

置換類群の torsion part

阪市大 宮田武彦 (Takehiko Miyata)

§0 序論

π は有限群とする. 有限 π -集合 S (作用は左から) のアーベル化 $\mathbb{Z}S$ ($\mathbb{Z}[S]$ と表記することもある) に同型な $\mathbb{Z}\pi$ -加群を 置換 $\mathbb{Z}\pi$ -加群 と呼ぶ. M と N は置換加群の直和因子とすると,

M と N は 同値 $\Leftrightarrow M \oplus \mathbb{Z}S \cong N \oplus \mathbb{Z}S$ となる π -集合 S, T が存在.

と定義する.

$T^g(\pi) = \{ \text{置換加群の直和因子の同型類} \} / (\text{上の同値関係})$ とおき, 直和で和を導入すると, $T^g(\pi)$ は有限生成アーベル群になる. これを Dress に従って π の置換類群と呼ぼう ([DR. 2]), 有限生成になることは [S-E] 定理 6.17 (p. 118) を参照. $T^g(\pi)$ の階数, つまり $\dim_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} T^g(\pi))$ は Dress により計算されている ([DR. 2] 定理 3.1, p. 10).

この小論では $T^g(\pi)$ の torsion part $t(\pi)$ を考察する.

まず, $t(\pi)$ は明らかな部分群を持つことを説明しよう. π の

類群 (locally free class group) $cl(\mathbb{Z}\pi)$ から $T^g(\pi)$ へ自然な準同型があり, その核 $C^g(\mathbb{Z}\pi)$ は

$$C^g(\mathbb{Z}\pi) = \{ [\alpha] - [\mathbb{Z}\pi] \in cl(\mathbb{Z}\pi) \mid \alpha \oplus \mathbb{Z}\pi \cong \mathbb{Z}\pi \oplus \mathbb{Z}T \text{ と なる } \pi\text{-集合 } S, T \text{ が存在} \}$$

と述べている. $\mathbb{Q}\pi$ の $\mathbb{Z}\pi$ を含む極大整域の一つを $\mathcal{M}$ とすると,

$$D(\mathbb{Z}\pi) = \ker (cl(\mathbb{Z}\pi) \rightarrow cl(\mathcal{M}))$$

を π の the kernel group と呼ぶ. $D(\mathbb{Z}\pi)$ は極大整域 $\mathcal{M}$ への取り方によらずに定まっている. Oliver は

$$D(\mathbb{Z}\pi) = \{ [\alpha] - [\mathbb{Z}\pi] \mid \alpha \oplus \mathbb{Z}S \cong \mathbb{Z}\pi \oplus \mathbb{Z}S \text{ と なる } \pi\text{-集合 } S \text{ が存在} \}$$

従って $C^g(\mathbb{Z}\pi) \cap D(\mathbb{Z}\pi)$ を示し, 種々の π に対して巧妙な方法で $C^g(\mathbb{Z}\pi)/D(\mathbb{Z}\pi)$ を計算している ([OL1, 2]).

さて, $cl(\mathbb{Z}\pi)/C^g(\mathbb{Z}\pi) \hookrightarrow t(\pi)$ から, 左の群は $t(\pi)$ の部分群とみなし, この二つの群を比較することを考える.

大域的な結果を出すには, 局所的な結果から出発するのが常套手段だから, $T^g(\pi)$ に対応する局所的な対象を作る. R は可換環, S は (有限) π 集合とする. RS と同型な $R\pi$ 加群を R 上の 置換加群 と呼び, R 上の置換加群の直和因子に対して $T^g(\pi)$ の類似物を作り, これを $T^g(\pi, R)$ と書き, *torsion part* は $t(\pi, R)$ と書くことにする. R が $\mathbb{Z}$ に整域のとき, $R\pi$ -lattices (有限

生成 $R\pi$ -加群で R -加群としては torsion を持たないもの) の同型類に直和と和を入れると半群ができる. この半群のグロタディエック群を π の R 上の表現群と言ひ $K(\pi, R)$ と書く.

π のバーンサイド環 $A(\pi)$ から $K(\pi, R)$ へ自然な写像があるが, その像を $A(\pi, R)$ と書くことにする.

p を素数とすると, p での $\mathbb{Z}$ の局所化を $\mathbb{Z}_p$, 完備化を $\hat{\mathbb{Z}}_p$ と書くことにする.

Dress は [DR2] の §2 で, この研究の出発点には $\tau = 2, 3$ の結果を本質的に証明している. 自然な準同型

$$\varphi: T^g(\pi) \longrightarrow \prod_{p|\pi|} T^g(\pi, \mathbb{Z}_p)$$

を考える. $\varphi \in t(\pi)$ に制限すると, $\varphi|_{t(\pi)}$ の像は $\prod_{p|\pi|} t(\pi, \mathbb{Z}_p)$ に含まれる. また, φ の像は決定できることが [DR2] 定理 2.1 の証明 (p.3) で示される. 各素数 p に対し自然な準同型

$$\psi_p: T^g(\pi, \mathbb{Z}_p) \longrightarrow K(\pi, \mathbb{Q}) / A(\pi, \mathbb{Q})$$

を考えると,

命題 D.1. $(M_p) \in \prod_{p|\pi|} T^g(\pi, \mathbb{Z}_p)$ とする.

$$(M_p) \in \text{Im } \varphi \iff \forall p, q \mid \pi \text{ に対して } \psi_p(M_p) = \psi_q(M_q).$$

$K(\pi, \mathbb{Q}) / A(\pi, \mathbb{Q})$ は有限群 (Artin の帰納定理), また各 $p \mid \pi$ に対して $T^g(\pi, \mathbb{Z}_p)$ は有限生成であるから, 命題 1 によると $\text{Coker } \varphi$ は有限アーベル群である. この命題は例を作るのに便利である.

[DR2] の §2 の重要な結果は補題 2.4 と言うよりは、その証明方法である。2 の方法は次の二つの命題に分けられる。

命題 0.2. $\ker(\varphi|_{t(\pi)}) = \ker \varphi$. または、

$$\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} T^g(\pi, \mathbb{Z}) \cong \prod_{p|\pi|} \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} T^g(\pi, \mathbb{Z}_p) \quad ([DR2] \text{ 定理 } 2.1)$$

命題 0.3. $|\pi| \cdot \ker \varphi \subset \mathcal{C}l(\mathbb{Z}\pi)/\mathcal{C}^g(\mathbb{Z}\pi)$.

この命題は、[DR2] の §2 で奇妙にも見落されている補題を補うと、 $|\pi| \cdot t(\pi) \subset \mathcal{C}l(\mathbb{Z}\pi)/\mathcal{C}^g(\mathbb{Z}\pi)$ は 3 定理に拡張できる。π が巡回群、または p-群の場合は $t(\pi) = \mathcal{C}l(\mathbb{Z}\pi)/\mathcal{C}^g(\mathbb{Z}\pi)$ であることが簡単に示せる。まさに、これらの場合は $T^g(\pi) = t(\pi)$ であることも証明できる。

以下各節の内容を述べよう。

§1 では安定同値、局所同型なる概念を説明し、この論文全般で必要は技術を用意する。合わせて、“見落された補題” (補題 1.5) を述べ、命題 0.3 の拡張を証明する。

§2 では補題 1.6 が証明される。この節は、たゞ技術的である。

§3 では、π が巾零群であり of split type なる (例えば π がアーベル群の場合はこの条件を満たしている)、 $t(\pi) = \mathcal{C}l(\mathbb{Z}\pi)/\mathcal{D}(\mathbb{Z}\pi)$ であることが示される。

§4. π が特別に metacyclic 群の場合は $t(\pi) = \mathcal{C}l(\mathbb{Z}\pi)/\mathcal{D}(\mathbb{Z}\pi)$ になっていることを示す。

§5では, $t(\pi) \neq \text{cl}(\mathbb{Z}\pi)/\text{cl}(\mathbb{Z}\pi)$ である例を2種示す.

§1. 局所同型と安定同型.

$\mathbb{Z}\pi$ -lattices M, N が 局所同型 であるとは次の同値な条件が成り立つことである.

- (i) すべての素数 p に対して $\mathbb{Z}_p \otimes_{\mathbb{Z}} M \cong \mathbb{Z}_p \otimes_{\mathbb{Z}} N$
- (ii) $\mathbb{Z}_p \otimes_{\mathbb{Z}} M \cong \mathbb{Z}_p \otimes_{\mathbb{Z}} N, \quad \forall p \mid |\pi|$
- (iii) $\hat{\mathbb{Z}}_p \otimes_{\mathbb{Z}} M \cong \hat{\mathbb{Z}}_p \otimes_{\mathbb{Z}} N, \quad \forall p \mid |\pi|$
- (iv) $M \oplus \Omega \cong N \oplus \mathbb{Z}\pi$ を満たす射影イテアル Ω が存在.
- (v) M, N は $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} K(\pi, \mathbb{Z})$ では同じ元である.
- (vi) $M^m \cong N^m$ となる整数 m が存在する.

この定義に関して, ②, ③の注意が必要である.

- (1) $\mathbb{Z}_p\pi$ -lattices M, N に対して

$$M \cong N \iff \hat{\mathbb{Z}}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} M \cong \hat{\mathbb{Z}}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} N$$

(2) $\hat{\mathbb{Z}}_p\pi$ -加群 (有限生成) に対しては Krull-Schmidt の定理が成り立つ. このことから, (i) $\iff$ (v) が言える.

(3) 射影 $\mathbb{Z}\pi$ -加群 P は局所自由である. また $\forall S$, 任意の素数 p に対して $\mathbb{Z}_p \otimes_{\mathbb{Z}} P \cong (\mathbb{Z}_p\pi)^n$ となる整数 $n > 0$ が存在する (Swan).

(4) (i) $\iff$ (iv) $\iff$ (vi) は本質的には Roiter の $[R]$, $[S-E]$.

M と N が局所同型のとす $M \sim N$ と書くことにする.

$\mathbb{Z}\pi$ -lattices M, N に対して $M \oplus L \cong N \oplus L$ とする $\mathbb{Z}\pi$ -加群 L が存在するとす, これは 安定同型 であるという. M と N とが安定同型であれば Kynell-Schmidt の定理により M と N とは局所同型である. しかし, 逆は必ずしも成り立たない. 安定同型に関しては次の Oliver の結果 ([OL1]) の結果は基本的である.

M と N とは安定同型 $\iff M \oplus \mathbb{Z}S \cong N \oplus \mathbb{Z}S$, $S: \pi$ 集合.
この結果によれば, 自然な準同型 $T^0(\pi) \longrightarrow K(\pi, \mathbb{Z})/A(\pi, \mathbb{Z})$ は単射であることが分る. $K(\pi, \mathbb{Z})/A(\pi, \mathbb{Z})$ の torsion part は $t(\pi)$ であることは簡単に判る.

$$\text{Res}_H^\pi : A(\pi) \longrightarrow A(H)$$

は H への制限写像とする.

有限群 π は p -シロ一部分群 π_p が正規部分群であり, π/π_p が巡回群のとす 法 p で巡回群 と呼ばれる. 一般の有限群 π に対し,

$$\mathcal{A}_p = \mathcal{A}_p(\pi) = \{ H \leq \pi / H \text{ は法 } p \text{ で巡回群} \}$$

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}(\pi) = \bigcup_{p \mid |\pi|} \mathcal{A}_p$$

とおく. 今後は $\mathcal{A}, \mathcal{A}_p$ はこの意味での $\mathcal{A}$ 使用することにする.

$\mathbb{Z}\pi$ -加群 M に対し M/H は M の G の作用の H への制限とする. π -集合 S に対し $\mathbb{Z}[S]/_H = \mathbb{Z}[S/H]$ は置換 $\mathbb{Z}H$ -加群である.

命題 1.1 ([DR3], §9) π は法 p で巡回群, S, T は π 集合とする.

$$\mathbb{Z}_p S \cong \mathbb{Z}_p T \iff S \cong T.$$

特に $\mathbb{Z}_p S \cong \mathbb{Z}_p T \iff \mathbb{Z}S$ と $\mathbb{Z}T$ は局所同型 を意味する.

この命題と Mackey functor の vertex の理論とを使うと,

命題 1.2 ([DR3], §9) π は任意の有限群, S, T は π 集合とする.

$$\mathbb{Z}_p S \cong \mathbb{Z}_p T \iff \text{任意の } H \in \mathcal{A}_p \text{ に対して } S|_H \cong T|_H.$$

が得られる.

$$\Phi_p = \Phi_p(\pi) = \bigcap_{H \in \mathcal{A}_p} \ker(\text{Res}_H^\pi)$$

$$\Phi = \Phi(\pi) = \bigcap_{p \mid |\pi|} \ker(\text{Res}_H^\pi)$$

と置く. これはバーンサイド環 $A(\pi)$ のイデアルである. 命

題 1.2 は言い替えると

定理 1.3 ([DR3] §9) S, T は π 集合とする.

$$\mathbb{Z}S \text{ と } \mathbb{Z}T \text{ は局所同型} \iff [S] - [T] \in \Phi(\pi)$$

$\mathbb{Z}S$ と $\mathbb{Z}T$ はいつ同型になるかという問題については [OL1], [OL2]

を参照. また, 任意の π -集合 S, T について,

$$\mathbb{Z}S \text{ と } \mathbb{Z}T \text{ は局所同型} \iff \mathbb{Z}S \text{ と } \mathbb{Z}T \text{ は安定同型}$$

(この条件は $A(\pi, \mathbb{Z}) \rightarrow K(\pi, \mathbb{Z})$ が単射であることと同値である) が成り立つ必要十分条件は $C^0(\mathbb{Z}\pi) = D(\mathbb{Z}\pi)$ である

$$\text{ことは完全列 } 0 \rightarrow C^0(\mathbb{Z}\pi) / D(\mathbb{Z}\pi) \rightarrow A(\pi, \mathbb{Z}) \rightarrow K(\pi, \mathbb{Z})$$

から分る. この注意と命題 1.1 とから π が法 p で巡回群のとき

は $C^f(\mathbb{Z}\pi) = D(\mathbb{Z}\pi)$ は成り立っている。

補題 1.4 ([DR2], 補題 2.7) π は有限群, $\mathcal{B}$ は π の部分群の族で条件

「 H, K は π の部分群で $gHg^{-1} \subset K$ とする $g \in \pi$ が存在するとする。
 $K \in \mathcal{B} \implies H \in \mathcal{B}$ 」

を満たす。 $\chi: \mathcal{B} \longrightarrow \mathbb{Z}$ は任意の $g \in \pi$, $K \in \mathcal{B}$ に対し $\chi(gKg^{-1}) = \chi(K)$ が成り立つ写像とする。このとき

$$(i) \quad |\pi| \cdot \chi(K) + |S^K| = |T^K|, \quad \forall K \in \mathcal{B}$$

$$(ii) \quad (S \cup T)^H = \emptyset, \quad \forall H \notin \mathcal{B}$$

を満たす π 集合 S, T が存在する。

ここで $|S^H|$ は H で固定される S の元の個数,

証明は [T, D] 命題 1.2.3, p3 (Dress の結果) を利用すると直ちに得られる。

この補題は簡単なものであるが, Artin の帰納定理等を含む重要な結果である。

$\mathcal{B} = \mathcal{A}_p$, $\chi(H) = 1$, $H \in \mathcal{A}_p$ の場合に補題 1.4 を適用する。命題 1.2 を考慮に入れると

$$(i) \quad \mathbb{Z}_p^{|\pi|} \oplus \bigoplus'_{H \in \mathcal{A}_p} \mathbb{Z}_p[\frac{\pi}{H}]^{m(H)} \cong \bigoplus'_{H \in \mathcal{A}_p} \mathbb{Z}_p[\frac{\pi}{H}]^{n(H)}, \quad m(H), n(H) \geq 0$$

($\bigoplus'$ は共役類毎に直和を取ることをあらわす)

は同型が存在することが分る。

R は可換環, M は有限生成 $\mathbb{Z}\pi$ -加群とする. 同型

$$(2) \quad R\pi \otimes_{RH} (M|_H) \cong R[\pi_H] \otimes_R M$$

は良く知られている.

定理 1.5. ([DR1]) M, N は有限生成 $\mathbb{Z}\pi$ -加群とする.

M と N とは局所同型 $\iff \forall H \in \mathcal{A}_p$ に対して $M|_H \cong N|_H$.

補題 1.6 π は法 p で巡回群とする. 単射 $A(\pi, \mathbb{Z}_p) \rightarrow K(\pi, \mathbb{Z}_p)$

(命題 1.1 に従う) の cokernel は有限位数の元をもつ.

言い替えると, M, N は $\mathbb{Z}_p\pi$ -lattices, S, T は π -集合とする,

$$M^n \oplus \mathbb{Z}_p S \cong N^n \oplus \mathbb{Z}_p T \quad n \geq 1$$

が成り立てば,

$$M \oplus \mathbb{Z}_p S' \cong N \oplus \mathbb{Z}_p T'$$

を満たす π -集合 S', T' が存在する.

命題 1.1 を局所同型の定義 (iv) を利用すると, この補題から直ちに, π が法 p で巡回群ならば $t(\pi) = \frac{Cl(\mathbb{Z}\pi)}{D(\mathbb{Z}\pi)}$ が分

る. π は位数が 21 である非可換群とすると, $T^g(\pi)$ の rank は 1

であることが知られている ([DR2]). 従って, この場合は $T^g(\pi) \cong \mathbb{Z}$ となる.

この補題を利用して, 次の定理を示そう.

定理 1.7. 任意の有限群に対して

$$|\pi| \cdot t(\pi) \subset \frac{Cl(\mathbb{Z}\pi)}{C(\mathbb{Z}\pi)}$$

証明. $t(\pi)$ の一つの元を $[1\gamma]$ とする. これは有限位数を

から

$$M^n \oplus \mathbb{Z}S \cong \mathbb{Z}T$$

となる $n \geq 1$ と π 集合 S, T が存在する. $M \in M \oplus \mathbb{Z}S = T \in T^0(\underbrace{S \cup \dots \cup S}_{n-1 \text{ 回}})$ に置き替え, $M^n \cong \mathbb{Z}T$ と思えてよい.

$\mathcal{A} = \mathcal{A}$, $\chi(H) = 1$, $H \in \mathcal{A}$ の場合には補題 1.4 を適用すると,

$$(3) \quad \mathbb{Z}^{|\pi|} \oplus \bigoplus'_{H \in \mathcal{A}} \mathbb{Z}[\pi_H]^{m(H)} \sim \bigoplus'_{H \in \mathcal{A}} \mathbb{Z}[\pi_H]^{n(H)}, \quad m(H), n(H) \geq 0$$

となる ($\sim$ は局所同型である). 補題 1.6 によると任意の $H \in \mathcal{A}$ に対して $M|_H$ は置換 $\mathbb{Z}H$ -加群の差に局所同型である. (3) の両辺に $\bigotimes_{\mathbb{Z}} M$ を作用させると,

$$M^{|\pi|} \oplus \mathbb{Z}S' \sim \mathbb{Z}T'$$

となる π -集合 S, T の存在が分る. Roiter の定理 (局所同型の定義 (iv)) によると,

$$M^{|\pi|} \oplus \mathbb{Z}S' \oplus \mathbb{Z}\pi \cong \mathbb{Z}T' \oplus \mathbb{Z}\pi$$

を満たす射影イデアル α が存在する. $[\alpha] = |\pi| \cdot [M](\text{int}(\pi))$

だから, $|\pi| \cdot t(\pi) \subset \mathcal{O}(\mathbb{Z}\pi) / \mathcal{C}(\mathbb{Z}\pi)$ である.

§2 補題 1.6 の証明.

有限群 π が split type とは, $\mathbb{Q}$ 上の任意の既約表現の Schur index は 1 であることという. 言い替えると, 群環 $\mathbb{Q}\pi$ は単純成分に分解すると, 各単純成分は可換体上の行列環になる.

ている. dihedral group, 奇数位数の巾零群等は of split type である.

$(p, 1\pi) = 1$ のときは, $\mathbb{Z}_p$ 上の表現論と $\mathbb{Q}$ 上の表現論とは同じであることに注意する. さらに π が of split type ならば, $\mathbb{Z}_p\pi$ は $\mathbb{Q}$ の有限次拡大体での $\mathbb{Z}_p$ の integral closure 上の行列環の直和に等しい, としている.

補題 2.1 p は $(p, 1\pi) = 1$ とする素数とする. 既約 $\mathbb{Z}_p\pi$ -加群 V, V' を考える. $\hat{\mathbb{Z}}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} V$ と $\hat{\mathbb{Z}}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} V'$ は, $V \neq V'$ ならば, 共通な直既約な直和因子をもたない.

π が of split type のときは $\hat{\mathbb{Z}}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_m$ と既約 $\hat{\mathbb{Z}}_p\pi$ -加群の直和に分れるが $i \neq j$ ならば V_i と V_j とは同型でない.

証明. $\hat{\mathbb{Z}}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} \text{Hom}_{\mathbb{Z}_p\pi}(V, V') \cong \text{Hom}_{\hat{\mathbb{Z}}_p\pi}(\hat{\mathbb{Z}}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} V, \hat{\mathbb{Z}}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} V')$ からは前半は従う.

π は of split type とすると, V に対応する $\mathbb{Z}_p\pi$ の component は $M_n(R)$, R は テータメント環で可換 $\mathbb{Z}_p$ -algebra, とは, としている.

$$\hat{\mathbb{Z}}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} R = R_1 \oplus \cdots \oplus R_m \quad R_i \text{ は テータメント環}$$

である,

$$\hat{\mathbb{Z}}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} M_n(R) = M_n(R_1) \oplus \cdots \oplus M_n(R_m)$$

$M_n(R_i)$ に対応する表現を V_i とおくと, $\hat{\mathbb{Z}}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_m$ と分解して, $i \neq j$ ならば $V_i \neq V_j$ である.

系 2.2 π は of split type, $(p, 1\pi) = 1$ とする. V は $\mathbb{Z}_p\pi$ -

lattice とする. $W^n \cong \hat{\mathbb{Z}}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} V$ ($n \geq 1$) を満たす $\hat{\mathbb{Z}}_p \pi$ -lattice W に対しては, $W = \hat{\mathbb{Z}}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} W_0$ となる $\mathbb{Z}_p \pi$ -lattice W_0 が存在する.

証明は補題 2.1 から直ちに従う.

π の p -シロ一部分群 π_p は正規部分群とする. Hall の定理によると, $\pi = \pi_p * \mu$ と半直積に書ける. π の任意の部分群は $H * K$ ($H \subset \pi_p, K \subset \mu$) の形である. $H_1, \dots, H_t$ は π の p -部分群の共役類の代表系とし,

$$X_i = \{ H_i * K \mid K \text{ は } N_\pi(H_i) \cap \mu \text{ の部分群の } \mu \text{ での共役類の代表系を動く} \}$$

$$X = X_1 \cup \dots \cup X_t$$

と置く. $i \neq j$ ならば $X_i \cap X_j = \emptyset$ であり, π の任意の部分群は X の唯一つの元に共役である.

補題 2.3. $L' \in X_i, L'' \in X_j$ ($i \neq j$) とする. $\hat{\mathbb{Z}}_p[\pi_{L'}]$ と $\hat{\mathbb{Z}}_p[\pi_{L''}]$ は共通の直既約直和因子を持たない.

証明. $\hat{\mathbb{Z}}_p \pi_{H_i}, \hat{\mathbb{Z}}_p \pi_{H_j}$ は $\hat{\mathbb{Z}}_p \pi_p$ -加群として, $\mathbb{Z}$ で π に共通な直和因子をもつていないから, $\hat{\mathbb{Z}}_p \pi$ -加群としてもそうである. $\hat{\mathbb{Z}}_p \pi_{L'}$ (resp. $\hat{\mathbb{Z}}_p \pi_{L''}$) は $\hat{\mathbb{Z}}_p \pi_{H_i}$ (resp. $\hat{\mathbb{Z}}_p \pi_{H_j}$) の直和因子であるから補題の証明でよい.

補題 1.6 を証明しよう. π は法 p で巡回群, すなわち, 上の μ は位数が p と素な巡回群とする. S, T を π -集合, M, N は $\mathbb{Z}_p \pi$ -

加群とし,

$$M^n \oplus \mathbb{Z}_p S \cong N^n \oplus \mathbb{Z}_p T$$

なる関係があるとき,

$$M \oplus \mathbb{Z}_p S' \cong N \oplus \mathbb{Z}_p T'$$

を成す π 集合 S', T' が存在することを示そう. 定理 1.7 の証明の場合と同様に考え, 最初から $M^n \cong N^n \oplus \mathbb{Z} T$ とし, 5

ii. $\hat{\mathbb{Z}}_p \pi$ -加群に関しては Krull-Schmidt の定理が成り立つから, $\hat{\mathbb{Z}}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} N$ は $\hat{\mathbb{Z}}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} M$ の直和因子である (Heller の定理によると N は M の直和因子であることが分るが, 今はこの事実が必要である). 従って, $\hat{\mathbb{Z}}_p \pi$ -lattice D が存在して,

$$D^n \cong \hat{\mathbb{Z}}_p T.$$

$$\hat{\mathbb{Z}}_p T = \bigoplus_{L \in X} (\hat{\mathbb{Z}}_p \pi / L)^{r(L)}$$

と書く. 補題 2.3 によれば, $\bigoplus_{L \in X_i} (\hat{\mathbb{Z}}_p \pi / L)^{r(L)}$ と $\bigoplus_{L \in X_j} (\hat{\mathbb{Z}}_p \pi / L)^{r(L)}$

とは互いに素な既約直和因子をもつから, 任意の i に対して

$$(1) \quad D_i^n \cong \bigoplus_{L \in X_i} (\hat{\mathbb{Z}}_p \pi / L)^{r(L)}$$

となる $\hat{\mathbb{Z}}_p$ -lattice D_i が存在する. $\hat{\mathbb{Z}}_p \pi / \pi_p \otimes \hat{\mathbb{Z}}_p \pi$ は (1)

の両辺に作用すると, 巡回群の場合に帰着でき $n \mid r(L)$ がわかる. 従って, $T = \underbrace{T' \cup \dots \cup T'}_{n \text{ 回}} \pi$ なる π 集合 T' の存在が

知られる. さらに, $\hat{\mathbb{Z}}_p T = (\hat{\mathbb{Z}}_p T')^n$ 従って,

$$\hat{\mathbb{Z}}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} M = \hat{\mathbb{Z}}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} N \oplus \hat{\mathbb{Z}}_p T'$$

5, 2 $M \cong N \oplus \mathbb{Z}_p T'$ が成り立ち, 補題 1.6 が言える.

上の巡回群の場合と言うのは次の簡単な命題を指す.

命題 2.4. (1) π は巡回群とする. p は $|\pi|$ と素な素数とすると $A(\pi, \mathbb{Z}_p) = K(\pi, \mathbb{Z}_p)$ であり, $K(\pi, \hat{\mathbb{Z}}_p) / A(\pi, \hat{\mathbb{Z}}_p)$ は有限位数の元をもたない. (2) $p \nmid |\pi|$ のとき, $K(\pi, \hat{\mathbb{Z}}_p) / A(\pi, \hat{\mathbb{Z}}_p)$ は有限位数の元をもたない.

証明. (1). $A(\pi, \mathbb{Z}_p) = K(\pi, \mathbb{Z}_p)$ は反転公式そのものである. 補題 1.6 の証明と同様に言えると

$$D^n \cong \hat{\mathbb{Z}}_p T$$

である. $\hat{\mathbb{Z}}_p \pi$ -lattice D は $\hat{\mathbb{Z}}_p$ 上の置換加群の差であるとも言える. 巡回群は of split type であるから系 2.2 に従い, $D \cong \hat{\mathbb{Z}}_p \oplus_{\mathbb{Z}_p} D_0$ とする $\mathbb{Z}_p \pi$ -lattice D_0 が存在する. $A(\pi, \mathbb{Z}_p) = K(\pi, \mathbb{Z}_p)$ であるから証明は終り (実は D 自身が $\hat{\mathbb{Z}}_p$ 上の置換加群であるとも言える).

(2) は, 再び補題 1.6 の証明のようにして, $(p, |\pi|) = 1$ の場合に帰着できる.

§3. 巾零群

この節では次の定理を示す.

定理 3.1. 巾零群 π に対しては

$$Cl(\mathbb{Z}\pi) / D(\mathbb{Z}\pi) = \ker(t(\pi) \longrightarrow \prod_{p \nmid |\pi|} t(\pi, \mathbb{Z}_p))$$

この定理が意味を持つためには仮定が必要である。

命題 3.2. π は中零群で, π は of split type とすると, 任意の素数 p に対して $t(\pi, \mathbb{Z}_p) = 0$. 特に $t(\pi) = \mathcal{O}(\mathbb{Z}^\pi) / \mathcal{O}(\mathbb{Z}\pi)$ である。

定理 3.1 の証明. π の部分群 H に対して

$$\text{Res}_H^\pi : A(\pi) \longrightarrow A(H)$$

を制限写像とする。

$\mathcal{A} = \{ \pi \text{ の素数 } p \text{ で巡回群と成る部分群, } p \text{ は素数} \}$

とる。

$$\Phi(\pi) = \{ x \in A(\pi) \mid \text{Res}_H^\pi(x) = 0 \text{ for } \forall H \in \mathcal{A} \}$$

とく. $\Phi(\pi)$ は $A(\pi)$ のイデアルであり

$$\mathbb{Z}S \sim \mathbb{Z}T \iff \Phi(\pi) \ni [S] - [T]$$

($\sim$ は局所同型) が成り立っている。

さて, $[M] \in \ker(t(\pi) \longrightarrow \prod t(\pi, \mathbb{Z}_p))$ とすると, 各素数 p に対して $\mathbb{Z}_p \otimes_{\mathbb{Z}} M \oplus \mathbb{Z}_p T_p \cong \mathbb{Z}_p S_p$ とする π 集合 S_p, T_p が存在する. $[M]$ は有限位数の元だから, 適当な整数 $n \geq 1$ が存在して, $M^n \oplus \mathbb{Z}T \sim \mathbb{Z}S$ とする π -集合 S, T が存在する. M に適当な置換加群を加えることにより, T_p, T は空集合としてよい. このとき

$$[S] \in \Phi(\pi) + nA(\pi)$$

が示されれば定理の証明は終りである. 言い替えると,

$$\Phi(\pi) + nA(\pi) = \ker(A(\pi)) \longrightarrow \prod_{p \mid |\pi|} A(\pi, \mathbb{Z}_p) / nA(\pi, \mathbb{Z}_p)$$

すなわち $A(\pi, \mathbb{Z})$ は $\prod_{p \mid |\pi|} A(\pi, \mathbb{Z}_p)$ の直和因子であることとを示す ($A(\pi, \mathbb{Z})$ は $C^0(\mathbb{Z}\pi) = D(\mathbb{Z}\pi)$ (帰納定理から通すに得られる) である有限位数の元を持つことには注意).

素数 $p \mid |\pi|$ を一つ固定する. π の p -部分群を π_p とする. $\pi = \pi_p \times \mu$ と直積に分れる.

$$A(\pi) = A(\pi_p) \otimes_{\mathbb{Z}} A(\mu)$$

よって,

$$(1) \quad [S] = \sum'_{H \leq \pi_p} \left[\frac{\pi_p}{H} \right] \otimes y_H \quad y_H \in A(\mu)$$

($\sum'$ は π_p の部分群の代表類を動くものとする)

$[\mathbb{Z}_p S] \in nA(\pi, \mathbb{Z}_p)$ であるから, 補題 2.3 に従えば $[\mathbb{Z}_p y_H] \in nA(\mu, \mathbb{Z}_p)$ である. 各 H に対して, $s_H \in A(\mu)$ で

$$\mathbb{Z}_p y_H \cong (\mathbb{Z}_p s_H)^n$$

とすることができる. $z_H = y_H - n s_H$ とおく. (1)式は

$$(2) \quad [S] = \sum'_{H \leq \pi_p} \left[\frac{\pi_p}{H} \right] \otimes z_H + n u, \quad u \in A(\pi)$$

と書ける.

$$A(\pi_p) \longrightarrow K(\pi_p, \mathbb{Q})$$

は上への写像 ($\mathbb{Q}$ の表現はすべて *virtually* に置換表現)

である. $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_t \in A(\pi_p)$ を $K(\pi_p, \mathbb{Q})$ の基とするように選ぶ. すなわち,

$$R = \mathbb{Z}\omega_1 + \cdots + \mathbb{Z}\omega_t$$

とあると $R \cong K(\pi_p, \mathbb{Q})$ である.

$$\mathbb{Q}[\pi_p] = \mathbb{Q}r_H \quad \text{とある } r_H \in R \text{ を選ぶ. } \pi' \in A \text{ とする}$$

と, π' の p 部分群 π'_p は p' 部分群 (位数が p と素な部分群は巡回群 $\mathbb{Z}$ から,

$$\left| \left\{ [\pi_p] - r_H \right\} \otimes z_H \right\}^{\pi'} = 0$$

($p \nmid |H|$ から, $\mathbb{Q}r_H \cong (\mathbb{Q}S_H)^n$ 従って $\mathbb{Q}z_H = 0$ 注意)

$\Phi(\pi)$ の定義により,

$$\left([\pi_p] - r_H \right) \otimes z_H \in \Phi(\pi)$$

この関係式 (2) に代入すると

$$S = \sum'_{H \leq \pi_p} r_H \otimes z_H + nu + v \quad u \in A(\pi), v \in \Phi(\pi)$$

r_H は $\omega_1, \dots, \omega_t$ の一次結合である

$$(3) \quad [S] = \sum_{1 \leq i \leq t} \omega_i \otimes z_i' + nu + v$$

z_i' は $\{z_H\}$ の一次結合である.

$g/|g|$ で $g \neq p$ なる素数に対して

$$[Z_g S] = \sum_{1 \leq i \leq t} [Z_g \omega_i] \otimes_{Z_g} [Z_g z_i'] + n[Z_g u]$$

で $[Z_g S] \in nA(\pi, Z_g)$ である

$$\sum_{1 \leq i \leq t} [Z_g \omega_i] \otimes_{Z_g} [Z_g z_i'] \in nA(\pi, Z_g)$$

である。

$$A(\pi, \mathbb{Z}_g) = A(\pi_p, \mathbb{Z}_g) \oplus A(\mu, \mathbb{Z}_g)$$

であり $\{[\mathbb{Z}_g \omega_i]\}$ は $A(\pi_p, \mathbb{Z}_g)$ の基だから,

$$[\mathbb{Z}_g z_i'] \in nA(\mu, \mathbb{Z}_g)$$

が結論できる。

π を素数中の群の直積に分けてもらう成分の個数に因りて帰納法で証明する。帰納法の仮定により

$$z_i' \in nA(\mu) + \Phi(\mu)$$

よって, $A(\pi_p) \oplus_{\mathbb{Z}} \Phi(\mu) \subset \Phi(\pi)$ である

$$[S] \in \Phi(\pi) + nA(\pi)$$

が結論できる。

実は π が素数中の場合は何も言っていないが、この場合は、

$$t(\pi) = T^g(\pi) = \frac{\alpha(\mathbb{Z}^\pi)}{p(\mathbb{Z}^\pi)}$$

が簡単にいえるから問題は無い。

命題 3.2 の証明。少し一般の形で証明する。

命題 3.3. π のシロ- p -部分群は正規部分群で, $\pi = \pi_p * \mu$ と半直積に書けているとする。 π_p の任意の部分群は μ で normalise され, π/π_p は of split type かつ $K(\pi/\pi_p, \mathbb{Q}) = A(\pi/\pi_p, \mathbb{Q})$ が成り立つとすると, $t(\pi, \mathbb{Z}_p) = 0$ である。

(この形だとある種の metacyclic 群に対しても適用できる)

証明. $X_i, H_i, \mathcal{X}$ 等は 12 ページのそれと同じものとする.
 まづ次の補題を考へる.

補題 3.4. V は既約 $\mathbb{Z}_p H$ (resp. $\hat{\mathbb{Z}}_p H$) 加群とする.

$\mathbb{Z}_p[\pi/H] \otimes_{\mathbb{Z}_p H} V$ (resp. $\hat{\mathbb{Z}}_p[\pi/H] \otimes_{\hat{\mathbb{Z}}_p H} V$) ($H \leq \pi_p$, π のとき $\hat{\mathbb{Z}}_p[\pi/H]$ は左 $\hat{\mathbb{Z}}_p \pi$ 加群, 右 $\hat{\mathbb{Z}}_p H$ 加群の構造をもつかう, テンサ積は考へることが出来る) は直既約 $\mathbb{Z}_p \pi$ (resp. $\hat{\mathbb{Z}}_p \pi$) 加群である.

証明 $V_1 \oplus V_2 = \mathbb{Z}_p[\pi/H] \otimes_{\mathbb{Z}_p H} V$ とすると, $\mathbb{Z}_p \pi_p$ -module として V_i は置換加群だから $V_1^{\pi_p} \neq 0, V_2^{\pi_p} \neq 0$ である.
 一方 $(\mathbb{Z}_p[\pi/H] \otimes_{\mathbb{Z}_p H} V)^{\pi_p} \cong V$ だから, $V_1 = 0$ ならば $V_2 = 0$ である.

命題 3.3 の証明に戻る. $[M] \in t(\pi, \mathbb{Z}_p)$ とする. 適当な置換加群を M に加えることが出来る

$$M^n = \bigoplus_{L \in \mathcal{X}} \mathbb{Z}_p[\pi/L]^{r(L)}$$

と仮定する. このとき $[M] \in A(\pi, \mathbb{Z}_p)$ を言へばよい.

補題 1.6 の証明 (§2) と同様にして,

$$(4) \quad M_i^n \cong \bigoplus_{L \in X_i} (\hat{\mathbb{Z}}_p[\pi/L])^{r(L)}$$

$$\hat{\mathbb{Z}}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} M = M_1 \oplus \cdots \oplus M_t$$

をみたす $\hat{\mathbb{Z}}_p \pi$ -加群 M_i が存在することがわかる. 補題 3.4 と Krull-Schmidt の定理により

$$M_1 = \hat{\mathbb{Z}}_p \pi / \pi_1 \otimes \hat{\mathbb{Z}}_p \mu W$$

と書ける. 両辺に $\hat{\mathbb{Z}}_p \pi / \pi_1 \otimes \hat{\mathbb{Z}}_p \mu$ を適用すると, (4) に注意して,

$$W^n \cong \hat{\mathbb{Z}}_p T \quad T: \mu \text{ 集合}$$

と書ける. μ が of split type ならば

$$W = W_0 \otimes \hat{\mathbb{Z}}_p \quad W_0 \text{ は } \mathbb{Z}_p \mu\text{-lattice}$$

と書け, $K(\pi, \mathbb{Q}) = A(\pi, \mathbb{Q})$, $p+1 \mid \mu$ である W_0 は置換
 加群の差に書けてゐる. 従つて, $[M_1] \in A(\pi, \hat{\mathbb{Z}}_p)$ 故に
 $[M] \in A(\pi, \hat{\mathbb{Z}}_p)$, かつ $[M] \in A(\pi, \mathbb{Z}_p)$. 命題 3.4 が
 証明できた.

系 3.5. π は巾零群, $|\pi|$ は高々 2 個の素数でしか割れ
 ないとする. $t(\pi) = \frac{\mathcal{O}(\mathbb{Z}\pi)}{D(\mathbb{Z}\pi)}$.

§4. ある種の metacyclic 群

巡回群 κ, μ の半直積 $\pi = \kappa * \mu$ を考える. ここで,
 $|\kappa| = m, |\mu| = n$ とすると, $(m, n) = 1$ であるとしておく.
 自然な準同型 $\mu \rightarrow \text{Aut}(\kappa)$ を考える. この核 μ' が μ の
 直積因子に属してゐるとき, したがって $(|\mu'|, |\mu/\mu'|) = 1$ の
 とする $t(\pi) = \frac{\mathcal{O}(\mathbb{Z}\pi)}{D(\mathbb{Z}\pi)}$ が証明できる. 二面体群 D_m
 で m が奇数の場合はここに含まれる.

また上より少し一般の metacyclic 群に同じ 2 も同様のことが
 言えるが, あまりにも技術的なので省略する.

例

$t(\pi) \cong \mathbb{C}^2(2\pi)/\mathbb{C}^2(2\pi)$ とする例 (遠藤 $\angle$ 153) を紹介
する。

$$\pi = \langle \rho, \sigma, \tau \mid \rho^7 = \sigma^{15} = \tau^4 = 1, \rho\sigma = \sigma\rho, \rho\tau = \tau\rho, \sigma\tau = \tau\sigma^{-1} \rangle$$

とする。すると

$$\pi = C_7 \times (C_{15} \rtimes C_4) \quad (\rtimes \text{は半直積})$$

$\mathbb{Q}\pi$ の simple component は

$$\mathbb{Q}(\zeta_{105}, \bar{\tau}) \cong M_2(\mathbb{Q}(\zeta_7, \zeta_{15} + \zeta_{15}^{-1})), \quad \bar{\tau}^2 = -1$$

となるものが存在する。但し, $\zeta_n = \cos(\frac{2\pi}{n}) + i \sin(\frac{2\pi}{n})$, 1 の
原始 n 乗根とする。ところが, $\mathbb{Q}(\zeta_{15}, \bar{\tau})$ は division
ring であり,

$$\mathbb{Q}(\zeta_7) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}(\zeta_{15}, \bar{\tau}) = \mathbb{Q}(\zeta_{105}, \bar{\tau})$$

だから,

$$K(\pi, \mathbb{Q}) \not\cong A(\pi, \mathbb{Q})$$

が言えている。

$\mathbb{Z}[\zeta_{105}, \bar{\tau}]$ は $\mathbb{Q}(\zeta_{105}, \bar{\tau})$ の極大整域であるから

$$\mathbb{Z}[\zeta_{105}, \bar{\tau}] \cong M_2(\mathbb{Z}[\zeta_7, \zeta_{15} + \zeta_{15}^{-1}])$$

従って

$$(1) \quad L \oplus L \cong \mathbb{Z}[\zeta_{105}, \bar{\tau}]$$

を満たす $\mathbb{Z}\pi$ -加群 L が存在する。ところで, π -集合 S, T
をうまくとると完全列

$$(2) \quad 0 \rightarrow \mathbb{Z}[\Sigma_{105}, \bar{\pi}] \rightarrow \mathbb{Z}S \rightarrow \mathbb{Z}T \rightarrow 0$$

が作れる。以下 [E-H] から $\equiv$, $\cong$ の事実を引用しよう。

(3) M は $\mathbb{Z}\pi$ -lattice とすると, 完全列

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 \rightarrow M \rightarrow K \rightarrow \mathbb{Z}S \rightarrow 0 \\ S \text{ は } \pi \text{ 集合, 任意の部分群 } H \subset \pi \text{ に対して } H^1(H, K) = 0 \end{array} \right\}$$

が存在する。

(4) π の任意の シロ-群は $\ll$ 図群 とする。 K は $\mathbb{Z}\pi$ -lattice とすると,

$$K \text{ は置換加群の直和因子} \iff H^1(H, K) = 0 \text{ for } \forall H \leq \pi.$$

さて, (1) の L に対し (3) の resolution

$$0 \rightarrow L \rightarrow K \rightarrow \mathbb{Z}S' \rightarrow 0$$

を作る。図型

$$\begin{array}{c} K \oplus K \\ \uparrow \\ 0 \rightarrow \mathbb{Z}[\Sigma_{105}, \bar{\pi}] \rightarrow \mathbb{Z}S \end{array}$$

の push out diagram を作ると,

$$(5) \quad K \oplus K \oplus \mathbb{Z}T \cong \mathbb{Z}S' \oplus \mathbb{Z}S' \oplus \mathbb{Z}S$$

ここで A, B が置換加群の直和因子ならば

$$\text{Ext}'_{\mathbb{Z}\pi}(A, B) = 0$$

を便に $\mathbb{Z}([S-E])$ 。

さて, (5) は $[K] \in t(\pi)$ を意味している。一方 $\mathbb{Z}0$ の

命題 0.1 に従える。一般に射影加群は局所自由である、合成写像

$$\mathcal{C}(\mathbb{Z}\pi) \longrightarrow t(\pi) \longrightarrow t(\pi, \mathbb{Z}_p)$$

は零写像である、とこそが、合成写像

$$t(\pi) \longrightarrow t(\pi, \mathbb{Z}_p) \longrightarrow K(\mathbb{Z}\mathbb{Q}) / A(\mathbb{Z}, \mathbb{Q})$$

に与える $[K]$ の像は $[L] \in K(\pi, \mathbb{Q}) / A(\pi, \mathbb{Q})$ と一致するから
 $\neq 0$ となるから、

$$t(\pi) \neq \mathcal{C}(\mathbb{Z}\pi) / \mathcal{C}^2(\mathbb{Z}\pi)$$

である。

巾零群の場合も、Schur index が 1 である表現を利用して
 $t(\pi) \neq \mathcal{C}(\mathbb{Z}\pi) / \mathcal{C}^2(\mathbb{Z}\pi)$ とする例が作れる。

最後に、

問題 $\mathcal{C}(\mathbb{Z}\pi) / \mathcal{C}^2(\mathbb{Z}\pi) = \ker \left(t(\pi) \longrightarrow \prod_{p|\pi} t(\pi, \mathbb{Z}_p) \right)$

だろうか？

References

[DR1] A. Dress : On integral representations,

Bull. Amer. Math. Soc. 75 (1969), pp. 1031-1034

- [DR2] A. Dress : The permutation class group of a finite group, J. pure and applied algebra 6 (1975), 1-12
- [DR3] A. Dress : Contributions to the theory of induced representations, Algebraic K-theory II, Springer Lect. Note in Math. n° 342 (1973), 183-240
- [E-M] S. Endo and T. Miyata : On classification of the function fields of algebraic tori, Nagoya Math. J., 56 (1975), 85-104
- [OL.1] R. Oliver : G -actions on disks and permutation representations, J. Algebra 50 (1978), 44-62
- [OL.2] R. Oliver : G -actions on disks and permutation representations II, M. Z. 157 (1977) 237-263
- [S-E] R. G. Swan and E. G. Evans : K-theory of finite groups and orders, Lect. Note in Math. 149 (1970).

15/07/1983 丁

追記 1. 何故奇妙な notation $T^0(\pi)$ を使っているかについて
 は, [S-E] を参照していただければ, 御理解いただけるか
 と思います。

2. 全般にわたり, 大域理論とゆうよりは半大域理論,

すなわち、局所同型の理論であるため、法 p で巡回群に帰着
できることは、うまく証明できている訳ですから、

$$\tilde{T}^g(\pi) = T^g(\pi) / \{[M]=[N] \mid \exists M \sim N\}$$

$$\tilde{K}(\pi, \mathbb{Z}) = K(\pi, \mathbb{Z}) / \{[M]=[N] \mid M \sim N\}$$

を導入して、 $\tilde{T}^g(\pi)$, $\tilde{K}(\pi, \mathbb{Z})$ を扱うほうが良かったかとも
思っています。