

斜め円柱上の付着線に沿う流れの多重不安定性

航技研 伊藤信毅 (Nobutake Itoh)

1. はじめに

後退翼に沿う境界層は外側の流線が曲率を持つことおよび境界層内の流れが外部流に直角な方向の横流れ速度成分を持つことによって特徴付けられ、それぞれの特徴に対応して流線曲率不安定と横流れ不安定が発生する。特に前縁付近の流れが不安定になるとその下流の境界層はすぐに乱流に遷移するから、前縁近傍の不安定特性を知ることは後退翼の遷移過程を解明する上で非常に重要である。そこで、斜め円柱上の付着線流を例に取り、微小攪乱を支配する近似的な常微分方程式の固有値問題を解くことによって、翼前縁付近の流れの安定特性を調べる。主として臨界レイノルズ数の前縁からの距離に対する変化に注目し、横流れ不安定と流線曲率不安定の発生の違いを明らかにする。

2. 固有値問題

一様流 Q_∞ 中に後退角 Λ でおかれた半径 r_0 の無限に長い円柱まわりの流れを考える。円柱中心軸上に原点を持つ円柱座標を (r, θ, y^*) 、時間を t^* 、速度成分を (v_r, v_θ, v_y) 、圧力を p^* 、密度を ρ 、動粘性係数を ν とする。いま、円柱表面に沿うポテンシャル流の前縁に直角な方向 ($-\theta$ 方向) と前縁に沿う方向 ($-y^*$ 方向) の速度成分を U_E と V_E で表わすとき、 U_E は $\sin(\pi - \theta)$ に比例し、 V_E は一定値を取る。本論文では前縁のごく近傍に注目するので、 U_E を円柱表面に沿う前縁からの距離に関するブラジウス級数に展開し、その初項だけを取る。このとき、境界層厚さは定数 $\delta = \sqrt{\nu r_0 / (2Q_\infty \cos \Lambda)}$ で表わされる。この境界層厚さと外部流の局所的な速度 $Q_E = \sqrt{U_E^2 + V_E^2}$ を用いて、全ての量をつぎのように無次元化する。

$$\frac{r_0(\pi - \theta)}{\delta} = x, \quad -\frac{y^*}{\delta} = y, \quad \frac{r - r_0}{\delta} = \zeta, \quad \frac{Q_\infty t^*}{\delta} = t,$$

$$\frac{v_\theta}{Q_E} = -U - u, \quad \frac{v_y}{Q_E} = -V - v, \quad \frac{v_r}{Q_E} = \frac{1}{R} W + w, \quad \frac{p^*}{\rho Q_E^2} = P + p. \quad (2.1)$$

ここで、 $R = Q_E \delta / \nu$ は局所レイノルズ数、 $(U, V, R^{-1}W, P)$ は無次元化された基本流、 (u, v, w, p) はそれに重ねられた微小な攪乱である。

基本流の速度分布は二次元淀み点流れの相似解を用いてつ

ぎのように表わされる。

$$U = \frac{1}{\sqrt{1+\gamma^2}} F'(\zeta), \quad V = \frac{\gamma}{\sqrt{1+\gamma^2}} G(\zeta), \quad W = -F(\zeta). \quad (2.2)$$

ここで、 $\gamma = V_E / U_E$ 、 $F(\zeta)$ と $G(\zeta)$ はつぎの常微分方程式の解である。

$$F''' + FF'' + 1 - (F')^2 = 0, \quad F(0) = F'(0) = 0, \quad F'(\infty) = 1, \\ G'' + FG' = 0, \quad G(0) = 0, \quad G(\infty) = 1. \quad (2.3)$$

この流れは Falkner-Skan-Cooke 速度分布属において圧力勾配に関係するパラメータ m を 1 に選んだ場合に相当する。一方、攪乱はつぎのような波動型に仮定される。

$$u = u_1(\zeta) e^{i\Theta}, \quad \Theta = \int^x \alpha(x) dx + \beta y - \omega t. \quad (2.4)$$

ただし、 v , w , p に対しても同じ表示を与えるものとする。

α と β は実数の波数、 ω は複素数で、実部が振動数、虚部が時間的増幅率を表わす。

微小な攪乱を支配する方程式は、(2.1) を円柱座標で書かれた連続の式とナビエ・ストークス方程式に代入し、攪乱に関する線形項を残すことによって得られる。本論文では、厳密な偏微分攪乱方程式の代りに、その主要項だけを残すことによって簡単化されたつぎの常微分型モデル方程式を用いる。

$$[(\alpha^2 + \beta^2) \{ \frac{1}{R} (D^2 - \alpha^2 - \beta^2) + i(\omega - \alpha U - \beta V) \} - \frac{W}{R} D] u_1,$$

$$\begin{aligned}
& - [i \alpha \{ \frac{1}{R} (D^2 - \alpha^2 - \beta^2) + i (\omega - \alpha U - \beta V) - \frac{W}{R} D \} D \\
& \quad + \beta (\beta U' - \alpha V')] w_1 = 0, \\
& [\{ \frac{1}{R} (D^2 - \alpha^2 - \beta^2) + i (\omega - \alpha U - \beta V) - \frac{W}{R} D \} (D^2 - \alpha^2 - \beta^2) \\
& \quad + i (\alpha U'' + \beta V'')] w_1 + \frac{2 i \alpha \sqrt{1 + \gamma^2}}{R} \{ U D + U' \} u_1 = 0. \quad (2.5)
\end{aligned}$$

上式において、非平行効果を表わす $R^{-1}W$ 項と第2式の u_1 項を無視すれば、オル・ゾンマーフェルト方程式に帰着する。非粘性変曲点型の横流れ不安定と粘性型のトルミーン・シュリヒティング不安定は基本的にはこの方程式で記述できることが知られている。これに対して、第2式中の u_1 の係数は、外部流の流線の曲率に関係し、流線曲率不安定の原因になる。この不安定は遠心力に基づくものであるため、壁面曲率によるゲルトラー不安定と類似の性質を持ち、臨界点の計算には非平行性の効果を取り入れる必要がある。モデル方程式中に $R^{-1}W$ 項を含めたのはそのためであり、これによって臨界レイノルズ数の計算が容易になる。結局、ここで用いられる攪乱方程式は、横流れ不安定、粘性不安定、流線曲率不安定のいずれにも適用できる。一方、境界条件は方程式の外部解との接続を考慮することによって、つぎのように導かれる。

$$u = w = w' = 0 \quad \text{at } \zeta = 0,$$

$$u' + \rho_1 u - \frac{i\alpha}{\rho_2^2} (w'' + \rho_1 w') = 0,$$

$$w'' + (\rho_1 + \rho_2) w' + \rho_1 \rho_2 w - \frac{2i\alpha \rho_1 \sqrt{1+\gamma^2}}{(2\rho_1 + W_0)(\rho_1 + \rho_2)} u = 0$$

$$w''' + (2\rho_1 + \rho_2) w'' + \rho_1 (\rho_1 + 2\rho_2) w' + \rho_1^2 \rho_2 w = 0,$$

$$\text{at } \zeta = \zeta_*, \quad (2.6)$$

但、 $\rho_1 = -W_0/2 + (W_0/4 + \alpha^2 + \beta^2 - i\omega R + i\alpha RU_0 + i\beta RV_0)^{1/2}$,

$\rho_2 = (\alpha^2 + \beta^2)^{1/2}$ 、添字。は境界層外縁における値を表わす。

この境界条件は近似的な方法で得られたものであるが、境界層の外縁位置 ζ_* を十分大きく取れば実用上必要な精度を達成することができる。ここでは $\zeta_* = 10$ が採用された。

上に与えた近似攪乱方程式と境界条件はすべて同次型であるから固有値問題を形成し、複素振動数 ω を波数 α と β 、レイノルズ数 R および基本流に含まれるパラメター γ の関数として定める。

$$\omega = \omega(\alpha, \beta, R; \gamma). \quad (2.7)$$

与えられた γ に対して、攪乱が増幅も減衰もしない中立安定の条件 $\omega_i(\alpha, \beta, R) = 0$ は α 、 β および R を座標軸とする三次元空間に一つの曲面を定義する。この曲面上でレイノルズ数が最小値を取る点が臨界点 (α_*, β_*, R_*) で、そのときの値は連立方程式 $\text{Im}[\omega] = \text{Im}[\omega_\alpha] = \text{Im}[\omega_\beta] = 0$ の解で与えられる。

4. 計算結果と考察

付着線流の速度分布は Falkner-Skan-Cooke 流において圧力勾配を表わすパラメータ m を 1 に置いた場合に相当し、その臨界レイノルズ数 R_c は外部流線の傾き γ だけの関数として定まる。斜め円柱に沿う流れの場合には、 $\gamma = V_E / U_E$ の x に対する変化は円柱の後退角に応じて簡単に算定されるから、各 Λ に対する $R_c(x)$ 曲線を図 1 のように描くことができる。ここで、円柱表面に沿う座標 x は前縁から後縁までの表面長で無次元化されている。前縁のごく近傍を除いて流線曲率不安定が横流れ不安定より低い臨界レイノルズ数を与え、その最低値は後退角によらず一定である。臨界曲線は、 R_c が最低値を取る位置 x_{min} から前縁に向う領域では急激に上昇し、 x_{min} か

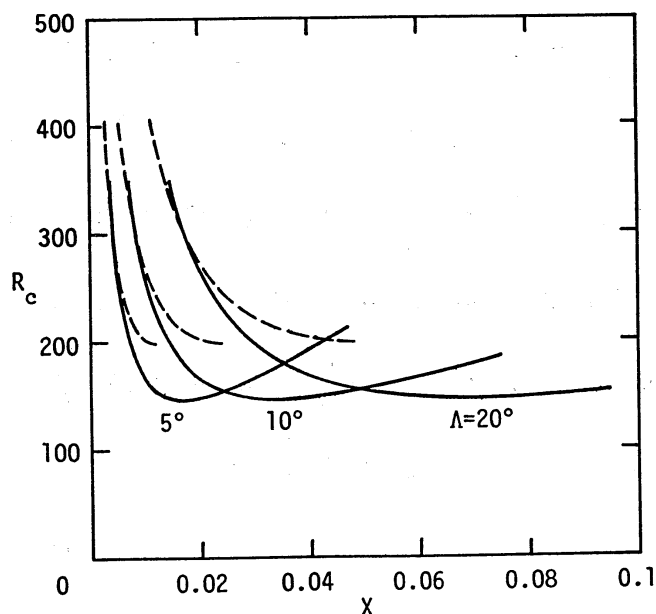


図1. 付着線流の臨界曲線
(実線：流線曲率不安定；
破線：横流れ不安定)

ら下流方向には比較的緩やかに上昇する。

円柱の後退角 Λ を小さくしてゆくと、 R_c の最低位置 X_{min} は前縁に近づき、右分枝と左分枝が接近する。 Λ が非常に小さい値を持つ場合には、前縁のごく近傍の狭い領域に臨界曲線が押し込まれるが、最低の臨界レイノルズ数は後退角が大きい場合と同じ値を持つ。小さい後退角では、外部流線が前縁のごく近傍でスパン方向から主流の方向に向きを変えるので、その狭い領域の中で臨界レイノルズ数が最低値を取るのである。二次元淀み点流れは、線形理論からは安定であることが知られているが¹⁾、実験において流れがわずかに三次元化している場合には、前縁近傍の三次元流の流線曲率不安定によって縦渦攪乱の発生する可能性があるものと推論される。

後退角が通常の大きさを持つ場合の下流境界層の臨界曲線は、筆者の研究²⁾で計算されており、前縁に近いところでは臨界値が流線曲率不安定によって決定されることも示されている。一般境界層に対するこの計算法では、流線に沿う座標系が採用され、壁面と外部流線の曲率項が取り入れられている。さらに、基本流の速度分布はFalkner-Skan-Cooke流で表わされているので、臨界レイノルズ数は圧力パラメータ m を含み、この値は前縁に近づくにつれて1に接近する。図2には $\Lambda = 30^\circ$ の場合について、本研究で得られた付着線流の臨

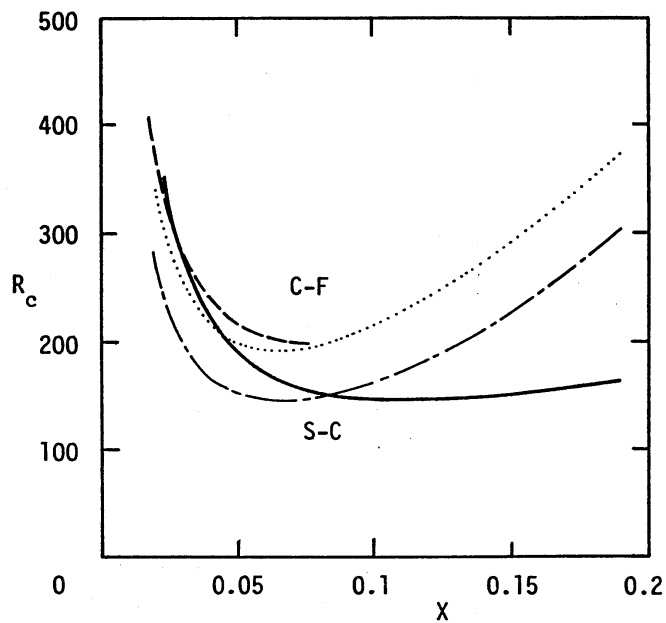


図2. 下流境界層の臨界曲線との比較（実線と破線：付着線流；鎖線と点線：下流境界層）

界曲線と前出の論文で示されている境界層の臨界曲線が比較されている。臨界曲線が前縁の近傍で最低値を取るという、最も重要な特徴が同じように表現されていることから、両者の定性的な一致は良好と見てよい。

最後に、前縁のごく近傍における臨界曲線の振舞いを見ておく。図1に見られるように、前縁に近づくにつれて二つの臨界曲線は上昇するが、横流れ不安定の臨界曲線は上昇が鈍り、流線曲率の臨界曲線と交差した後、最低の臨界値を与えるようになる。図3には前縁近傍領域を拡大して横流れ臨界曲線の変化を示してある。横座標には x の代りに γ^{-1} を用いているため、臨界値は後退角に依存しないもので、 γ^{-1} が0に近づくにつれて、付着線上に対して Hallら³⁾が与えた臨界

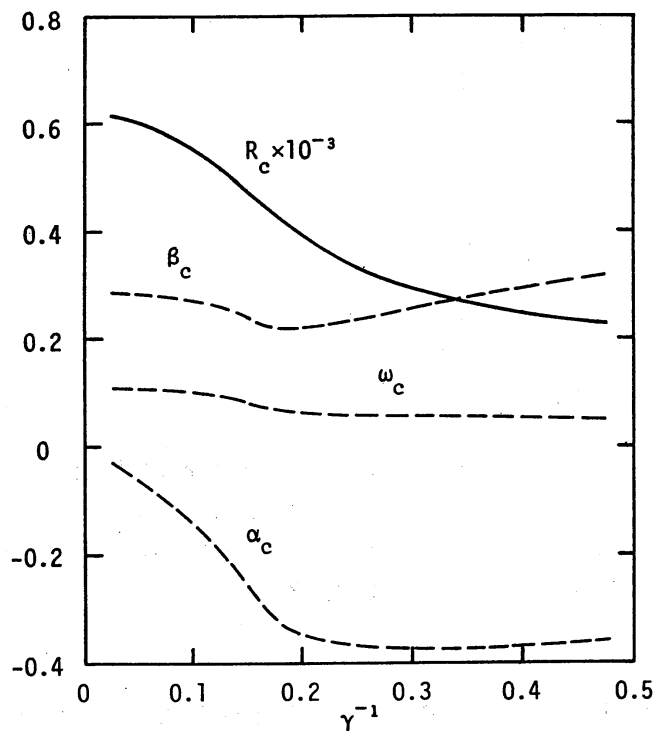


図3. 前縁近傍の横流れ臨界曲線 (γ^{-1} は x に比例する)

点に収束する。すなわち、付着線のごく近傍では横流れ不安定が最低の臨界値を与えるが、そのすぐ下流では流線曲率不安定が支配的になるものと結論される。

5. むすび

付着線流れでは、臨界レイノルズ数が外部流線の付着線に対する傾き角 γ だけの関数として定まる。与えられた後退角の円柱に対しては、簡単な境界層計算によって γ を前縁からの無次元距離 X の関数として表わすことができ、 R_c の X に対する変化が図示される。この曲線は X のある値で最小値を持ち、その両側で上昇する。計算結果からは横流れ不安定より

流線曲率不安定の方が低い臨界レイノルズ数を与えることが示され、付着線流れでは流線曲率不安定が支配的になるものと推測される。円柱の後退角を小さくしてゆくと、臨界レイノルズ数が最小値を取る位置 X_{min} は前縁に近づき、 $R_c(X)$ の左右分枝間の距離が狭くなるが、 R_c の最小値は変化しない。この性質から、三次元付着線流れの安定性は、後退角を 0 にした極限においても、二次元淀み点流れの安定特性に一致しないことが結論される。一方、十分大きい後退角を持つ流れでは、流線曲率不安定の臨界曲線は、前縁近傍で最小値を取ったのち、 X と共に緩やかに上昇し、下流の境界層の流線曲率不安定に対する臨界曲線につながる。

参 考 文 献

- 1) Wilson, S.D.R. and Gladwell, I. (1978) J. Fluid Mech. 84, 517-527.
- 2) Itoh, N. (1995) Laminar-Turbulent Transition, ed. R. Kobayashi, pp.323-330, Springer-Verlag.
- 3) Hall, P., Malik, M.R. and Poll, D.I.A. (1984) Proc. R. Soc. Lond. A 395, 229-245.