

整係数群環の自己同型について

国士館大・工学部 関口 勝右 (Katsusuke Sekiguchi)

G を有限群, R を可換環とする。 RG で R 上の群環を表す。本稿では R が $\mathbb{Z}$ (the ring of rational integers), 又は $\mathbb{Z}_p$ (the ring of p -adic integers) の場合における RG の自己同型群についての考察を主な目的とする。

§ 1. General results.

R を可換環, Λ を R -algebra とする。以下の記号を用いる。

$\text{Aut}_R(\Lambda)$: Λ の R -automorphisms 全体のなす群,

$\text{In}(\Lambda)$: Λ の inner automorphisms 全体のなす群,

$\text{cent}(\Lambda)$: Λ の center,

$\text{U}(\Lambda)$: Λ の unit group,

$\text{Autcent}(\Lambda)$: Λ の central automorphisms 全体のなす群,

但し、 Λ の R -automorphism f が central automorphism であるとは、任意の $c \in \text{cent}(\Lambda)$ に対して $f(c) = c$ が成り立つことを言う。

また、

$$\text{Out}_R(\Lambda) = \text{Aut}_R(\Lambda) / \text{In}(\Lambda),$$

$$\text{Outcent}(\Lambda) = \text{Autcent}(\Lambda) / \text{In}(\Lambda) \quad \text{と定める。}$$

(Λ, Λ) -bimodule M が R 上の bimodule であるとは、任意の $r \in R$ と、任意の $m \in M$ に対して $rm = mr$ が成立することである。以後、このことを記号では M/R と書く。

定義(1.1). (Λ, Λ) -bimodule M/R が R 上 invertible であるとは、 (Λ, Λ) -bimodule N/R と bimodule isomorphisms: $\lambda: M \otimes_{\Lambda} N \cong \Lambda$, $\mu: N \otimes_{\Lambda} M \cong \Lambda$ が存在して、次の図形を可換にすることである。

$$\begin{array}{ccc} M \otimes N \otimes M & \xrightarrow{\lambda \otimes 1} & \Lambda \otimes M \\ \downarrow 1 \otimes \mu & & \downarrow \\ M \otimes \Lambda & \longrightarrow & M \end{array}, \quad \begin{array}{ccc} N \otimes M \otimes N & \xrightarrow{\mu \otimes 1} & \Lambda \otimes N \\ \downarrow 1 \otimes \lambda & & \downarrow \\ N \otimes \Lambda & \longrightarrow & \Lambda \end{array}$$

Invertible (Λ, Λ) -bimodule M/R の (bimodule としての) 同型類を (M) と書き, これらの同型類全体の集合に積を $(M)(M') = (M \otimes_{\Lambda} M')$ で定めたものは, この積に関して群となる。これを $\text{Pic}_R(\Lambda)$ と書く。

$\text{Pic}_R(\Lambda) = \{(M) \mid M \text{ は invertible } (\Lambda, \Lambda)\text{-bimodule}/R\}$
特に R として $\text{cent}(\Lambda)$ を考えたとき, $\text{Pic}_{\text{cent}(\Lambda)}(\Lambda)$ を $\text{Picent}(\Lambda)$ と書く。

以下では, 特に断わらない限り, R を Dedekind domain, K をその商体, A を separable K -algebra, Λ を A の R -order とする。 $\text{Picent}(\Lambda)$ の subgroup $\text{LFP}(\Lambda)$ を $\text{LFP}(\Lambda) = \{(M) \in \text{Picent}(\Lambda) \mid M \text{ は left } \Lambda\text{-module として locally free}\}$

と定める。

(Λ, Λ) -bimodule X/R と R -automorphisms f, g に対し, fXg を加群としては X と同じもので, Λ の左右の作用を $\lambda \circ x \circ \mu = f(\lambda)xg(\mu)$ ($\lambda, \mu \in \Lambda, x \in X$) で定めた (Λ, Λ) -bimodule とする。次の定理が知られている。

定理 (1.2) ([3])

$$\omega_0 : \text{Aut}_R(\Lambda) \longrightarrow \text{Pic}_R(\Lambda) \quad \text{を} \quad \omega_0(f) = (, \Lambda_f)$$

($f \in \text{Aut}_R(\Lambda)$) で定めると ω_0 は group homomorphism であり, $\text{Ker } \omega_0 = \text{In}(\Lambda)$. よって ω_0 より, group monomorphism $\omega: \text{Out}_R(\Lambda) \longrightarrow \text{Pic}_R(\Lambda)$ が導かれる. 特に $\omega: \text{Outcent}(\Lambda) \longrightarrow \text{LFP}(\Lambda)$ が導かれる.

R の prime ideal $\mathfrak{f}$ に対して $\mathfrak{f}$ -adic completion を $R_{\mathfrak{f}}$ と書く. $\Lambda_{\mathfrak{f}} = R_{\mathfrak{f}} \otimes_R \Lambda$ と書く. $A_{\mathfrak{f}}$ 等の定義も同様である.

A の R -orders Λ, Λ' が locally conjugate であるとは, R の任意の prime $\mathfrak{f}$ に対して $\Lambda_{\mathfrak{f}}$ と $\Lambda'_{\mathfrak{f}}$ が $A_{\mathfrak{f}}$ で共役となることである. Λ と locally conjugate な R -orders 全体のなす集合を $\text{L-Conj}(\Lambda)$ で表すと, これに $\text{U}(A)$ は共役によって作用する. その orbits の集合を $\text{L-Conj}(\Lambda)/\text{U}(A)$ で表す.

定理(1.3)([4])

Cancellation law が locally free Λ -module について成立するとき, 次の exact sequence が存在する.

$$1 \longrightarrow \text{Outcent}(\Lambda) \xrightarrow{\omega} \text{LFP}(\Lambda) \xrightarrow{\theta} \text{C}(\Lambda) \longrightarrow \text{Coker } \theta \longrightarrow 1$$

更に $\text{Coker } \theta$ と $\text{L-Conj}(\Lambda)/\text{U}(A)$ との間に 1:1 の対応がある. 但し, $\text{C}(\Lambda)$ で Λ の locally free class group を表し

, $\theta \in \theta((M)) = [A] - [M]$ を定める.

定理 (1.4) ([3])

(1) R の有限個の prime $\mathfrak{f}$ を除いて $LFP(\Lambda_{\mathfrak{f}}) = 1$.

(2) 次の sequence は exact

$$1 \longrightarrow LFP(\text{cent}(\Lambda)) \xrightarrow{\tau} LFP(\Lambda) \longrightarrow \prod_{\mathfrak{f} \in \text{Spec}(R)} LFP(\Lambda_{\mathfrak{f}}) \rightarrow 1$$

但し $\tau((L)) = (L \otimes_{\text{cent}(\Lambda)} \Lambda)$ である.

注意 (1.5). 次のことが知られている. ([3], [4])

$$LFP(\text{cent}(\Lambda)) \cong C(\text{cent}(\Lambda)),$$

$$\text{Outcent}(\Lambda_{\mathfrak{f}}) \cong LFP(\Lambda_{\mathfrak{f}}).$$

§ 2. $\text{Outcent}(RG)$.

この章では以下の記号を用いる.

C_n : 位数 n の cyclic group,

D_n : 位数 $2n$ の dihedral group,

H_n : 位数 $4n$ の quaternion group,

S_n : n 文字上の symmetric group.

はじめに $R = \mathbb{Z}_p$ の場合を考えよう。

定理 (2.1)

G を次の群とすると, 任意の素数 p に対して

$$\text{Outcent}(\mathbb{Z}_p G) = 1.$$

(1) D_4, H_2, D_q q : 奇素数 ([3])

(2) $C_n \wr C_m$: C_n の C_m による半直積で $(n, m) = 1$
かつ, C_m が C_n の各 Sylow-群に忠実に作用している群。

D_n, H_n ([2])

(3) metacyclic p -group, p : odd ([12])

これらの結果をみると $\text{Outcent}(\mathbb{Z}_p G) = 1$ が多くの群 G について成立するように思えるが, 一般にはそうはならないことが示される。次の記号を用いる。

任意の有限群 G に対して

$$\text{Aut}_c(G) = \{ f \in \text{Aut}(G) \mid f(g) \sim g \text{ (conjugate in } G) \text{ for any } g \in G \},$$

$\text{In}(G)$: G の inner automorphisms 全体のなす群,
と置き,

$$\text{Out}_c(G) = \text{Aut}_c(G) / \text{In}(G) \text{ と定める。}$$

すると任意の可換環 R に対し、自然に group homomorphism $\text{Out}_c(G) \longrightarrow \text{Outcent}(RG)$ が定まる。このとき

命題 (2.2) ([2])

G を有限 p -群とすると、次の group homomorphisms はいずれも injective である。

$$\text{Out}_c(G) \longrightarrow \text{Outcent}(\mathbb{Z}G),$$

$$\text{Out}_c(G) \longrightarrow \text{Outcent}(\mathbb{Z}_p G).$$

ところが、有限 p -群で $\text{Out}_c(G)$ が単位群ではないもの、さらに可換群ででないものの存在が知られている ([9])

。よって、一般には $\text{Outcent}(\mathbb{Z}_p G) \neq 1$ であることが命題 (2.2) より出る。ただし、命題 (2.2) の写像が surjective であるかどうかはわかっていない。

次に $R = \mathbb{Z}$ の場合を考えよう。

加群 A と自然数 m に対し、 $A_{[m]} = \{a \in A \mid ma = 0\}$ 、

また、 $\mathbb{Z}G$ -module M に対し、 $M^G = \{m \in M \mid \sigma m = m \text{ for any } \sigma \in G\}$ とおく。

次の結果がある。

定理(2.3) ([2])

$$(1) \text{Outcent}(\mathbb{Z}D_n) \cong T_n \times C(\mathbb{Z}D_n)_{[2]}$$

ここで, $n = 2^e m$, $(2, m) = 1$ とするとき,

$$T_n = \begin{cases} U(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})/\langle -1 \rangle & \text{if } e=0 \\ U(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) \times U(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})/\langle -1 \rangle & \text{if } e=1 \\ U(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) \times U(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) \times \mathbb{Z}/2^{e-1}\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2^{e-2}\mathbb{Z} & \text{if } e \geq 2 \end{cases}$$

と置く。

(2) $G = C_n \wr C_m$ を定理(2.1)(2) の群とすると

$$|\text{Outcent}(\mathbb{Z}G)| = \frac{2^{\phi(n)^{m-1}}}{|U^*(\mathbb{Z}C_m)|} |C([\mathbb{Z}C_n / (\sum_{\sigma \in C_m} \sigma)]^{C_m})_{[m]}|$$

ここで, $\phi(\cdot)$ は Euler の関数, $U^*(\mathbb{Z}C_m) = \text{Im} \{ U(\mathbb{Z}C_m) \rightarrow U((\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})C_m) \}$.

注意(2.4)

(1) $C(\mathbb{Z}D_n)_{[2]}$ については [1] に詳しい。

(2) 定理(2.3) の群に対しては $\text{LFP}(\mathbb{Z}G)$ 等も計算できる ([2])。

§3. Normalized automorphism

G を有限群とし, $\mathbb{Z}G$ の augmentation map を ε と書く。

$\mathbb{Z}G$ の automorphism f が normalized であるとは,

$\varepsilon \circ f(\alpha) = 1$ が任意の $\alpha \in G$ について成り立つことである。

$N\text{-Aut}(\mathbb{Z}G)$: $\mathbb{Z}G$ の normalized automorphisms 全体のなす集合

と置く。 $N\text{-Aut}(\mathbb{Z}G) \supset \text{Autcent}(\mathbb{Z}G)$ であることは容易にわかる。また, $\text{Aut}(G)$ の元は $\mathbb{Z}$ -linear に拡張することによって $\text{Aut}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}G)$ の元とみなすことができるが, この同一視によって, $N\text{-Aut}(\mathbb{Z}G) \supset \text{Aut}(G)$ と考えられる。以上より一般に, $N\text{-Aut}(\mathbb{Z}G) \supset \text{Autcent}(\mathbb{Z}G) \cdot \text{Aut}(G)$ が成り立つことがわかる。

問題 (3.1)

$N\text{-Aut}(\mathbb{Z}G) = \text{Autcent}(\mathbb{Z}G) \cdot \text{Aut}(G)$ となる有限群 G を決定せよ。

この等号が成立しない群 G は現在のところみつかっていない。部分的な解答としては次の結果がある。

定理 (3.2)

次の群 G に対して $N\text{-Aut}(\mathbb{Z}G) = \text{Autcent}(\mathbb{Z}G) \cdot \text{Aut}(G)$ が

成立する。

- (1) $G = AB$, where A is a cyclic normal subgroup of G and B is an abelian subgroup of G .

$$G = S_n$$

([7], [8])

- (2) G : class 2 nilpotent group ([10])

注意 (3.3)

この定理に述べられた群以外にも 問題 (3.1) の等式が成り立つものが知られている. ([8]).

§ 4. Zassenhaus 予想.

$$V(\mathbb{Z}G) = \{u \in U(\mathbb{Z}G) \mid \varepsilon(u) = 1\},$$

$$TV(\mathbb{Z}G) = \{v \in V(\mathbb{Z}G) \mid v \text{ の位数は有限} \}$$

と置く。

次の予想について考えよう。

予想 (4.1) ([13])

G を有限群とする。このとき、任意の $u \in TV(\mathbb{Z}G)$ は

$\mathcal{U}(\mathbb{Q}G)$ において G の元と共役である。

この予想についての反例は今のところ見つかっていない。
部分的な解答としては次の結果がある。

定理 (4.2)

次の群 G に対して Zassenhaus 予想は正しい。

- (1) $G = C_p \wr C_q$ $p, q : \text{primes}$ ([5]),
- (2) $G = C_{p^n} \wr C_m$ $p : \text{prime}, q : \text{arbitrary}$ ([11]),
- (3) $G = C_n \wr C_m$ $m, n : \text{arbitrary}$ ([6]),

但し、(1), (2), (3) における群は定理 (2.1)(2) の仮定をみたすものとする。

References

- [1] S. Endo and T. Miyata, On the class groups of dihedral groups, J. Algebra 63 (1980), 548-573.
- [2] S. Endo, T. Miyata and K. Sekiguchi, Picard groups and automorphism groups of integral group rings

of metacyclic groups, *J. Algebra* 77 (1982), 286 — 310.

[3] A. Fröhlich, The Picard group of non-commutative rings, in particular of orders, *Trans. Amer. Math. Soc.* 180 (1973), 1 — 45.

[4] A. Fröhlich, I. Reiner and S. Ullom, Class groups and Picard groups of orders, *Proc. London Math. Soc.* (3) 29 (1974), 405 — 434.

[5] I. S. Luthar and A. K. Bhandari, Torsion units of integral group rings of metacyclic groups, *J. Number Theory* 17 (1983), 270 — 283.

[6] T. Mitsuda and K. Sekiguchi, On the units of integral group rings of metacyclic groups, Preprint.

[7] G. Peterson, Automorphisms of the integral group ring of S_n , *Proc. Amer. Math. Soc.* 59 (1976), 14 — 18.

- [8] _____, On the automorphism group of an integral group ring, II, Illinois J. Math. 21 (1977), 836-844.
- [9] C.H. Sah, Automorphisms of finite groups, J. Algebra 10 (1968), 47-68; Addendum, ibid. 44 (1977), 573-575.
- [10] S.K. Sehgal, On the isomorphism of integral group rings I, Canad. J. Math. 21 (1969), 410-413.
- [11] C.P. Milies and S.K. Sehgal, Torsion units in integral group rings of metacyclic groups, J. Number Theory 19 (1984) 103-114.
- [12] K. Shiguchi, On the automorphism group of the p -adic group ring of a metacyclic p -group, J. Algebra 82 (1983), 488-507 : II, to appear.
- [13] H. Zassenhaus, On the torsion units of finite group rings, in "Studies in Mathematics" 119-126 (in honor

of A. Almeida Costa), Institute de Alta Cultura,
Lisbon 1974.