-j}} - \partial_t^{p-2} f(0, x) \right\} \end{aligned}$$

とおいた時.

$$\phi_0(x) = 0, \quad \phi_1(x) = 0, \quad u_j(x) = 0 \quad (j=2 \cdots L-1) \text{ on } \Omega \quad \square$$

2.4. "Smoothing operator" $\phi(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ と $\int_{\mathbb{R}^n} \phi(x) dx = 1,$

$\int_{\mathbb{R}^n} x^\alpha \phi(x) dx = O(|\alpha|^{-1})$ なるものとする。また $\chi^\alpha(t) \in (C_0^\infty(\mathbb{R}'))$

と $\chi^\alpha(t) = 0$ for $t \leq 0, t \geq 1/2, \int_0^\infty \chi^\alpha(t) dt = 1, \int_0^\infty t^k \chi^\alpha(t) dt$

$= 0, 1 \leq k \leq j$, なるものとする。さらに $\hat{u}(t-x)$ と t は parameter

とみて, $u \in \mathbb{R}^n$ の関数に良く知られた Seeley の方法により拡張

したものとす。 $\hat{u}$ は次の性質をもつ

$$(ア) \quad \hat{u}(t-x) = u(t-x) \quad \forall (t-x) \in [0, \infty) \times \overline{\Omega}$$

$$(イ) \quad \sum_{j=0}^M \|\partial_t^j \hat{u}(t \cdot)\|_{L_{(R^n)}^{p, M-j}} \leq C_{p, L} \sum_{j=0}^M \|\partial_t^j u(t \cdot)\|_{p, M-j}$$

$$(\|\phi\|_{L^p(\mathbb{R}^n), M-j} = \sum_{|\alpha| \leq M-j} \|\partial_x^\alpha \phi\|_{L^p(\mathbb{R}^n)})$$

さらに $u \in C^M([0, \infty) \times \bar{\Omega})$ の時 $\hat{u} \in C^M([0, \infty) \times \mathbb{R}^n)$, また $\partial_t^\delta u(0, x) = 0$ の時は $\partial_t^\delta \hat{u}(0, x) = 0$ を満足する様になる。

$\theta \geq 1$ に対して j -階の smoothing operator $S^j(\theta)$ を

$$S^j(\theta)u = \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n} \theta^{n+1} \chi^{d-1}(\theta(t-s)) \phi(\theta(x-y)) \hat{u}(s, y) ds dy$$

で定義する。この時次の基本的な性質をもつことがわかる。

Lemma. 2.5. $K \geq 0, \theta \geq 1, 1 \leq p \leq \infty, j, L$ は自然数とする。この時次の事柄が成立する。

(i) $\mathcal{E}^{N, p, K} = \{f, |f|_{p, N, K} < \infty\}$ とする。この時 $S^j(\theta)u \in C^\infty([0, \infty) \times \bar{\Omega})$ かつ

$$\partial_t^k S^j(\theta)u|_{t=0} = 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

(ii) $u \in \mathcal{E}^{j, p, K} \cap C^j$ の時は

$$|(1 - S^j(\theta))u|_{p, 0, K} \leq C_{p, j, K} \theta^{-j} |u|_{p, j, K}.$$

(iii) M, N は $0 \leq M \leq N$ なる整数とする。 $u \in \mathcal{E}^{N, p, K} \cap C^N$ かつ $\partial_t^i u(0, x) = 0$ for $i = 0, \dots, N-1$ を満足するとする。ならば

$$|S^j(\theta)u|_{p, M, K} \leq C_{p, M, N, K, j} \theta^{M-N} |u|_{p, N, K}. \quad \square$$

§3. 線形化された方程式について。ここでは次の線形作用素を考える。

$$\begin{aligned} (3.1) \quad & A_0 \partial_t^2 u - \sum_{i,j=1}^n \partial_i (A_{ij} \partial_j u) + \sum_{j=1}^n A_j \partial_j \partial_t u + B_0 \partial_t u + \sum_{j=1}^n B_j \partial_j u \\ & + Cu + Du = F \\ & u = 0 \end{aligned} \quad \begin{aligned} & \text{on } [0, \infty) \times \Omega \\ & \text{on } [0, \infty) \times \partial\Omega \end{aligned}$$

$$u(0, x) = \partial_t u(0, x) = 0 \quad \text{in } \Omega.$$

但し F は $\partial_t^j F(0, x) = 0$ for $j = 0, 1, \dots, \hat{m}-3$ と満足する F の γ 以下級数とする。また

$$\hat{m} = 2 \{ \max([n/2] + 2, m-1) \} + 4 + [n/2].$$

今 係数に次の仮定をかく。

(3.2) 仮定. 1° 係数 A_{ij}, A_j, B_j, C, D はすべて real-valued $B^\infty((0, \infty) \times \bar{\Omega})$ functions とする。

$$2^\circ \quad A_{ij} = A_{ji}, \quad \sum_{i,j=1}^n A_{ij} \xi_i \xi_j \geq k_0 |\xi|^2, \quad \frac{1}{2} \leq A_0 \leq \frac{3}{2}, \quad C \gg 0.$$

$$3^\circ \quad B_0 - \frac{1}{2} \sum_{j=0}^n \partial_j A_j \geq k_1 \quad \text{for any } (t, x) \in [T_0, \infty) \times \bar{\Omega}.$$

$$4^\circ \quad \sum_{i,j=1}^n |A_{ij}|_{\infty,0,0} + \sum_{j=1}^n |A_j|_{\infty,0,0} + |B_0|_{\infty,0,0} + |C|_{\infty,0,0} + \\ + \sum_{j=0}^n |\partial_j A_j|_{\infty,0,0} + \sum_{i,j,k=1}^n |\partial_k A_{ij}|_{\infty,0,0} \leq C_0$$

$$\text{但し } C_0 = 2 \left[\sum_{i,j=1}^n (4|a_{ij}|_{\infty,0,0} + \sum_{k=1}^n |\partial_k a_{ij}|_{\infty,0,0}) + \sum_{j=1}^n |\partial_j a_j|_{\infty,0,0} \right. \\ \left. + |b_0|_{\infty,0,0} + |c|_{\infty,0,0} \right] \quad \square$$

$$\text{energy } E \quad E(t, x) \leq \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left\{ A_0(t, x) (\partial_t u(t, x))^2 + \sum_{i,j=1}^n A_{ij}(t, x) \partial_i u(t, x) \partial_j u(t, x) \right. \\ \left. + C(t, x) (u(t, x))^2 \right\} dx \quad \text{とあり、Poincaré's inequality と部分積分より次が従う。}$$

Theorem 3.1. $T > 0$. 任意の定数, (3.2) の 1°, 2° を仮定する。

$$\mathcal{X}_N = (C A_0, i=0, \dots, n; A_{ij}, i,j=1, \dots, n; B_j, j=0, \dots, n; C, D)_{\infty, N, 0}.$$

$$C_1 = 2 \left[\sum_{i,j=1}^n |a_{ij}|_{\infty,1,0} + \sum_{j=1}^n |a_j|_{\infty,1,0} + \sum_{j=0}^n |b_j|_{\infty,1,0} + |c|_{\infty,1,0} + |d|_{\infty,1,0} \right. \\ \left. + 1 \right]$$

と置く。 $\mathcal{X}_1 \leq C_1$ を仮定する。今 $\partial_t^j F(0, x) = 0, \quad j=0, 1, \dots, \hat{m}-3$

$|F|_{2, \hat{m}-1, 0}$ に対して (3.1) の解 u が $[0, T]$ で存在し $\partial_t^j u|_{0 \times} = 0$
 $j = 0, \dots, \hat{m}-1$ を満足し, さらに

$$\|u\|_{2, N, [0, T]} \leq C_{T, N} (\|F\|_{2, N-1, [0, T]} + \mathcal{A}_N \|F\|_{2, 0, [0, T]})$$

がある。但し

$$\|f\|_{2, N, [0, T]} = \sup_{0 \leq t \leq T} \sum_{|a|+j \leq N} \|\partial_t^j f(t, \cdot)\|_{L^2(\mathbb{R})}.$$

次に decay estimate を示す。これはまた方程式 (3.1) に u と $\partial_t u$ と
 かけてそれぞれ部分積分することと, Poincaré's inequality から示せる。

Theorem 3.2. (3.2) $10 \sim 40$ を仮定する。 $K \gg 0$.

$$\mathcal{B}(t) \leq \|(\partial_t A_j(t, \cdot), \partial_j A_j(t, \cdot), j=1, \dots, n; \partial_t A_j(t, \cdot), j=0, \dots, n; B_j(t, \cdot), j=1, \dots, n; \\ \partial_t C(t, \cdot); D(t, \cdot))\|_{\infty, 0}$$

とある。この階次の性質を満足する正定数 $K_{\hat{m}}$, $T_{\hat{m}}$ が存在する。
 (性質) (i) $K_{\hat{m}}$, $T_{\hat{m}}$ は本質的に C_0 , $\hat{m}$ により依存する。

(ii) $\mathcal{A}_1 \leq C$, さらに $\mathcal{B}(t) \leq K_{\hat{m}}$ if $t \leq T_{\hat{m}}$ と
 仮定する。この時 Theorem 3.1 で保証される data F に対する
 (3.1) の解 u について次のような decay estimate が成り立つ。

$$\|u\|_{2, N, K} \leq C_{\hat{m}, K} [\|F\|_{2, N-1, K} + \mathcal{A}_N \|F\|_{2, 0, K}]$$

for any integer $N \in [1, \hat{m}]$ 。ここで $C_{\hat{m}, K}$ は本質的に $\hat{m}$,
 $K, C_0, C_1, k_0, k_1, T_{\hat{m}}$ により依存する定数である。 $\square$

§4. Iteration scheme. 2.3 節の考察より, 初期 data φ_0, φ_1 と f は $\tilde{m}$ 階の整合条件を満足するものとする。さらに $u_j (j \geq 0)$ と φ_0, φ_1, f に対して 2.3 節で逐次決定したものとする。この際, $\rho(t) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^1)$ と $\rho(t) = 1$ near $t=0$, $\rho=0$ $|t| > 1/2$ なるものとして,

$$v(t, x) = \left[\sum_{j=0}^{\tilde{m}-1} \frac{t^j}{j!} u_j(x) \right] \rho(t)$$

と置く。 $\tilde{m}$ 階の整合条件を満足するから, $v|_{\partial \Omega \times [0, \infty)} = 0$ である。さらに

$$|w|_{\infty, N, K} \leq C_{N, K} [\|\phi_0\|_{\infty, N+\tilde{m}-1} + \|\phi_1\|_{\infty, N+\tilde{m}-2} + \|f\|_{\infty, N+\tilde{m}-s, K}]$$

である。今 $u = v + w$ の形で解を求めるとして, w について方程式を書き直せば, Taylor 展開により

$$(4.1) \quad \mathcal{L}w + (\partial_\lambda \bar{F})(t, x, \lambda v) \lambda w + G(t, x, \lambda w) = g(t, x) \quad \text{in } [0, \infty) \times \Omega$$

$$w = 0 \quad \text{on } [0, \infty) \times \partial \Omega$$

$$w(0, x) = 0 \quad (\partial_t w)(0, x) = 0 \quad \text{in } \Omega$$

$$\text{但し} \quad g(t, x) = f(t, x) - \bar{\Phi}(v(t, x)).$$

$$G(t, x, \lambda) = \int_0^1 (1-\theta) \partial_\lambda^2 \bar{F}(t, x, \lambda v + \theta \lambda) (\lambda, \lambda) d\theta$$

である。2.3 節の考察から特に $(\partial_t^j g)(0, x) = 0$, $0 \leq j \leq \tilde{m}-3$ が従う。よって

$$\begin{aligned} \mathcal{L}w &= \mathcal{L}w + (\partial_\lambda \bar{F})(t, x, \lambda v) \lambda w = (1 + \hat{a}_0) \partial_t^2 w - \sum_{j=1}^n \hat{a}_j (\hat{a}_j^2 \partial_j w) \\ &\quad + \sum_{j=1}^n \hat{a}_j \partial_j \partial_t w + \hat{b}_0 \partial_t w + \sum_{j=1}^n \hat{b}_j \partial_j w + c w + d w \end{aligned}$$

(c はばいぬのもの) とおくと $\partial_\lambda \bar{F}(t, x, 0) = 0$ より,

初期data ε 十分小とすれば

$$(i) \sum_{j=1}^n \hat{a}_{ij} \xi_i \xi_j \geq \frac{3}{2} k_0 |\xi|^2, \quad \frac{3}{4} \leq 1 + \hat{a}_0 \leq \frac{5}{4}, \quad \tilde{a}_{ij} = \hat{a}_{ij}$$

$$(ii) \quad \hat{b}_0(t, x) - \frac{1}{2} \sum_{j=0}^n \partial_t \hat{a}_j(t, x) \geq \frac{3}{2} k_1, \quad \forall \quad t \geq T_0$$

$$(iii) \quad \sum_{j=1}^n |\hat{a}_{ij}|_{\infty, 0, 0} + \sum_{j=1}^n |\partial_t \hat{a}_{ij}|_{\infty, 0, 0} + |\hat{b}_0|_{\infty, 0, 0} + |c|_{\infty, 0, 0} \\ + \sum_{j=0}^n |\partial_t \hat{a}_j|_{\infty, 0, 0} + \sum_{j=1}^n |\partial_t \tilde{a}_{ij}|_{\infty, 0, 0} \leq \frac{3}{4} C_0$$

$$(iv) \quad |(\hat{a}_{ij}, i, j=1 \dots n; 1 + \hat{a}_0; \tilde{a}_j, j=1 \dots n; \hat{b}_j, j=0 \dots n; c; d)|_{\infty, 1, 0} \\ \leq \frac{3}{2} C_1$$

また $v(t, x) = 0 \quad t \geq 1/2$ より $\hat{a}_0 = 0, \quad \hat{a}_{ij} = a_{ij}, \quad \tilde{a}_j = a_j, \\ b_j = \hat{b}_j, \quad \hat{d} = d \quad \forall \quad t \geq 1/2$ が成り立つ。 $\square$

次に ε 天下り 法に iteration scheme を作る。まず $w_0 \in$

$$\begin{cases} \mathcal{L} w = g & \text{in } [0, \infty) \times \Omega, \quad w = 0 \text{ on } (0, \infty) \times \partial\Omega \\ w(0, x) = \partial_t w(0, x) = 0 & \text{in } \Omega \end{cases}$$

の定理 3.1, 3.2 の保証士が成り立つ。 w_{p+1} を得る。

$$w_{p+1} = w_p + \dot{w}_p = \sum_{j=0}^p \dot{w}_j + w_0$$

で与えらる。今 $\dot{w}_0, \dots, \dot{w}_p$ が既に与えられてゐるとする。

3. $B > 1$ を fixed constant とし

$$S_p w = \hat{S}^L(B^p) w$$

と置く。但し

$$\hat{S}^L = 2 \max(m-1, [n/2] + 2) + 1.$$

次に 2 階の線形作用素 L_p を

$$L_p w = \mathcal{L} w + \partial_t G(t, x, S_p \wedge w_p) \wedge w$$

とあく。剰余項 e_p', e_p'', e_p は.

$$e_p' = \partial_x G(t, x, \Lambda w_p) \wedge \dot{w}_p - \partial_x G(t, x, s_p \wedge w_p) \wedge \dot{w}_p$$

$$e_p'' = \hat{\mathcal{L}} w_{p+1} + G(t, x, \Lambda w_{p+1}) - (\hat{\mathcal{L}} \tilde{w}_p + G(t, x, \Lambda w_p)) \\ - (\hat{\mathcal{L}} \dot{w}_p + \partial_x G(t, x, \Lambda w_p) \wedge \dot{w}_p)$$

$$e_p = e_p' + e_p''$$

とあく。最後に.

$$g_0 = -S_0 [G(t, x, \Lambda w_0)]$$

$$g_{p+1} = -(s_{p+1} - s_p) \bar{E}_p - s_{p+1} e_p - (s_{p+1} - s_p) G(t, x, \Lambda w_0)$$

但し $\bar{E}_p = \sum_{j=0}^{p-1} e_j$ とあく。この時 w_{p+1} は

$$\begin{cases} L_{p+1} w = g_{p+1} \text{ in } (0, \infty) \times \Omega, & w = 0 \text{ on } [0, \infty) \times \partial\Omega \\ w(0, x) = \partial_t w(0, x) = 0 & \text{ in } \Omega \end{cases}$$

の解として定義する。特に

$$\hat{\mathcal{L}} w_{p+1} + G(t, x, \Lambda w_{p+1}) \\ = g + e_p + (1 - s_p) \bar{E}_p + (1 - s_p) G(t, x, \Lambda w_0)$$

を満足する。

3章の評価を用いて帰納的に次のように示せる。

Lemma 4.1. $0 < \delta \leq 1$ なる定数とする。この時 $\delta_m > 0$ が δ に依りて決まり、もし data φ_0, φ_1, f が

$$\|\varphi_0\|_{\infty, 2\hat{m}+1} + \|\varphi_1\|_{\infty, 2\hat{m}} + \|f\|_{\infty, 2\hat{m}-1, K} \leq \delta_m$$

を満足し、さらに $\hat{m}$ 回の整合条件を満足すれば、次の三つの事柄が成り立つ。

$$\Theta_j = B^{\delta} \quad \text{とあく。}$$

- (i) $\partial_t^k \dot{w}_j(0, x) = 0$, for $k=0, 1, 2, \dots$; $j=0, 1, 2$.
- (ii) $|\Lambda \dot{w}_j|_{2, L, K} \leq \delta \theta_j^{-\beta+L}$ for any integer $L \in [0, \hat{L}]$
- (iii) $|\Lambda \dot{w}_j|_{\infty, L, K} \leq \delta \theta_j^{-\beta+L}$ for any integer $L \in [0, \hat{L}]$.
- where

$$\beta = \max([\frac{n}{2}] + 2, m-1).$$

$$\hat{L} = 2\beta + 1, \quad \hat{m} = \hat{L} + 3 + [\frac{n}{2}] \quad \square$$

以下おまかに、上の補題を示す。まず w_0 については定理 3.2 から、

$$(4.3) \quad |w_0| \leq C_{m, k} |g|_{2, \hat{m}-1, K} \\ \leq C [\|\phi_0\|_{\infty, 2\hat{m}} + \|\phi_1\|_{\infty, 2\hat{m}-1} + |f|_{\infty, 2\hat{m}-2, k}]$$

よって、 δ_m を十分小にとってあげれば、(δ は δ_m によって)

$$\text{Lemma 4.2.} \quad \text{もし } \|\phi_0\|_{\infty, 2\hat{m}} + \|\phi_1\|_{\infty, 2\hat{m}-1} + |f|_{\infty, 2\hat{m}-2, k} \\ \leq \delta_m \Rightarrow$$

- (i) $\partial_t^k w_0(0, x) = 0$ $k=0, 1, 2, \dots, \hat{m}-1$
- (ii) $|\Lambda w_0|_{2, \hat{L}, K} \leq \delta$.
- (iii) $|\Lambda w_0|_{\infty, \hat{L}, K} \leq \delta$. □

ここで、 $\dot{w}_j$, $j=0, \dots, p$ に対して即ち Lemma 4.1 が示されているとする。この時次の補題が「帰納法の仮定と smoothing operator の性質, 補間不等式及び等比数列の計算により従う。

Lemma 4.3. $w_j = w_0 + \sum_{k=0}^{\hat{\alpha}-1} \dot{w}_k \quad j=1, \dots, p+1;$

$$(i) \quad |S_j \wedge w_j|_{\ell, L, K} \leq C_L \delta \theta_j^{-\beta+L} \quad \text{if } -\beta+L \geq \tau$$

$$(ii) \quad |S_j \wedge w_j|_{\ell, L, K} \leq C \delta \quad \text{if } -\beta+L \leq \tau$$

$$(iii) \quad |(1-S_j) \wedge w_j|_{\ell, L, K} \leq C \delta \theta_j^{-\beta} \quad \text{if } 0 \leq L \leq \tilde{\tau}$$

$$(iv) \quad \partial_t^k w_j(0, x) = 0, \quad k=0, 1, \dots, \hat{m}-1$$

但し、 τ は以下 τ は十分小さな正定数、また L は 2π は ∞ によって τ なる τ とする。 $\square$

Lemma 4.4. δ_m は十分小さい τ, τ

$$(A) \quad \|\phi_0\|_{\infty, 2\hat{m}+1} + \|\phi_1\|_{\infty, 2\hat{m}} + \|f\|_{\infty, 2\hat{m}-1, K} \leq \delta_m$$

が成り立つと仮定する。次の estimate が従う。 $0 \leq L \leq \tilde{m}$,

$$(i) \quad |\partial_x G(t, x, S_j \wedge w_j)|_{\infty, L, 0} \leq C \delta \theta_j^{-\beta+L} \quad \text{if } -\beta+L \geq \tau$$

$$|\partial_x G(t, x, S_j \wedge w_j)|_{\infty, L, 0} \leq C \delta \quad \text{if } -\beta+L \leq \tau$$

$$(ii) \quad |\partial_x^2 G(t, x, S_j \wedge w_j + \theta(1-S_j) \wedge w_j)|_{\infty, L, 0} \leq C(1+\delta \theta_j^{-\beta+L})$$

for $0 \leq L \leq \tilde{\tau}, -\beta+L \geq \tau$

$$|\partial_x^2 G(t, x, S_j \wedge w_j + \theta(1-S_j) \wedge w_j)|_{\infty, L, 0} \leq C \quad \text{for } -\beta+L \leq \tau.$$

$$(iii) \quad |\partial_x^2 G(t, x, \Lambda w_j + \theta \Lambda \dot{w}_j)|_{\infty, L, 0} \leq C(1+\delta \theta_j^{-\beta+L})$$

for $-\beta+L \geq \tau, 0 \leq L \leq \tilde{\tau}$

$$|\partial_x^2 G(t, x, \Lambda w_j + \theta \Lambda \dot{w}_j)|_{\infty, L, 0} \leq C \quad \text{if } -\beta+L \leq \tau. \square$$

e_j', e_j'' の表現と Lemmas 4.3, 4.4 を用いて

Lemma 4.5. τ の (A) が十分小さい δ_m が成り立つと仮定する。

$$\Rightarrow (i) \quad |e_j|_{\infty, L, K} \leq C \delta^2 \theta_j^{-2\beta+L} \quad \text{for } 0 \leq L \leq \tilde{L}$$

$$(ii) \quad \partial_t^R e_j(0, x) = 0, \quad R = 0, 1, 2, \dots$$

$$\text{for } l = 2 \text{ or } \infty, \quad j = 0, 1, 2, \dots, p \quad \square$$

最後に次の lemma も同様にして今までの lemmas を用いて示す。

Lemma 4.6. (A) が成立してゐるとする。

$$(J) (i) \quad \partial_t^j G(t, x, \Lambda w_0)|_{t=0} = 0 \quad j = 0, 1, 2, \dots, \tilde{L}-1.$$

$$(ii) \quad |G(t, x, \Lambda w_0)|_{\infty, L, K} \leq C \delta^2,$$

$$(iii) \quad |(1-s_p)G(t, x, \Lambda w_0)|_{\infty, L, K} \leq C \delta^2 \theta_p^{-2\beta+L} \quad \text{if } 0 \leq L \leq \tilde{L},$$

$$(iv) \quad |(1-s_{p+1})G(t, x, \Lambda w_0)|_{\infty, L, K} \leq C \delta^2 \theta_{p+1}^{-2\beta+L} \quad \text{if } 0 \leq L \leq \tilde{L}$$

$$(v) \quad |(s_{p+1}-s_p)G(t, x, \Lambda w_0)|_{\infty, L, K} \leq C_L \delta^2 \theta_{p+1}^{-2\beta+L} \quad \text{if } L \geq 0.$$

$$(K) (i) \quad \partial_t^R E_p(0, x) = 0, \quad R = 1, 2, \dots$$

$$(ii) \quad |E_p|_{\infty, L, K} \leq C \delta^2 \theta_p^{-2\beta+L} \quad \text{if } -2\beta+L \geq \tau, \quad L \leq \tilde{L}.$$

$$(iii) \quad |E_p|_{\infty, L, K} \leq C \delta^2 \quad \text{if } -2\beta+L \leq -\tau$$

$$(iv) \quad |(1-s_p)E_p|_{\infty, L, K} \leq C \delta^2 \theta_p^{-2\beta+L} \quad \text{if } 0 \leq L \leq \tilde{L}$$

$$(v) \quad |(1-s_{p+1})E_p|_{\infty, L, K} \leq C \delta^2 \theta_{p+1}^{-2\beta+L} \quad \text{if } 0 \leq L \leq \tilde{L}$$

$$(vi) \quad |(s_{p+1}-s_p)E_p|_{\infty, L, K} \leq C_L \delta^2 \theta_{p+1}^{-2\beta+L} \quad \text{if } L \geq 0.$$

以上が成り立つ。

$$(4) (i) \quad \partial_t^j g_0(0, x) = \partial_t^j g_{p+1}(0, x) = 0, \quad j = 0, 1, 2, \dots$$

$$(ii) \quad |g_0|_{\infty, L, K} \leq C_L \delta^2 \theta_0^{-2\beta+L} \quad \text{for } L \geq 0$$

$$(iii) \quad |g_{p+1}|_{\infty, L, K} \leq C_L \delta^2 \theta_{p+1}^{-2\beta+L} \quad \text{for } L \geq 0.$$

とて Lemma 4.1 と Lemma 4.6 (4) と Theorem 3.2 を用いて
 示す。まず Lemma 4.4 (i) より δ は十分小に取れば、

$L_{p+1} w = \hat{L} w + (d_\lambda G)(t, x, s_{p+1} \wedge w_{p+1}) \wedge w$ の係数は、
 定理 3.2 の仮定をすべて満足する。こうして、定理 3.2 より
 $0 \leq L \leq \tilde{m} - 2$ に対して

$$|\wedge \dot{w}_{p+1}|_{2, L, K} \leq C [|g_{p+1}|_{2, L+1, K} +$$

$$(1 + |(d_\lambda G)(t, x, s_{p+1} \wedge w_{p+1})|_{\infty, L+2, 0}) |g_{p+1}|_{2, 0, K}] \\ \leq C_L \delta^2 \theta_{p+1}^{-2\beta+L+1}$$

特に、 $\beta > 1$ より $(\max_{0 \leq L \leq \tilde{m}-2} C_L) \delta \leq 1$ に δ は十分小にとり、

$$|\wedge \dot{w}_{p+1}|_{2, L, K} \leq \delta \theta_{p+1}^{-\beta+L} \quad \text{for } \forall L \in [0, \tilde{L}]$$

が得られる。また Sobolev's inequality より、 $0 \leq L \leq \tilde{L} \Rightarrow$

$$|\wedge \dot{w}_{p+1}|_{\infty, L, K} \leq C_S C_{L+[\frac{n}{2}]+1} \delta^2 \theta_{p+1}^{-2\beta+L+[\frac{n}{2}]+2}$$

今 $\beta = \max([\frac{n}{2}]+2, m-1)$ とおき、 δ は十分小

にとり、 $C_S (\max_{0 \leq L \leq \tilde{L}} C_{L+[\frac{n}{2}]+1}) \cdot \delta \leq 1$ にとり、

$$|\wedge \dot{w}_{p+1}|_{\infty, L, K} \leq \delta \theta_{p+1}^{-\beta+L}$$

が示された。以上で Lemma 4.1 の証明は完結した。

最後に定理の証明をする。Lemma 4.1 から容易に

$$\sum_{p=0}^{\infty} |\Lambda \dot{w}_p|_{\infty, m-2, K} + |\Lambda w_0|_{\infty, m-2, K} \leq \frac{2B}{B-1} \cdot \delta$$

が従う。こゝして $w \in C^m([0, \infty) \times \bar{\Omega})$ と

$$w = w_0 + \sum_{p=0}^{\infty} \dot{w}_p$$

$$|w|_{\infty, m, K} \leq \left(\frac{2B}{B-1} \right) \cdot \delta$$

の存在はわかる。さらに

$$|\hat{\mathcal{L}}w + G(t, x, \Lambda w) - g|_{\infty, 0, 0}$$

$$\leq |\hat{\mathcal{L}}w + G(t, x, \Lambda w) - (\hat{\mathcal{L}}w_{p+1} + G(t, x, \Lambda w_{p+1}))|_{\infty, 0, 0}$$

$$+ |e_p|_{\infty, 0, 0} + |(1-s_p)E_p|_{\infty, 0, 0} + |(1-s_p)G(t, x, \Lambda w)|_{\infty, 0, 0}$$

$$\leq C \left[\sum_{j=p+2}^{\infty} |\Lambda \dot{w}_j|_{\infty, 0, 0} + \theta_{p+1}^{-\beta} \right]$$

が任意の p に対して成り立つ。こゝして

$$\hat{\mathcal{L}}w + G(t, x, \Lambda w) = g \quad \text{in } [0, \infty) \times \Omega$$

を満足し w の作り方が明らかに $w = 0$ on $[0, \infty) \times \partial\Omega$

$w(0, x) = \partial_t w(0, x) = 0$ in Ω が従う。こゝして w が所
求の解である。

Q. E. D.

参考文献: Y. SHIBATA: On the global existence of classical solutions of mixed problem for some second order non-linear hyperbolic operators with dissipative term in the interior domain, to appear.