

Complete Heyting Algebra の Separation Axioms

筑波大 数学系 江田勝哉

Complete Heyting Algebra (cHa) H による universe V の拡張 $V^{(H)}$ の中の cHa についての研究は Fourman - Scott, Takeuti 等によってなされている。ここでは主に V から $V^{(H)}$ のうめ込みに関連して作られる H_a の completion についての結果を述べ、その記述のために必要な基礎概念に關係した、 H_a の Separation axioms (位相空間の性質から導入したもの) についても言及する。

定義1. L が bounded distributive lattice (BDL) とは、 L が distributive lattice で最大元 1 と最小元 0 をもつこと。

A が Heyting algebra (Ha) とは A が BDL で $a \Rightarrow b$ がすべての a, b について存在すること。但し、 $(a \Rightarrow b) \wedge a \leq b$ 且 $\forall x (a \wedge x \leq b \rightarrow x \leq a \Rightarrow b)$ が成立する。 A が complete Heyting algebra (cHa) とは A が Ha で lattice として complete なること。又 Boolean algebra を Ba , complete Boolean algebra を cBa と書く。 //

定義2. L, L' を BDL とするとき $\varphi: L \rightarrow L'$ が
 $0, 1$ -morphism であるとは φ が $0, 1, \vee, \wedge$ を保つ関数である
 こと。 //

$\langle \text{BDL's}, 0, 1\text{-morphisms} \rangle$ は equational category であるか
 ら co-product を持つ。 BDL's $L_\alpha (\alpha \in \Lambda)$ について $\bigotimes_{\alpha \in \Lambda} L_\alpha$ とする。

定理1. $L_\alpha (\alpha \in \Lambda)$ が H_a ならば $\bigotimes_{\alpha \in \Lambda} L_\alpha$ は H_a 。

$L_\alpha (\alpha \in \Lambda)$ が B_a ならば $\bigotimes_{\alpha \in \Lambda} L_\alpha$ は B_a 。 //

$L_\alpha (\alpha \in \Lambda)$ が B_a の場合は Boolean Algebra のカテゴリーでの
 co-product と一致している事は知られている。

定義3. A が H_a のとき $\bar{A}$ が A の canonical completion とは
 ある injective な $0, 1$ -morphism $i: A \rightarrow \bar{A}$ が存在して、

$$\forall a \in \bar{A} \quad (a = \bigvee \{ i(x); i(x) \leq a \text{ \& } x \in A \})$$

$$\forall X \subseteq A \quad \forall a \in A \quad (a = \bigvee X \rightarrow i(a) = \bigvee i''X) \text{ であること。 //$$

次の Funayama の定理は直観主義論理の中での証明ができる。
 直観主義論理の中で証明できるものは $V^{(H)}$ の中で成立
 する。

定理2. (Funayama) A が H_a のとき canonical completion
 $\bar{A}$ は一意的に存在する。 //

定理1によって、 B, B' が B_a なら $\overline{B \otimes B'}$ は cB_a であること
 はすぐわかる。ところで、位相空間 X の開集合全体のなる

cHa を open algebra と呼ぶ。 $\mathcal{O}(X)$ とかく。 Open algebra について以下の事が成立する。

定理3. $\mathcal{O}(X \times Y)$ は $\overline{\mathcal{O}(X) \otimes \mathcal{O}(Y)}$ と同型。//

この事実に関連して、 Ha の separation axiom を考察するわけであるが、それは Heyting extension に関連した事柄の後に述べる。

Heyting valued model $V^{(H)}$ を Boolean extension と同様に定義し、 $\mathbb{I} = \mathbb{I}^{(H)} = \mathbb{I}$ で割ったものとする。そして、Boolean extension と同じように、 $\check{X} = \{ \langle \mathbb{I} \check{y} \rangle ; y \in x \}$, $\hat{x} = \{ y ; \mathbb{I} y \in x \} = \mathbb{I} \}$ とする。

定理4. H が cHa , Ω が Ha とするとき $V^{(H)}$ に関して、 $\hat{\bigvee} \Omega$ は、 $\overline{R(H) \otimes \Omega}$ と同型である。但し、 $R(H)$ は H の regular Ta 元全体のなる cBa 。//

系 (Kunen-Scott) B, C を cBa とするとき $V^{(B)}$ に関して、 $\hat{C}$ は $\overline{B \otimes C}$ と同型である。//

$BDL L$ の ideal の全体 $\mathcal{I}_L$ は cHa となるが、この ideal の全体をとる操作は、canonical completion とは異なるが一つの completion である。これに関して次のことが成立する。

定理5. L, L' を BDL とし、 $H = \mathcal{I}_L$ とする。 $V^{(H)}$ に関して、 $\hat{\mathcal{I}}_L$ は、 $\mathcal{I}(L \otimes L')$ 及び $\overline{H \otimes \mathcal{I}_{L'}}$ と同型である。//

位相空間 X について、 $\check{X}$ に $\mathcal{O}(X)$ によって位相を入れて考

その開集合の全体を $\mathcal{O}(\check{X})$ で表わす。これは $V^{(H)}$ の中での $\mathcal{O}(\check{X})$ の一つの completion と考えられるが、これについて次が成立する。

定理6. $\widehat{\mathcal{O}(\check{X})}$ は $\overline{H \otimes \mathcal{O}(X)}$ と同型である。//

系. $H = \mathcal{O}(T)$ ならば, $\widehat{\mathcal{O}(\check{X})}$ は $\mathcal{O}(T \times X)$ と同型である。//

ところで、よく研究されている位相空間 X, T に対する X_T について $\widehat{\mathcal{O}(X_T)}$ が $\mathcal{O}(T \times X)$ に同型であることが知られている。Fourman-Scott の内化の定理によつて次が成立する。

定理7. $H = \mathcal{O}(T)$ のとき, $[\mathcal{O}(X_T) \text{ と } \mathcal{O}(\check{X}) \text{ が同型}] = \mathbb{1}$ 。//

実数全体を R , $V^{(H)}$ での実数全体を $R^{(H)}$ とすれば, $H = \mathcal{O}(T)$ のとき, $[R^{(H)} = R_T] = \mathbb{1}$ であるから, 定理7により, $[\mathcal{O}(R^{(H)}) \text{ と } \mathcal{O}(\check{R}) \text{ は同型}] = \mathbb{1}$ 。しかし, cBa B について, $[R^{(B)} \neq \check{R}] = \mathbb{1}$ であれば $[\mathcal{O}(R^{(B)}) \text{ と } \mathcal{O}(\check{R}) \text{ は同型でない}] = \mathbb{1}$ である。定理7は, open algebra と cBa が $\mathcal{O}(\check{R})$ について, 対照的な性質をもっていることを示している。

又, 定理5の H についての条件は少し強すぎるようにも思えるが, cBa B に対しては, 同様の議論により, 成立しないことがわかる。

次に Ha A, A' の co-product と canonical completion について, cHa の $\langle cHa, cH\text{-morph.} \rangle$ の category $\mathcal{C}$ の co-product

との比較を試みる。cHa A, A' について、この意味の co-product を $A \sqcup A'$ で表わす。これについては, Dowker, Strauss, Isbell Simmons 等の研究がある。今、 B を atomless な cBa とすると $B \sqcup B^*$ は Ba でない。又、一般には、 $\mathcal{O}(X) \sqcup \mathcal{O}(Y)$ と $\mathcal{O}(X \times Y)$ は同型ではない。よって $A \sqcup A'$ と $\overline{A \otimes A'}$ は一般に同型でない。

彼等は、位相空間の性質を cHa に導入し、種々の研究をしている。ここでは、それを $A \otimes A'$ 及び $\overline{A}$ に適用した結果を述べる。種々の性質を lattice の性質に書き換える必要があるが、それは、参考文献 [1], [2], [6], [7] 参照の事。

	$\rightarrow -$	$- \rightarrow$	$\rightarrow \otimes$	$\otimes \rightarrow$
i) normal	X		O	O
ii) Boolean generated	O	X	O	O
iii) regular	O	O	O	O
iv) fit		O		O
v) fit*		O	O	O
vi) S_2'	O	O	O	X
vii) T_1 (conjunctive)	O	O	O	O
viii) cover regular	O	O		O
ix) compact	O	O	O	O
x) paracompact	O		X	

前頁の表は、 A が性質 P を満たすとき、 $\bar{A}$ も P を満たせば
 $\rightarrow$ のところには $\circ$ がついており、反例があるときは $\times$ がつ
 ている。 $\rightarrow$, $\rightarrow \otimes$, $\otimes \rightarrow$ も同様に解釈する。但し、 $A \otimes A'$
 は A が元を一つしかもたない場合、元が1つの cHa となるた
 め、 A, A' が二つ以上の元をもつ Ha に限って考える。

表の中で $\circ$ も $\times$ も書いていないところは、まだわかってい
 ないところであるが、とくに para-compactness の部分は、
 興味深い問題である。

参考文献

- [1] Dowker-Strauss : Separation axioms for frames
 In Topics in Topology (Hungary) 1972
- [2] Dowker-Strauss : Sums in the category of frames
 Houston J. of M. Vol. 3 No. 1 1977
- [3] Fourman-Scott : Sheaves and logic
 In L.N. of M. Vol. 753 Springer 1979
- [4] Grayson : Heyting-valued model for intuitionistic
 set theory. In L.N. of M. Vol. 753 Springer
- [5] Funayama : Imbedding p.o. sets into i.d.c lattice. 1958
- [6] Isbell : Atomless parts of spaces. Math. Scand. 31 1972
- [7] Simmons : A Framework for topology : In Logic Coll. '77
 North-Holland P.c. 1978