

バイナリ・シフトに付随した相対可換子環の **Bratteli** 図式

渚 勝 (千葉大学理学部)

吉田 裕亮 (統計数理研究所)

R を超有限 II_1 型因子環とする。 R の単位元を保存する $*$ -自己準同型 σ がシフトであるとは $\bigcap_{k=0}^{\infty} \sigma^k(R) = \mathbb{C}I$ を満たすときをいう。特に、 R 上のシフト σ がバイナリ・シフトであるとは次の条件を満たすユニタリ作用素の列 $\{u_n\}$ が存在するときをいう。

- (1) $u_n^2 = I,$
- (2) $u_n u_m = (-1)^{a(n-m)} u_m u_n,$
- (3) $R = \{u_0, u_1, u_2, \dots\}''$,
- (4) $\sigma(u_n) = u_{n+1}$
($n, m = 0, 1, 2, \dots$)

ただし a は $\mathbb{Z}$ から $\{0, 1\}$ へ関数である。この関数 a は $a(0) = 0$ かつ $a(n) = a(-n), n \in \mathbb{Z}$ を満たす。この $\{a(n)\}$ を **signature** 列という。また **signature** 列が有限台をもつとは $d = \max\{i \in \mathbb{N}; a(i) \neq 0\}$, **signature** 列の深さ, が有限値であるときをいう。

2つのシフト α と β が共役であるとは R の自己同型 θ が存在して $\beta = \theta \alpha \theta^{-1}$ となるときをいい、また外部共役であるとは R の自己同型 θ と R のユニタリ作用素 u が存在して $\beta = \text{Adu} \theta \alpha \theta^{-1}$ となるときをいう。

本考究録の榎本氏の解説にあるように **Powers** はバイナリ・シフトの共役類の分類を行った。さらにバイナリ・シフト σ の外部共役不変量として

$$q(\sigma) = \min\{k \in \mathbb{N}; \sigma^k(R)' \cap R \neq \mathbb{C}I\}$$

は完全か、という問題を提示し相対可換子環 $C_k(\sigma) = \sigma^k(R)' \cap R$ の研究の重要性を促した。

signature 列の深さが d のとき

$$C_k(\sigma) = \begin{cases} \mathbb{C}I & (0 \leq k \leq d), \\ \{u_i; 0 \leq i \leq k-d-1\}'' & (d+1 \leq k) \end{cases}$$

と表される。したがって、与えられた有限台をもつ **signature** 列に対して相対可換子環 $C_k(\sigma) = \sigma^k(R)' \cap R$ の列を調べることは $\{u_n; n = 0, 1, 2, \dots\}$ で生成される有限次元 C^* -環 P_n の列 $\{P_n\}$ を調べることに帰着する。また、**signature** 列が漸近的に周期を持つ場合にも、Burse-Yin の **derived shift** を用いて、有限台をもつ場合に帰着される。

P_n を $\{u_i; 0 \leq i \leq n\}$ で生成される C^* -環とし P_n の中心を Q_n とかく。ここでの我々の主張は、この有限次元 C^* -環 P_n の増加列 $\{P_n\}$ の Bratteli diagram を完全に決定できるというものである。

まず、 P_n の中心を Q_n を調べる。 $u_0^{x(0)} u_1^{x(1)} \dots u_n^{x(n)}$ なる形の P_n の元は線形独立であり、 Q_n は $u_0^{x(0)} u_1^{x(1)} \dots u_n^{x(n)}$ なる形の元より生成される。そこで $u_0^{x(0)} u_1^{x(1)} \dots u_n^{x(n)} \in Q_n$ となるための同値条件を見てみると次のようになる。

$$\begin{aligned} & u_0^{x(0)} u_1^{x(1)} \dots u_n^{x(n)} \in Q_n \\ \iff & u_0^{x(0)} u_1^{x(1)} \dots u_n^{x(n)} \text{ は } u_i \text{ (} 1 \leq i \leq n \text{) と可換} \\ \iff & \sum_{k=0}^n a(i-k)x(k) = 0 \quad (0 \leq i \leq n) \end{aligned}$$

最後の式は F_2 上の線形方程式 $A(n)X = 0$ を表わす。ただし、 $A(n)$ は (i, j) -成分が $a(i-j)$ の F_2 係数の $(n+1) \times (n+1)$ 行列

$$A(n) = \begin{pmatrix} a(0) & a(1) & a(2) & \dots & a(n) \\ a(1) & a(0) & a(1) & \dots & a(n-1) \\ a(2) & a(1) & a(0) & \dots & a(n-2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a(n) & a(n-1) & a(n-2) & \dots & a(0) \end{pmatrix}$$

であり、また $X = (x(0), x(1), \dots, x(n))$ で $x(i) \in F_2$ ($i = 0, 1, 2, \dots$) である。したがって Q_n の $u_0^{x(0)} u_1^{x(1)} \dots u_n^{x(n)}$ なる形の元の個数は、 F_2 上の線形方程式 $A(n)X = 0$ の解 X の個数に等しい。したがって Q_n の次元は $2^{\dim(\text{Ker} A(n))}$ となる。

以降、 $\{a(n)\} = \{0, 1, 1, 0, 0, 0, \dots\}$ として、 Q_n の構造を見て行くことにする。この $\{a(n)\}$ に対して $\dim(\text{Ker} A(n))$ を求めることによって Q_n の次元を順に計算すると以下の様になる。

$$\begin{aligned} \dim(Q_0) &= 2, & \dim(Q_1) &= 1, & \dim(Q_2) &= 2, & \dim(Q_3) &= 4, \\ \dim(Q_4) &= 2, & \dim(Q_5) &= 1, & \dim(Q_6) &= 2, & \dim(Q_7) &= 1, \\ \dim(Q_8) &= 2, & \dim(Q_9) &= 4, & \dim(Q_{10}) &= 2, & \dim(Q_{11}) &= 1. \end{aligned}$$

これら Q_n の次元、すなわち線形方程式 $A(n)X = 0$ の解 X の個数の周期が 6 であることは次の計算で分かる。

いま、 $\{a(n)\} = \{0, 1, 1, 0, 0, 0, \dots\}$ であるので、台の部分を両側に延ばし 11011 を考える。そして、これをひとつ横に順にずらしては足し合わすことを繰り返す。このようにして両端のみが 1 となるようにできる。すなわち、

$$\begin{array}{ccccccccc} & & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & & \\ & & & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & \\ & & & & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ \hline & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

である。このときの両端の 1 の間隔が周期となる。このことは $n = 9$ のときの解を具体的に調べれば、どの部分に現れるか分かるであろう。

$$A(9) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

より、 $A(9)X = 0$ となるベクトル $X = (x(0), x(1), \dots, x(9))$ の成分について次の関係式が成立つ。

$$\left\{ \begin{array}{ll} x(1)+x(2) & = 0 \quad (0) \\ x(0) + x(2)+x(3) & = 0 \quad (1) \\ x(0)+x(1) + x(3)+x(4) & = 0 \quad (2) \\ x(1)+x(2) + x(4)+x(5) & = 0 \quad (3) \\ x(2)+x(3) + x(5)+x(6) & = 0 \quad (4) \\ x(3)+x(4) + x(6)+x(7) & = 0 \quad (5) \\ x(4)+x(5) + x(7)+x(8) & = 0 \quad (6) \\ x(5)+x(6) + x(8)+x(9) & = 0 \quad (7) \\ x(6)+x(7) + x(9) & = 0 \quad (8) \\ x(7)+x(8) & = 0 \quad (9) \end{array} \right.$$

この関係式の (5), (6), (7)

$$\left\{ \begin{array}{ll} x(3)+x(4) + x(6)+x(7) & = 0 \quad (5) \\ x(4)+x(5) + x(7)+x(8) & = 0 \quad (6) \\ x(5)+x(6) + x(8)+x(9) & = 0 \quad (7) \end{array} \right.$$

を考える。これらの辺々を足し合わすと、各 $x(i)$ が F_2 に属することより $x(9) = x(3)$ が従う。またひとつずれた (4), (5), (6)

$$\begin{cases} x(2)+x(3) & +x(5)+x(6) & = 0 & (4) \\ x(3)+x(4) & +x(6)+x(7) & = 0 & (5) \\ x(4)+x(5) & +x(7)+x(8) & = 0 & (6) \end{cases}$$

を考えると同様に $x(8) = x(2)$ が従う。この様に順にずらしていくことにより $x(7) = x(1)$, $x(6) = x(0)$ が従う。これらのことは、式 (2) から (7) より言えることである。また、残りの式 (0), (1) 及び (8), (9) は各 $x(i)$ の制約条件になる。今の場合これら制約条件により $x(0)$ から $x(3)$ が定まり、それらが定まれば (2), (3) 式により $x(4)$, $x(5)$ は一意的に定まる。またそれ以降は、先に導かれた $x(j+6) = x(j)$ ($j = 0, \dots, 3$) で定められる。

ここで制約条件の式の (8), (9) を見ると、これは $x(8) = x(2)$, $x(7) = x(1)$, $x(6) = x(0)$ より

$$\begin{cases} x(0)+x(1) & +x(3) & = 0 & (8) \\ x(1)+x(2) & & = 0 & (9) \end{cases}$$

と等価である。これらと式 (0), (1) を合せて考えると

$$\begin{cases} x(1)+x(2) & = 0 & (0) \\ x(0) & +x(2)+x(3) & = 0 & (1) \\ x(0)+x(1) & +x(3) & = 0 & (8) \\ x(1)+x(2) & = 0 & (9) \end{cases}$$

なる関係式が得られるが、これは線形方程式 $A(3)X = 0$ と全く一致する。ただし、

$$A(3) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

である。すなわち、線形方程式 $A(9)X = 0$ の解ベクトルと $A(3)X = 0$ の解ベクトルとの間には 1 対 1 の対応が付けられる。これと同じ議論によって、一般に線形方程式 $A(i)X = 0$ の解ベクトルと $A(i+6)X = 0$ の解ベクトルとの間に 1 対 1 の対応が付けられる。

線形方程式 $A(3)X = 0$ の解ベクトルは

$$A(3) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

より

$$\begin{aligned} Y_1 &= (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0), & Y_2 &= (0, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 1), \\ Y_3 &= (1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 1), & Y_4 &= (1, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 0) \end{aligned}$$

である。ところで先の対応でそれぞれの解ベクトルは Y_i と X_i とがそれぞれ対応する。 Y_i に対応するユニタリ作用素の積は

$$\begin{aligned} u_0^0 u_1^0 u_2^0 u_3^0 u_4^0 u_5^0 u_6^0 u_7^0 u_8^0 u_9^0, & \quad u_0^0 u_1^1 u_2^1 u_3^1 u_4^0 u_5^0 u_6^0 u_7^1 u_8^1 u_9^1, \\ u_0^1 u_1^0 u_2^0 u_3^1 u_4^0 u_5^0 u_6^1 u_7^0 u_8^0 u_9^1, & \quad u_0^1 u_1^1 u_2^1 u_3^0 u_4^0 u_5^0 u_6^1 u_7^1 u_8^1 u_9^0 \end{aligned}$$

となる。先と同様に、この積自身が自己共役なユニタリ作用素となるように $\sqrt{-1}$ を掛けて

$$\begin{aligned} u_0^0 u_1^0 u_2^0 u_3^0 u_4^0 u_5^0 u_6^0 u_7^0 u_8^0 u_9^0, & \quad \sqrt{-1} u_0^0 u_1^1 u_2^1 u_3^1 u_4^0 u_5^0 u_6^0 u_7^1 u_8^1 u_9^1, \\ u_0^1 u_1^0 u_2^0 u_3^1 u_4^0 u_5^0 u_6^1 u_7^0 u_8^0 u_9^1, & \quad \sqrt{-1} u_0^1 u_1^1 u_2^1 u_3^0 u_4^0 u_5^0 u_6^1 u_7^1 u_8^1 u_9^0 \end{aligned}$$

とし、それぞれ $1, (123789), (0369), (012678)$ と書く。生成元としては先の対応を経由して $(123789), (0369)$ の2つを取るようにする。したがって Q_9 の極小射影は $(123789)^\pm (0369)^\pm$ の4つである。一般に Q_i の極小射影と Q_{i+6} の極小射影との対応もこれと同様にして定めることになる。さらにこの1対1の対応は Q_i と Q_{i+6} の同型を誘導する。

ここで各 n に対する Q_n の次元および極小射影を以下に示しておく。

n	$\dim(Q_n)$	$\{v(x) : A(n)X = 0\}$	$\{v(x) : A(n)X = 0\}$ の生成元	Q_n の極小射影
0	2	1, (0)	(0)	$(0)^\pm$
1	1	1	1	1
2	2	1, (012)	(012)	$(012)^\pm$
3	4	1, (123), (03), (012)	(123), (03)	$(123)^\pm (03)^\pm$
4	2	1, (123)	(123)	$(123)^\pm$
5	1	1	1	1
6	2	1, (036)	(036)	$(036)^\pm$
7	1	1	1	1
8	2	1, (012678)	(012678)	$(012678)^\pm$
9	4	1, (123789), (0369), (012678)	(123789), (0369)	$(123789)^\pm (0369)^\pm$

次に P_n から P_{n+1} への包含行列を調べることを考える。これは Q_n の極小射影の Q_{n+1} での直交性を調べることである。また先のことより Q_n の極小射影と Q_{n+6} の極小射影には 1 対 1 の対応があり、対応を通して Q_n の極小射影の Q_{n+1} での直交性は Q_{n+6} の極小射影の Q_{n+7} での直交性に対応する。したがって、有限次元環の増加列 $\{P_n\}$ から定まる AF-環の Bratteli diagram を見るには、最初の 6 段を見れば以下はそれの繰返しである。

以下に Q_2 の極小射影の Q_3 における直交性を見てみよう。

$$\begin{aligned}
 (012)^+ &= \frac{1}{2}\{1 + (012)\} \\
 &= \frac{1}{2}\{1 - (03) + (03) + (03)(123)\} \\
 &= (03)^- + (03)(123)^+ \\
 &= (03)^+(123)^+ + (03)^-(123)^-
 \end{aligned}$$

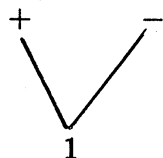
同様に

$$(012)^- = (03)^+(123)^- + (03)^-(123)^+$$

なる直交関係が得られる。

したがって Q_n の極小射影に対して次のような直交関係の図式が得られる。

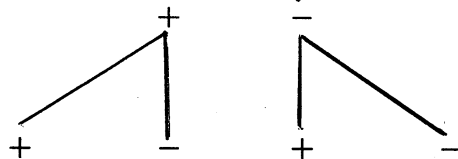
(0)



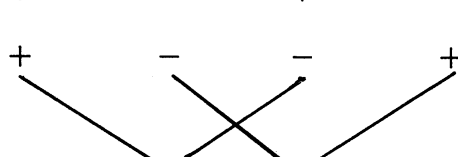
(012)



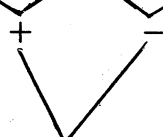
(123)



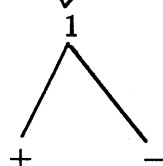
(03)



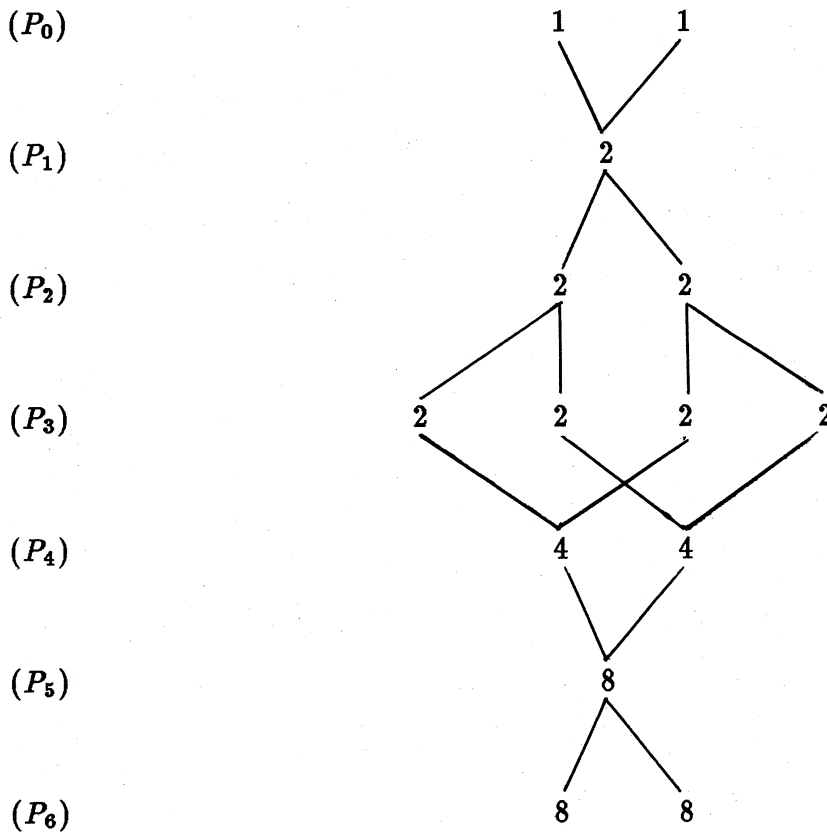
(123)



(036)



これより $\{P_n\}$ の Bratteli diagram として次が得られる。



このように、与えられた **signature** 列より定まるバイナリ・シフトに付随した相対可換子環の **Bratteli** 図式が得られるが、最後にバイナリ・シフトとして共役ではないがそれらに付随した相対可換子環の **Bratteli** 図式が一致する場合として、以下の様な例があることを述べておく。すなわち、

$$a_1 = (0, 0, 1, 0, 1, 0, \dots), \quad a_2 = (0, 0, 1, 1, 1, \dots)$$

は **signature** 列は異なるが、これらより定まるバイナリ・シフトに付随した相対可換子環の **Bratteli** 図式は一致する。