形式体系における一様含意と Π^1_1-CA_0 の Π^1_2 定理の特徴づけ

鈴木 悠大

沖縄高専

yudai.suzuki.q1@dc.tohoku.ac.jp

1 導入

逆数学とは，定理の証明に必要な公理を特定する研究であるとしばしば言われる．ここでいう公理とは，伝統的には自然数とその部分集合を扱えるような一連の形式体系，**二階算術**の公理系を指す[1]．数学の種々の定理を二階算術の言語 $\mathcal{L}_2$ の論理式として表現し，それらの論理式と**五大体系**と呼ばれる，線形に並ぶ五つの公理系 (RCA_0, WKL_0, ACA_0, ATR_0, Π^1_1-CA_0，右に行くほど強い) との間で同値性を調べるというのが伝統的な逆数学の研究である．

逆数学の研究が進むにつれ，解析学・幾何学・代数学・数理論理学など実にさまざま範囲の定理に対して五大体系こそがそれらの証明に必要十分であることが証明され，数学の定理が五大体系によって特徴づけられてきた．しかし一方で五大体系では特徴づけられないような定理も発見され，そのような定理を特徴づけるために新たな公理系も導入されてきた．数学の諸定理を既存の公理系によって特徴づけることはもちろん逆数学の研究目的だが，現在の逆数学研究ではそれだけでなく新たな公理系を導入し逆数学の枠組みを広げることも重要視されている．すなわち，既存の公理系では特徴づけられない定理を発見しその定理を特徴づけるための公理系を導入するという形の研究もまた重要である．このようにして広げられてきた逆数学の枠組みの複雑な様相は**逆数学動物園** [1] と称される．

本稿では五大体系のうち最も強い Π^1_1-CA_0 と，次に強い ATR_0 の間の領域を特徴づける一連の公理系群を導入する．そして，Galvin-Prikry の定理 ($[\mathbb{N}]^{\mathbb{N}}$ に対する Ramsey の定理) の自然な弱化とそれらの公理系の関係性を見る．なお，本稿の内容は横山啓太氏との共同研究に基づく論文 [8] の一部を要約したものである．

2 準備

まず本稿で扱う基本的な概念をいくつか導入しよう．二階算術については [7] が標準的な文献であるので，そちらも参照されたい．

定義 2.1. 二階算術の言語 $\mathcal{L}_2$ は，以下の要素からなる形式言語である．

- 数変数 $x, y, z, \ldots,$
- 集合変数 $X, Y, Z, \ldots,$
- 数定数 $0, 1,$

[1] 二階算術の言語 $\mathcal{L}_2$ の公理系のうち，特に Z_2 のことを二階算術 (second-order arithmetic) と呼び，本稿で扱われているような公理系を二階算術の部分体系 (subsystems of second-order arithmetic) と呼ぶ流儀もある．しかし，よく扱われる一部の $\mathcal{L}_2$ 公理系が必ずしも Z_2 の部分体系となるわけではない（例えば $\mathcal{L}_2$ における強い選択公理や従属選択公理は Z_2 では証明できない）ことを考えれば，むしろ構造 $(\omega, \mathcal{P}(\omega))$ の性質を記述するような $\mathcal{L}_2$ 公理系を総称して二階算術と呼ぶ方が妥当であると思われる．

- 数上の二項演算 $+, \cdot,$
- 数上の二項関係 $<, =,$
- 数と集合に対する関係 $\in$.

$\mathcal{L}_2$ 構造 $\mathcal{M}$ は $\mathcal{M} = (\mathbb{N}^{\mathcal{M}}, S^{\mathcal{M}}, 0^{\mathcal{M}}, 1^{\mathcal{M}}, +^{\mathcal{M}}, \cdot^{\mathcal{M}}, <^{\mathcal{M}}, =^{\mathcal{M}}, \in^{\mathcal{M}})$ という形をしている．ただし，$\mathbb{N}^{\mathcal{M}}$ は数変数の走る領域，$S^{\mathcal{M}}$ は集合変数の走る領域，$0^{\mathcal{M}}, 1^{\mathcal{M}} \in \mathbb{N}^{\mathcal{M}}$ であり，$+^{\mathcal{M}}, \cdot^{\mathcal{M}}$ は $\mathbb{N}^{\mathcal{M}}$ 上の二変数関数，$<^{\mathcal{M}}$ は $\mathbb{N}^{\mathcal{M}}$ 上の二項関係，$\in^{\mathcal{M}}$ は $\mathbb{N}^{\mathcal{M}} \times S^{\mathcal{M}}$ の部分集合である．また，$=^{\mathcal{M}}$ は $\mathbb{N}^{\mathcal{M}}$ 上の通常の等号とする．

我々は通常 Henkin 意味論を用いる．すなわち，$S^{\mathcal{M}}$ は $\mathcal{P}(\mathbb{N}^{\mathcal{M}})$ の部分集合であるとして，$\in^{\mathcal{M}}$ は通常の要素関係であるとする．また，$0^{\mathcal{M}}, 1^{\mathcal{M}}, +^{\mathcal{M}}, \cdot^{\mathcal{M}}, <^{\mathcal{M}}$ は文脈から明らかな場合は省略し，単に $(\mathbb{N}^{\mathcal{M}}, S^{\mathcal{M}})$ という組を $\mathcal{L}_2$ 構造と呼ぶこともある．

注意 2.2. 言語 $\mathcal{L}_2$ においては，集合変数に対する等号は用意されていない．以下では，集合変数 X, Y に対して $X = Y$ は $\forall x(x \in X \leftrightarrow x \in Y)$ の略記であるとする．

記法 2.3. 本稿では記号 $\mathbb{N}$ は $\mathcal{L}_2$ 構造の数領域を表すために用いる．標準自然数の集合 $\{0, 1, 2, \ldots\}$ を表す場合は ω を用いる．

二階算術では数変数と集合変数という二種類の変数を扱うため，量化記号も数変数に対する量化 $\forall x, \exists x$ と集合変数に対する量化 $\forall X, \exists X$ が存在する．$\mathcal{L}_2$ の論理式は，これらの量化記号の現れ方によって次のように階層化されている．

定義 2.4. 数変数 x と，x を含まない項 t によって $\forall x < t, \exists x < t$ という形で表される量化のことを有界量化という．

各 $j \in \omega, i < 2$ に対して論理式のクラス Σ^i_j, Π^i_j を以下のように帰納的に定義する．

- 全ての量化が有界量化であるような論理式を Σ^0_0 論理式，Π^0_0 論理式という．
- Σ^0_j 論理式 φ を用いて，$\forall x \varphi$ という形で表せる論理式を Π^0_{j+1} 論理式という．
- Π^0_j 論理式 φ を用いて，$\exists x \varphi$ という形で表せる論理式を Σ^0_{j+1} 論理式という．
- ある j について Σ^0_j 論理式であるような論理式を Σ^1_0 論理式，Π^1_0 論理式，あるいは算術的論理式という．
- Σ^1_j 論理式 φ を用いて，$\forall X \varphi$ という形で表せる論理式を Π^1_{j+1} 論理式という．
- Π^1_j 論理式 φ を用いて，$\exists X \varphi$ という形で表せる論理式を Σ^1_{j+1} 論理式という．

また，考えている文脈で Σ^i_j 論理式，Π^i_j 論理式と同値な論理式も総称して Σ^i_j 論理式，Π^i_j 論理式と呼ぶ．例えば $x = x \wedge \exists Y(y \in Y)$ は $\exists Y(y \in Y)$ と同値であるため Σ^1_1 論理式とする．

定義 2.5. 公理系 T において Σ^i_j 論理式でも Π^i_j 論理式でも表せるような条件を T 上の Δ^i_j 条件と呼ぶ．考えている文脈から T が明らかな場合は単に Δ^i_j 条件とだけ呼ぶこともある．

定義 2.6. $\mathcal{L}_2$ の公理系 $\mathrm{I}\Sigma^0_1, \mathsf{RCA}_0, \mathsf{ACA}_0, \Pi^1_1\text{-}\mathsf{CA}_0$ はそれぞれ以下のように定義される．

- $\mathrm{I}\Sigma^0_1$：離散順序半環の公理と Σ^0_1 論理式に対する帰納法公理．
- RCA_0：$\mathrm{I}\Sigma^0_1$ に，各 $\varphi \in \Sigma^0_1, \psi \in \Pi^0_1$ に対して以下の論理式の全称閉包[2]を加えたもの．

$$\forall x(\varphi(x) \leftrightarrow \psi(x)) \to \exists X \forall x(x \in X \leftrightarrow \varphi(x)).$$

[2] φ や ψ は x 以外のパラメータを含んでも良い．ただし X は含まないものとする．これは，以下に定める ACA_0 や $\Pi^1_1\text{-}\mathsf{CA}_0$ の場合も同様である．余談だが，φ に X の出現を許す場合，X の出現を許さない場合と比べて一般にはるかに強い公理となる．このような公理系は帰納的定義（Inductive Definition）の文脈などで扱われる．

- ACA_0：RCA_0 に各 $\varphi \in \Sigma^1_0$ について以下の論理式の全称閉包を加えたもの．

$$\exists X \forall x (x \in X \leftrightarrow \varphi(x)).$$

- Π^1_1-CA_0：RCA_0 に各 $\varphi \in \Pi^1_1$ について以下の論理式の全称閉包を加えたもの．

$$\exists X \forall x (x \in X \leftrightarrow \varphi(x)).$$

以下，定理や定義を述べる際に，定理 (T) と書いたらその定理が公理系 T において証明可能であることを意味する．また定義 (T) と書いたらその定義が T 内で行えることを意味する．

定義 2.7 (対関数, RCA_0)**.** $(\bullet, \bullet)$ で標準的な対関数 $\mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ を表す．

定義 2.8 (集合族，RCA_0)**.** 集合 X と $x \in \mathbb{N}$ に対して，集合 X_x を $X_x = \{y : (x, y) \in \mathbb{N}\}$ と定義する．この意味で，集合 X は集合列 $\langle X_x \rangle_{x \in \mathbb{N}}$ をコードしていると見做す．また，$Y \in \langle X_x \rangle_x$ を $\exists x (Y = X_x)$ の略記とする．

定義 2.9 (万能 Π^0_1 論理式)**.** 次のような条件を満たす，**万能 Π^0_1 論理式** π^0_1 が存在する．任意の Π^0_1 論理式 $\varphi(x, X)$ に対して，$\ulcorner \varphi \urcorner$ でそのゲーデル数を表すとする時

$$\mathsf{RCA}_0 \vdash \forall x, X (\varphi(x, X) \leftrightarrow \pi^0_1(\ulcorner \varphi \urcorner, x, X)).$$

定義 2.10 (Turing ジャンプ，RCA_0)**.** 集合 X に対して，集合 $\{(e, x) : \pi^0_1(e, x, X)\}$ が存在する時，その集合を $\mathrm{TJ}(X)$ と表し X の **Turing ジャンプ**と呼ぶ．また，$\mathrm{TJ}(\mathrm{TJ}(X)), \mathrm{TJ}(\mathrm{TJ}(\mathrm{TJ}(X))), \ldots$ のことをそれぞれ $\mathrm{TJ}^2(X), \mathrm{TJ}^3(X), \ldots$ と略記する．

計算理論の言葉を用いれば，上記の定義において $\mathrm{TJ}(X)$ は X から $\Pi^{0,X}_1$ 完全集合を与えるような作用素である．余談だが，計算理論において，Turing ジャンプは通常は停止問題を使って $\mathrm{TJ}(X) = \{e : \Phi^X_e(e)\downarrow\}$ という $\Sigma^{0,X}_1$ 完全集合として定義される．上記の Turing ジャンプは一般化された停止問題 $\{(e, x) : \Phi^X_e(x)\downarrow\}$ の補集合である．

定義 2.11 (Turing 還元，RCA_0)**.** 集合 X, Y に対して，**X が Y に Turing 還元可能**である，あるいは **X が Y から計算可能**であるとは，以下の条件を満たすことをいう．

$$\exists e, e' \forall x (x \in X \leftrightarrow \pi^0_1(e, x, Y) \leftrightarrow \neg \pi^0_1(e', x, Y)).$$

このとき，$X \leq_{\mathrm{T}} Y$ と書く．

定義 2.12. (n ジャンプ，ω ジャンプ，RCA_0) 集合 X に対して，集合列 $Y = \langle Y_i \rangle_{i \in \mathbb{N}}$ が次の条件を満たす時，**Y は X の n ジャンプ**であるといい $Y = X^{(n)}$ と表す．

$$Y_0 = X \wedge \forall i < n (Y_{i+1} = \mathrm{TJ}(Y_i)).$$

$\langle Y_i \rangle_{i \in \mathbb{N}}$ が次の条件を満たす時，**Y は X の ω ジャンプ**であるといい $Y = X^{(\omega)}$ と表す．

$$Y_0 = X \wedge \forall i (Y_{i+1} = \mathrm{TJ}(Y_i)).$$

注意 2.13. 標準自然数 $n \in \omega$ に対して，厳密には $\mathrm{TJ}^n(X)$ と $X^{(n)}$ は上記の定義では異なる概念である．しかし，以下ではこれらを区別せずに扱う．

定義 2.14. 公理系 ACA^+_0 は，RCA_0 に公理 $\forall X \exists Y (Y = X^{(\omega)})$ を付け加えた公理系である．

ω ジャンプの概念は，整列順序（順序数）α に対する α ジャンプの概念へと一般化することができる．α ジャンプを用いることで，五大体系の一つ ATR_0 は次のように定義される．

定義 2.15. $\mathrm{WO}(X)$ を，“X が整列順序である” ことを表す Π^1_1 論理式とする．このとき

$$\mathsf{ATR}_0 = \mathsf{RCA}_0 + \forall X \forall \alpha (\mathrm{WO}(\alpha) \to \exists Y (Y = X^{(\alpha)})).$$

定理 2.16. $\mathsf{ACA}_0 < \mathsf{ACA}_0^+ < \mathsf{ATR}_0$. ここで，公理系 T, S について $T < S$ は S から証明できる文が T から証明できる文より真に多いことを表す.

定義 2.17. (算術的還元性，ACA_0) 集合 X, Y に対して，以下の条件が成り立つ時，X は Y に**算術的還元可能**であるといい，$X \leq^{\mathrm{a}}_{\mathrm{T}} Y$ と表す.

$$\exists n \exists Z (Z = Y^{(n)} \land X \leq_{\mathrm{T}} Y).$$

また，$\forall X \leq^{\mathrm{a}}_{\mathrm{T}} Y$ および $\exists X \leq^{\mathrm{a}}_{\mathrm{T}} Y$ をそれぞれ $\forall X (X \leq^{\mathrm{a}}_{\mathrm{T}} Y \to \cdots)$ と $\exists X (X \leq^{\mathrm{a}}_{\mathrm{T}} Y \land \cdots)$ の略記とする.

算術的還元という用語および記号 $\leq^{\mathrm{a}}_{\mathrm{T}}$ は，算術的 Weihrauch 還元 (arithmetical Weihrauch reduction) とそれを表す記号 $\leq^{\mathrm{a}}_{\mathrm{W}}$ に倣ったものである.

補題 2.18. θ を算術的論理式とする．このとき ACA_0^+ 上で，$\forall X \leq^{\mathrm{a}}_{\mathrm{T}} Y \theta(X, Y)$ および $\exists X \leq^{\mathrm{a}}_{\mathrm{T}} Y \theta(X, Y)$ はそれぞれ Y に関する Δ^1_1 条件となる．実際，ACA_0^+ 上で

$$\begin{aligned} \forall X \leq^{\mathrm{a}}_{\mathrm{T}} Y \theta(X, Y) &\leftrightarrow \forall Z (Z = Y^{(\omega)} \to \forall n \forall X \leq_{\mathrm{T}} Z_n \theta(X, Y)) \\ &\leftrightarrow \exists Z (Z = Y^{(\omega)} \land \forall n \forall X \leq_{\mathrm{T}} Z_n \theta(X, Y)) \end{aligned}$$

と表せる．$\exists X \leq^{\mathrm{a}}_{\mathrm{T}} Y \theta(X, Y)$ も同様である．したがって特に，ACA_0^+ 上で $\forall X \exists Y \leq^{\mathrm{a}}_{\mathrm{T}} X \theta$ は Π^1_1 論理式である.

Turing ジャンプの Σ^1_1 アナロジーとしてハイパージャンプが存在する.

定義 2.19 (万能 Σ^1_1 論理式). 論理式 σ^1_1 を

$$\sigma^1_1(e, x, X) \equiv \exists f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \pi^0_1(e, x, X \oplus f)$$

により定義する．ただし，$f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ は，f が $\mathbb{N}$ 上の全域関数であることを表す Π^0_2 論理式である.

補題 2.20. ある原始再帰的関数 g があって，次が成り立つ．任意の Σ^1_1 論理式 $\varphi(x, X)$ に対して

$$\mathsf{ACA}_0 \vdash \forall x, X (\varphi(x, X) \leftrightarrow \sigma^1_1(g(\ulcorner \varphi \urcorner), x, X)).$$

定義 2.21. (ハイパージャンプ，RCA_0) 集合 X に対して，集合 $\{(e, x) : \sigma^1_1(e, x, X)\}$ が存在する時，その集合を $\mathrm{HJ}(X)$ と表し X の**ハイパージャンプ**と呼ぶ．また，$\mathrm{HJ}(\mathrm{HJ}(X)), \mathrm{HJ}(\mathrm{HJ}(\mathrm{HJ}(X))), \ldots$ のことをそれぞれ $\mathrm{HJ}^2(X), \mathrm{HJ}^3(X), \ldots$ と略記する.

$\mathrm{HJ}(X)$ は X から $\Sigma^{1,X}_1$ 完全集合を作る作用素である．したがって次が成り立つ.

定理 2.22. RCA_0 上で，Π^1_1-CA_0 と $\forall X \exists Y (Y = \mathrm{HJ}(X))$ は同値である.

3　ハイパージャンプによる Π^1_1-CA_0 の Π^1_2 帰結の特徴づけ

BQO 理論における Nash-Williams の定理[3][4] やグラフ理論における Menger の定理 [6] のように Π^1_2 文で表現可能かつ Π^1_1-CA_0 から証明可能だが，ATR_0 からの証明が知られていない定理が知られている．これらの定理を証明するために $\forall X \exists Y (Y = \mathrm{HJ}(X))$ という Π^1_3 公理は強すぎるということが次の事実から直ちにわかる.

[3]より正確には，ATR_0 上同値な主張である一般化 Higman の定理

定理 3.1. 任意の Π^1_2 文 σ に対して，

$$\Pi^1_1\text{-}\mathsf{CA}_0 \vdash \sigma \to \mathsf{Con}(\sigma).$$

ここで，$\mathsf{Con}(\sigma)$ は σ の無矛盾性を表す論理式である．

そこで，$\forall X \exists Y (Y = \mathrm{HJ}(X))$ という Π^1_3 文の良い Π^1_2 近似を考えることにより，Π^1_1-CA_0 から証明可能な Π^1_2 文を証明する Π^1_2 公理系を作る．この際，コード化 ω モデルの概念を用いる．

定義 3.2. $G = (\mathbb{N}^G, S^G, 0^G, 1^G, +^G, \cdot^G, <^G)$ を RCA_0 のモデルとする．この時，任意の $X \in S^G$ に対して，$G_X = (\mathbb{N}^G, \{X_i : i \in \mathbb{N}^G\}, 0^G, 1^G, +^G, \cdot^G, <^G)$ は二階算術の言語 $\mathcal{L}_2$ の構造である．この G_X のことを X によってコードされる**コード化 ω モデル**と呼ぶ.

G_X は X のみによって定まるため，以下 G_X と X を同一視する．この意味で，G において G_X は要素として存在しているため，G 上で $Y \in G_X$ や $G_X \models \sigma$ といった言明を扱える．

以下，コード化 ω モデルの基本的性質をいくつか述べておく．

補題 3.3. σ を論理式とする．この時，ACA_0 上で次が成り立つ．任意のコード化 ω モデル $\mathcal{M}$ に対して，$\mathcal{M} \models \sigma$ と σ の $\mathcal{M}$ への相対化 $\sigma^{\mathcal{M}}$ が成り立つことは同値である．ただし，$\sigma^{\mathcal{M}}$ は，σ 中の $\forall X$ を全て $\forall X \in \mathcal{M}$ に，$\exists X$ を全て $\exists X \in \mathcal{M}$ に置き換えた論理式である．したがって，$\sigma^{\mathcal{M}}$ は σ 中の $\forall X \theta(X)$ という部分論理式を $\forall i \theta(\mathcal{M}_i)$ に置き換え，$\exists X \theta(X)$ という部分論理式を $\exists i \theta(\mathcal{M}_i)$ に置き換えて得られるような論理式であるため，σ によらず算術的論理式である．

補題 3.4. σ を文として，$G = (\mathbb{N}^G, S^G)$ を RCA_0 のモデルとする．この時，任意の $X \in G$ に対して以下が成り立つ．もし $G \models \sigma^X$ であれば（すなわち，G から見て G_X が σ のモデルであれば），$G_X = (\mathbb{N}^G, \{X_i : i \in \mathbb{N}^G\})$ は実際に σ のモデルである．

補題 3.5. (RCA_0) 以下の主張は同値である．

- ACA_0^+,
- 任意の X に対して，X を含むコード化 ω モデル $\{Y : Y \leq^{\mathrm{a}}_{\mathrm{T}} X\}$ が存在し ACA_0 のモデルである．

補題 3.6. (算術的論理式の絶対性) G を RCA_0 のモデルとして，$\mathcal{M} \in G$ とする．また，$\theta(\vec{x}, \vec{X}, Y)$ を算術的論理式とする．このとき，任意の $\vec{x} \in \mathbb{N}^G, \vec{X} \in \mathcal{M}$ に対して次が成り立つ．

$$G \models (\exists Y \theta(\vec{x}, \vec{X}, Y))^{\mathcal{M}} \to \exists Y \theta(\vec{x}, \vec{X}, Y),$$
$$G \models \forall Y \theta(\vec{x}, \vec{X}, Y) \to (\forall Y \theta(\vec{x}, \vec{X}, Y))^{\mathcal{M}}.$$

コード化 ω モデルを用いた Π^1_1-CA_0 の Π^1_2 近似を導入しよう．

定義 3.7. 標準自然数 $n \in \omega$ に対して，文 $\beta^1_0\,\mathsf{RFN}(n)$ を次で定義する．

$$\beta^1_0\,\mathsf{RFN}(n) \equiv \forall X \exists \mathcal{M} (X \in \mathcal{M} \wedge \mathcal{M} \models \mathsf{ACA}_0 + \exists Y (Y = \mathrm{HJ}^n(X))).$$

$\beta^1_0\,\mathsf{RFN}(n)$ は [5] において導入された論理式 $\psi_e(i, n)$ の特別な場合，$\psi_0(1, n)$ と RCA_0 上同値である．$\beta^1_0\,\mathsf{RFN}(n)$ の上添字 1 と下添字 0 はそれぞれ $i = 1, e = 0$ であることに由来する．

$\beta^1_0\,\mathsf{RFN}(n)$ のアイデアは次のとおりである．$\mathcal{M}$ の中に存在する $\mathrm{HJ}^n(X)$ は本物 $\mathrm{HJ}^n(X)$ であるとは限らない．しかし，ACA_0 のコード化 ω モデルという十分良い範囲では $\mathrm{HJ}^n(X)$ として振る舞うので，$\mathrm{HJ}^n(X)$ の良い近似となっている．

さて，我々が示すのは $\beta^1_0\,\mathsf{RFN}(n)$ たちが，Π^1_1-CA_0 から証明可能な Π^1_2 文を証明するのに十分なほど強いということである．そのために，以下の補題が有用である．

補題 3.8 ([8]). $\theta(X,Y,Z)$ を算術的論理式として，Π^1_1-$\mathsf{CA}_0 \vdash \forall X\exists Y\forall Z\theta(X,Y,Z)$ とする．この時，ある標準自然数 $n\in\omega$ が存在して，

$$\mathsf{ACA}_0 \vdash \forall X\forall W(W=\mathrm{HJ}^n(X)\to\exists Y\leq_{\mathrm{T}}\forall Z\theta(X,Y,Z)).$$

定理 3.9. σ を Π^1_2 文として，Π^1_1-$\mathsf{CA}_0\vdash\sigma$ とする．このとき，ある標準自然数 $n\in\omega$ が存在して，

$$\mathsf{ACA}_0+\beta^1_0\,\mathsf{RFN}(n)\vdash\sigma.$$

Proof. σ は Π^1_2 なので，$\sigma\equiv\forall X\exists Y\theta(X,Y)$ となる算術的論理式 θ が取れる．このとき，Π^1_1-$\mathsf{CA}_0\vdash\forall X\exists Y\theta(X,Y)$ であることから，ある $n\in\omega$ について

$$\mathsf{ACA}_0\vdash\forall X\forall W(W=\mathrm{HJ}^n(X)\to\exists Y\leq_{\mathrm{T}}W\theta(X,Y))$$

が成り立つ．このような n について，$\mathsf{ACA}_0+\beta^1_0\,\mathsf{RFN}(n)\vdash\sigma$ となることを示す．任意に $\mathsf{ACA}_0+\beta^1_0\,\mathsf{RFN}(n)$ のモデル $G=(\mathbb{N}^G,S^G)$ をとり，任意に $X\in S^G$ を取る．以下，$G\models\exists Y\theta(X,Y)$ を示せば良い．

いま G は $\beta^1_0\,\mathsf{RFN}(n)$ のモデルなので，G 内のコード化 ω モデル $\mathcal{M}$ を

$$G\models[X\in\mathcal{M}\wedge\mathcal{M}\models\mathsf{ACA}_0+\exists W(W=\mathrm{HJ}^n(X))]$$

となるように取れる．ここで，$G_{\mathcal{M}}=(\mathbb{N}^G,\{\mathcal{M}_i:i\in\mathbb{N}^G\})$ は実際に $\mathsf{ACA}_0+\exists W(W=\mathrm{HJ}^n(X))$ のモデルとなるので，

$$G_{\mathcal{M}}\models\exists Y\leq_{\mathrm{T}}\mathrm{HJ}^n(X)\theta(X,Y).$$

したがって，$G_{\mathcal{M}}\models\exists Y\theta(X,Y)$ であるので $G\models\exists Y\theta(X,Y)$ となる． $\square$

なお，各 $\beta^1_0\,\mathsf{RFN}(n)$ が Π^1_1-CA_0 から証明可能な Π^1_2 文であることは容易にわかるため，以下の特徴づけを得る．

系 3.10. $\{\sigma\in\Pi^1_2:\Pi^1_1\text{-}\mathsf{CA}_0\vdash\sigma\}$ は $\mathsf{ACA}_0+\{\beta^1_0\,\mathsf{RFN}(n):n\in\omega\}$ により公理化される．

$\beta^1_0\,\mathsf{RFN}(n)$ と既存の公理系の強さを比べると，ACA_0 上で $\beta^1_0\,\mathsf{RFN}(0)=\mathsf{ACA}^+_0<\mathsf{ATR}_0<\beta^1_0\,\mathsf{RFN}(1)$ となる．また，ACA_0 上で一般に $\beta^1_0\,\mathsf{RFN}(n)<\beta^1_0\,\mathsf{RFN}(n+1)$ となることも容易にわかるので，実際には $\{\sigma\in\Pi^1_2:\Pi^1_1\text{-}\mathsf{CA}_0\vdash\sigma\}$ のうち，特に ATR_0 より強い部分が $\beta^1_0\,\mathsf{RFN}(n+1)$ たちのなす階層により細分されていることもわかる．$\beta^1_0\,\mathsf{RFN}(n)$ と $\beta^1_0\,\mathsf{RFN}(n+1)$ の間をさらに細分化する公理系については [8] を参照されたい．

4 Galvin-Prikry の定理と $\beta^1_0\,\mathsf{RFN}(n)$

本節では，$\beta^1_0\,\mathsf{RFN}(n)$ と Galvin-Prikry の定理の自然な弱化を比較する．すなわち $\beta^1_0\,\mathsf{RFN}(n)$ たちが $\{\sigma\in\Pi^1_2:\Pi^1_1\text{-}\mathsf{CA}_0\vdash\sigma\}$ を公理化することを利用し，Galvin-Prikry の定理を用いた $\{\sigma\in\Pi^1_2:\Pi^1_1\text{-}\mathsf{CA}_0\vdash\sigma\}$ の特徴づけを与える．この特徴づけは，ある意味で Σ^1_0 クラスに対する Galvin-Prikry の定理が Π^1_1-CA_0 と RCA_0 上で同値になるというよく知られた結果 [9] の精密化になっている．なお，Galvin-Prikry の定理とハイパージャンプの関係は Marco and Marcone によって最近になって Weihrauch 次数の文脈で調べられており [3]，彼らの結果を利用することで本節の内容はさらに改良できると見込まれる．

4.1　二階算術における Galvin-Prikry の定理

本小節では Galvin-Prikry の定理を導入し，それが二階算術においてどのように形式化されるかを説明する．また，Galvin-Prikry の定理についての既存の逆数学的結果について説明する．ここで扱われている内容については，[9] および [7] の V.9., VI.6. も参照されたい．

まずは通常の数学における Galvin-Prikry の定理の主張を見よう．

記法 4.1. 無限集合 X に対して，$[X]^\omega$ で X の濃度 ω の部分集合全体を表す．また，可算無限集合 X に対して，$Y \subseteq_\infty X$ で Y が X の無限部分集合であることを表す．

定義 4.2. クラス $\mathcal{A} \subseteq [\omega]^\omega$ が Ramsey 性を持つとは，次を満たす $H \in [\omega]^\omega$ が存在することをいう．

$$\forall G \subseteq_\infty H(G \in \mathcal{A}) \vee \forall G \subseteq_\infty H(G \notin \mathcal{A})$$

定理 4.3 (Galvin-Prikry, [2])**.** 任意の $\mathbf{\Delta}^1_1$ クラス $\mathcal{A} \subseteq [\omega]^\omega$ は Ramsey 性を持つ．

以下，$\mathcal{A} \subseteq [\omega]^\omega$ に対する Ramsey 性が二階算術でどのように形式化されるのかを見よう．

定義 4.4. (RCA_0) 集合 f に対して，$f \in [\mathbb{N}]^\mathbb{N}$ を f が $\mathbb{N}$ 上の単調増加関数であることを表す Π^0_2 文とする．また，$\forall f \in [\mathbb{N}]^\mathbb{N}, \exists f \in [\mathbb{N}]^\mathbb{N}$ をそれぞれ $\forall X(X \in [\mathbb{N}]^\mathbb{N} \to \cdots), \exists X(X \in [\mathbb{N}]^\mathbb{N} \wedge \cdots)$ の略記とする．

定義 4.5. $\varphi(f, X)$ を論理式とする．φ が X において，h を証拠として Ramsey 性を持つことを表す論理式 $\mathrm{RP}_\varphi(h, X)$ を以下で定義する．

$$\mathrm{RP}_\varphi(h, X) \equiv (\forall g \in [\mathbb{N}]^\mathbb{N} \varphi(X, h \circ g)) \vee (\forall g \in [\mathbb{N}]^\mathbb{N} \neg\varphi(X, h \circ g)).$$

また，$\forall X \exists h \in [\mathbb{N}]^\mathbb{N} \mathrm{RP}_\varphi(h, X)$ が成り立つ時，φ は **Ramsey 性を持つ**という．

直観的には，$f \in [\mathbb{N}]^\mathbb{N}$ とその像 $\mathrm{rng}\, f$ を同一視することで f を $\mathbb{N}$ の無限部分集合と見做している．この意味で，$h \in [\mathbb{N}]^\mathbb{N}$ に対して $\{g \circ h : g \in [\mathbb{N}]^\mathbb{N}\}$ は $\mathrm{rng}\, h$ の無限部分集合全体を表すクラスだと思うことができる．また論理式 $\varphi(f, X)$ と集合 X により $[\mathbb{N}]^\mathbb{N}$ の部分クラス $\{f \in [\mathbb{N}]^\mathbb{N} : \varphi(f, X)\}$ を表している．

このようにして形式化された Ramsey 性について，次の同値性が成り立つことが知られている．

定理 4.6. RCA_0 上で以下は同値．

- Π^1_1-CA_0,
- 任意の Σ^1_0 論理式 $\varphi(f, X)$ は Ramsey 性を持つ (Σ^1_0 クラスに対する Ramsey の定理，Σ^1_0-Ram),
- 任意の Σ^0_2 論理式 $\varphi(f, X)$ は Ramsey 性を持つ (Σ^0_2-Ram)

なお，Δ^1_1-Ram 特徴づける公理系も分析されているが本稿では扱わない．詳細は [9] などを参照されたい．

4.2　一様含意と Galvin-Prikry の定理

本小節では一様含意の概念を導入し，一様含意の観点から定理 4.6 を精密化する．

定義 4.7. 二つの論理式 $\forall X \exists Y \varphi(X, Y)$ と $\forall X \exists Z \psi(X, Z)$ の間に**一様含意**が成立するとは，以下が成り立つことである．

$$\forall X(\exists Y \varphi(X, Y) \to \exists Z \psi(X, Z)).$$

定理 4.6 に述べた通り，Σ^0_n-Ram とハイパージャンプの存在は RCA_0 上で同値であるが，実際にはより強く次のような一様含意が成立している．

定理 4.8. $\varphi(f,X)$ を Σ^0_n 論理式とする．このとき，ACA_0 上で次が成り立つ．

$$\forall X(\exists Y(Y=\mathrm{HJ}^n(X))\rightarrow \exists h\mathrm{RP}_\varphi(X,h)).$$

Proof. [7, Lemma VI.6.2.] を参照． □

定理 4.9. 任意の $n\in\omega$ に対して，ある $m\in\omega$ があって以下を満たす Σ^0_m 論理式 $\varphi(f,X)$ が存在する．

$$\forall X(\exists h\mathrm{RP}_\varphi(h,X)\rightarrow \exists Y(Y=\mathrm{HJ}^n(X)).$$

以下では，定理 4.9 の証明の概略を述べる．

定義 4.10. (RCA_0) $T\subseteq\mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ を木とする．$f\in[\mathbb{N}]^{\mathbb{N}}$ が T を majorize するとは，$\exists g\in[T]\forall n(g(n)\leq f(n))$ が成り立つことをいう．

注意 4.11. f が T を majorize するという主張は一見 Σ^1_1 条件のように見える．しかし実際は $S=\{\sigma\in T:\forall n<|\sigma|(\sigma(n)\leq f(n))\}$ が無限パスを持てば良く，S は f によって分岐数が抑えられている．したがって有界 Kőnig の補題により ACA_0 上では[4] f が T を majorize するという条件は S が無限木であるという Π^0_1 条件で書ける．

以下，関数 f と $n\in\mathbb{N}$ に対して，関数 f_{+n} を $f_{+n}(x)=f(x+n)$ により定義する．これは [7] において $f^{(n)}$ と書かれているものである．また，$\theta(n,A)$ を $\mathrm{HJ}(A)$ を定義する Σ^1_1 論理式とし，Δ^0_0 論理式 R を，$\mathsf{RCA}_0\vdash\forall n,A(\theta(n,A)\leftrightarrow\exists f\in\mathbb{N}^{\mathbb{N}}\forall yR(n,f[y],A[y])$ となるものとする．このような R の存在は，Kleene の標準形定理 [7, II.2.7., V.1.4.] により保証される．

定義 4.12. (ACA_0) 各 $n\in\mathbb{N},A\subseteq\mathbb{N},f\in[\mathbb{N}]^{\mathbb{N}}$ に対して，木 $T(n,A)$ と集合 $F(f,A)$ をそれぞれ次のように定義する．

$$T(n,A)=\{\sigma\in\mathbb{N}^{<\mathbb{N}}:\forall y<|\sigma|R(n,\sigma[y],A[y])\},$$
$$F(f,A)=\{n:\exists p(f_{+p}\text{ majorizes }T(n,A))\}.$$

さらに，各 $i\in\omega$ に対して，$F^i(f,A)$ を次のように帰納的に定義する．

$$F^0(f,A)=A,$$
$$F^{i+1}(f,A)=F(f,F^i(f,A)).$$

定義 4.13. 論理式 $\Phi_*(f,A)$ を以下で定義する．

$$\Phi_*(f,A)\equiv\forall n<f(0)(f_{+2}\text{ majorizes }T(n,A)\rightarrow f_{+1}\text{ majorizes }T(n,A)).$$

さらに，各 $i\in\omega$ に対して，論理式 $\Phi_i(f,A)$ を以下で定義する．

$$\Phi_i(f,A)\equiv\bigwedge_{j<i}\Phi_*(f,F^j(f,A)).$$

各 f,A に対して $F(f,A)$ は f,A から算術的に定義される集合である．したがって，一般に $F^j(f,A)$ も算術的に定義される集合である．さらに Φ_* も算術的論理式であるため，$\Phi_i(f,A)$ は f,A についての算術的論理式である．

定理 4.14. ACA_0 で以下が証明できる．

$$\forall X(\exists h\mathrm{RP}_{\Phi_n}(h,X)\rightarrow F^n(h,X)=\mathrm{HJ}^n(X)).$$

したがって特に

$$\forall X(\exists h\mathrm{RP}_{\Phi_n}(h,X)\rightarrow\exists Y(Y=\mathrm{HJ}^n(X))).$$

[4] 実際は WKL_0 上で良い．

Proof. [8] の六節を参照せよ. □

以上より，Σ^0_n クラスに対する Ramsey の定理とハイパージャンプの反復の存在では相互に一様含意が成り立つことが示された．なお，この結果は [3] を用いてさらに精密化できると期待される．

予想 4.15. 任意の $n \in \omega$ に対して，ACA_0 上で以下が成り立つであろう．

$$\forall X(\exists Y(Y = \mathrm{HJ}^{n+1}(X)) \leftrightarrow \forall e \exists h \mathrm{RP}_{\sigma^0_n(e,\bullet,\bullet)}(h, X)).$$

ただし，σ^0_n は万能 Σ^0_n 論理式を指す．

4.3　一様含意と β^1_0 RFN(n)

最後に，一様含意と β^1_0 RFN(n) の関係を確認し，Σ^1_0-Ram の適当な変種によって $\{\sigma \in \Pi^1_2 : \Pi^1_1\text{-}\mathsf{CA}_0 \vdash \sigma\}$ が特徴づけられることを述べて本稿を終える．

定義 4.16. Π^1_3 論理式 $\sigma \equiv \forall X \exists Y \forall Z \theta(X, Y, Z)$ に対して，その**相対化** $\mathrm{rel}(\sigma)$ を

$$\mathrm{rel}(\sigma) \equiv \forall X \exists Y \forall Z \leq^{\mathrm{a}}_{\mathrm{T}} X \oplus Y \theta(X, Y, Z)$$

により定義する．

相対化は Towsner によって，グラフ理論における Menger の定理，BQO 理論における Nash–Williams の定理の上界を与える目的で導入された [10]．Towsner は Π^1_1-CA_0 と同値な非整礎木の最左パス存在原理について相対化を考察した．ここではより一般的な場合について相対化を扱う．

補題 4.17. $\sigma \equiv \forall X \exists Y \forall Z \varphi(X, Y, Z)$ と $\tau \equiv \forall X \exists U \forall V \psi(X, U, V)$ を Π^1_3 文とする．ACA_0 において，σ から τ への一様含意

$$\forall X(\exists Y \forall Z \varphi(X, Y, Z) \to \exists U \forall V \psi(X, U, V))$$

が成立するなら，ACA_0^+ において $\mathrm{rel}(\sigma) \to \mathrm{rel}(\psi)$ が成立する．

Proof. $\mathsf{ACA}_0^+ + \mathrm{rel}(\sigma)$ を仮定し，任意に A を取る．以下，$\exists U \forall V \leq^{\mathrm{a}}_{\mathrm{T}} U \oplus A \psi(A, U, V)$ が成り立つことを示す．

$\mathrm{rel}(\sigma)$ より，$\forall Z \leq^{\mathrm{a}}_{\mathrm{T}} A \oplus B \varphi(A, B, Z)$ となるように B を取る．ACA_0^+ により，コード化 ω モデル $\mathcal{M} = \{C : C \leq^{\mathrm{a}}_{\mathrm{T}} A \oplus B\}$ が存在する．このとき，$\mathcal{M}$ の定義から $\mathcal{M} \models \forall Z \varphi(A, B, Z)$ である．また $\mathcal{M}$ は ACA_0 のモデルとなるので，仮定から

$$\mathcal{M} \models \forall X(\exists Y \forall Z \varphi(X, Y, Z) \to \exists U \forall V \psi(X, U, V))$$

である．したがって $\mathcal{M} \models \exists U \forall V \psi(A, U, V)$ となる．このような $U \in \mathcal{M}$ を取ると，$\mathcal{M}$ の定義から $\forall V \leq^{\mathrm{a}}_{\mathrm{T}} A \oplus U \psi(A, U, V)$ となる． □

上記の議論を見ればわかるとおり，Π^1_3 文 $\sigma \equiv \forall X \exists Y \forall Z \theta(X, Y, Z)$ に対して，$\mathrm{rel}(\sigma)$ は σ の本物の証拠 Y の代わりに，コード化 ω モデル $\mathcal{M} = \{C : C \leq^{\mathrm{a}}_{\mathrm{T}} X \oplus Y\}$ に相対化された[5]証拠が存在することを主張している．したがって特に，β^1_0 RFN(n) がコード化 ω モデルへ相対化されたハイパージャンプの存在を主張していたことを思い出せば，以下の同値性は明らかである．

補題 4.18. 任意の $n \in \omega$ に対して，β^1_0 RFN(1) と $\mathrm{rel}(\forall X \exists Y(Y = \mathrm{HJ}^n(X)))$ は同値である．

[5] ここでの相対化は，コード化 ω モデルへの相対化 3.3 の意味である

定義 4.19. 論理式 $\varphi(f,X)$ に対して，$\mathrm{rel}(\forall X\exists h \mathrm{RP}_\varphi(h,X))$ が成り立つ時，φ は**擬 Ramsey 性を持つ**，という．また，論理式のクラス Γ に対して，$\mathrm{rel}(\Gamma\text{-}\mathsf{Ram})$ で任意の $\varphi\in\Gamma$ は擬 Ramsey 性を持つ，という主張だとする．

すでに述べた通り，ハイパージャンプの反復と Σ^0_n-Ram の間には両方向で一様含意が成り立つのであった．したがって補題 4.17 より以下を得る．

定理 4.20. $\mathsf{ACA}_0^+ + \mathrm{rel}(\Sigma^1_0\text{-}\mathsf{Ram})$ と $\mathsf{ACA}_0^+ + \{\beta^1_0\,\mathsf{RFN}(n) : n\in\omega\}$ は理論として等価である．したがって，$\{\sigma\in\Pi^1_2 : \Pi^1_1\text{-}\mathsf{CA}_0 \vdash \sigma\}$ は $\mathrm{rel}(\Sigma^1_0\text{-}\mathsf{Ram})$ によって特徴づけられる．

擬 Ramsey 性は通常の Ramsey 性に相対化を施した結果であるが，$\beta^1_0\,\mathsf{RFN}$ がハイパージャンプの存在の自然な Π^1_2 近似であったのと同様に，擬 Ramsey 性自体が Ramsey 性の近似として自然な主張であることを注意しておく．すなわち，rel 作用素の具体例として $\beta^1_0\,\mathsf{RFN}(n)$ や擬 Ramsey 性があるというよりも，むしろ $\beta^1_0\,\mathsf{RFN}(n)$ や擬 Ramsey 性といった Π^1_3 文の自然な Π^1_2 近似を扱うための一般論として rel 作用素があると見ることもできる．

謝辞

アブストラクトにも述べた通り，本稿は横山啓太氏との共著論文 [8] の一部内容を解説したものです．また，本稿を執筆するにあたってコメントをくださった中田哲氏に感謝いたします．

References

[1] https://rmzoo.math.uconn.edu/diagrams/.

[2] Fred Galvin and Karel Prikry. Borel sets and Ramsey's theorem. *J. Symb. Log.*, 38:193–198, 1973.

[3] Gian Marco and Albert Marcone. The Galvin-Prikry theorem in the Weihrauch lattice. *in preparation.*

[4] Alberto Marcone. On the logical strength of Nash-Williams' theorem on transfinite sequences. In *Logic: from foundations to applications: European logic colloquium*, pages 327–351, 1996.

[5] Leonardo Pacheco and Keita Yokoyama. Determinacy and reflection principles in second-order arithmetic. *arXiv preprint arXiv:2209.04082*, 2022.

[6] Paul Shafer. Menger's theorem in $\Pi^1_1-\mathrm{CA}_0$. *Arch. Math. Logic*, 51(3-4):407–423, 2012.

[7] Stephen G. Simpson. *Subsystems of second order arithmetic.* Perspectives in Logic. Cambridge University Press, Cambridge; Association for Symbolic Logic, Poughkeepsie, NY, second edition, 2009.

[8] Yudai Suzuki and Keita Yokoyama. On the structure of $\mathsf{\Pi}^1_2$ consequences of $\mathsf{\Pi}^1_1$-CA_0. *in preparation.*

[9] Kazuyuki Tanaka. The Galvin-Prikry theorem and set existence axioms. *Annals of Pure and Applied Logic*, 42(1):81–104, 1989.

[10] Henry Towsner. Partial impredicativity in reverse mathematics. *J. Symbolic Logic*, 78(2):459–488, 2013.