

加法群から乗法群への変形群スキームの加法群による拡大について

中大理工 (D.C.) 谷戸 光昭 (Mitsuaki YATO)

1. 序

一般に A を可換環, $\lambda \in A$ とする. $\mathbb{G}_{a,A}$ を A 上の加法的群スキーム, $\mathbb{G}_{m,A}$ を A 上の乗法的群スキームとする. (本稿では単に加法群, 乗法群と呼ぶ.) このとき, 加法群 $\mathbb{G}_{a,A}$ の乗法群 $\mathbb{G}_{m,A}$ への変形を与える群スキーム $\mathcal{G}^{(\lambda)}$ は次のように定義される: $\mathcal{G}^{(\lambda)} = \text{Spec } A[T, \frac{1}{1+\lambda T}]$. ここで, 群の算法は $T \mapsto \lambda T \otimes T + T \otimes 1 + 1 \otimes T$ により与えられる. 特に, $\lambda \in A^\times$ ならば同型 $\mathcal{G}^{(\lambda)} \simeq \mathbb{G}_{m,A}$ が得られ, $\lambda = 0$ ならば $\mathcal{G}^{(\lambda)}$ は $\mathbb{G}_{a,A}$ に他ならない. $\mathcal{G}^{(\lambda)}$ の $\mathbb{G}_{a,A}$ による可換な拡大の同型類全体を $\text{Ext}_A^1(\mathcal{G}^{(\lambda)}, \mathbb{G}_{a,A})$ と書く. これが群をなすことはよく知られている. この群が今回の研究対象である. $\mathcal{G}^{(\lambda)}$ の $\mathbb{G}_{a,A}$ への作用が自明なものだけを扱う.

Weisfeiler [5] は A が整域の時に $\text{Ext}_A^1(\mathcal{G}^{(\lambda)}, \mathbb{G}_{a,A})$ の研究を行っており, 特に体を含む整域のときに群 $\text{Ext}_A^1(\mathcal{G}^{(\lambda)}, \mathbb{G}_{a,A})$ の特徴付けを与えている. 関口-諏訪 [2] では A が離散付値環のときに, $\mathcal{G}^{(\lambda)}$ の $\mathbb{G}_{a,A}$ への作用が自明でない場合も含めて研究し, 結果を出している.

一方, 関口-諏訪 [3] において, A が $\mathbb{Z}_{(p)}$ -代数 (p は素数) のときに $\text{Hom}_{A\text{-gr}}(\widehat{\mathcal{G}}^{(\lambda)}, \widehat{\mathbb{G}}_{m,A})$ と $\text{Ext}_A^1(\widehat{\mathcal{G}}^{(\lambda)}, \widehat{\mathbb{G}}_{m,A})$ の群構造が特徴付けられている. ここで, $\widehat{\mathcal{G}}^{(\lambda)}$ や $\widehat{\mathbb{G}}_{m,A}$ は形式群スキーム. その主結果は第四節の前半で紹介するが, 今簡単に述べておくと, $W(A)$ (A の元を成分とする Witt ベクトルのなす環) のある自己準同型の核と余核に $\text{Hom}_{A\text{-gr}}(\widehat{\mathcal{G}}^{(\lambda)}, \widehat{\mathbb{G}}_{m,A})$ と $\text{Ext}_A^1(\widehat{\mathcal{G}}^{(\lambda)}, \widehat{\mathbb{G}}_{m,A})$ がそれぞれ同型になる, という非常にスマートなものである. この理論のポイントは, 本質的に Artin-Hasse exponential series を拡張した冪級数のみが homomorphism となりうる, というところにある. なお, $\text{Hom}_{A\text{-gr}}(\mathcal{G}^{(\lambda)}, \mathbb{G}_{m,A})$ や $\text{Ext}_A^1(\mathcal{G}^{(\lambda)}, \mathbb{G}_{m,A})$ のいわゆる「代数群バージョン」の結果はその系として導かれる.

今回, $\mathbb{Z}_{(p)}$ -代数上において $\text{Hom}_{A\text{-gr}}(\widehat{\mathcal{G}}^{(\lambda)}, \widehat{\mathbb{G}}_{a,A})$ と $\text{Ext}_A^1(\widehat{\mathcal{G}}^{(\lambda)}, \widehat{\mathbb{G}}_{a,A})$ の群構造を特徴付けることができた. 主結果は関口-諏訪 [3] と同様にスマートで, A^N のある自己準同型の核, 余核に $\text{Hom}_{A\text{-gr}}(\widehat{\mathcal{G}}^{(\lambda)}, \widehat{\mathbb{G}}_{a,A})$ と $\text{Ext}_A^1(\widehat{\mathcal{G}}^{(\lambda)}, \widehat{\mathbb{G}}_{a,A})$ がそれぞれ同型になるというものである. この理論のポイントは, 本質的にある種の logarithm を変形した冪級数のみが homomorphism となりうる, というところにある. なお, $\text{Hom}_{A\text{-gr}}(\mathcal{G}^{(\lambda)}, \mathbb{G}_{a,A})$ や $\text{Ext}_A^1(\mathcal{G}^{(\lambda)}, \mathbb{G}_{a,A})$ に対する結果はその系として導かれる. (第二節にて主定理およびその系の紹介を行う.)

主定理の証明は至って素朴である. 特に, $\text{Hom}_{A\text{-gr}}(\widehat{\mathcal{G}}^{(\lambda)}, \widehat{\mathbb{G}}_{a,A})$ に対する結果は未定係数法による直接計算で導かれる. 一方, アフィンスキーム上の $\mathbb{G}_a$ -torsor が自明になることから $\text{Ext}_A^1(\mathcal{G}^{(\lambda)}, \mathbb{G}_{a,A}) \simeq H_0^2(\mathcal{G}^{(\lambda)}, \mathbb{G}_{a,A})$ (Hochschild cohomology) となるので, $\text{Ext}_A^1(\widehat{\mathcal{G}}^{(\lambda)}, \widehat{\mathbb{G}}_{a,A})$ の特徴付けはもっぱら 2-cocycle の計算によって成される. 特に, 2-cocycle の正規化の際に Lazard [1] による補題が重要な役割を担う. (第三節にて証明の概略を解説する.)

さて, いわば「指数関数」がその主幹を成していた $\mathbb{G}_{m,A}$ に対する結果と, 「対数関数」が主幹を成す $\mathbb{G}_{a,A}$ に対する結果との関係も非常に気になるところである. これについては, 双数の環を導入することによって加法群を乗法群の Lie 環とみなし, 関口-諏訪 [3] の結果と今回

の結果との結び付きを明確に与えることができた. なお, これは同時に $\text{Hom}_{A\text{-gr}}(\widehat{\mathcal{G}}^{(\lambda)}, \widehat{\mathcal{G}}_{a,A})$ と $\text{Ext}_A^1(\widehat{\mathcal{G}}^{(\lambda)}, \widehat{\mathcal{G}}_{a,A})$ に対する結果の別証明を与えている. (第四節の後半にて触れる.)

以下, 特に断らない限り素数 p を固定し, A を $\mathbb{Z}_{(p)}$ -代数とする. $P = \{p^e; e \geq 0\}$ とおく. また $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ である.

2. 主定理

この節では我々の主定理について述べる. まずは, 避けて通れない多項式や写像の定義から始める. A を $\mathbb{Z}_{(p)}$ -代数, $\lambda \in A$ とする.

2.1. $\mathbf{a} = (a_0, a_1, a_2, \dots) \in A^{\mathbb{N}}$ (resp. $A^{(\mathbb{N})}$) に対し, $A^{\mathbb{N}}$ (resp. $A^{(\mathbb{N})}$) の自己準同型 Ψ を

$$\Psi : \mathbf{a} \mapsto (-(-\lambda)^{p^{i+1}-p^i} a_i + p a_{i+1})_{i \geq 0}$$

で定義する.

Λ を不定元とする. 任意の $r \geq 0$ に対し, $\mathbb{Z}_{(p)}[\Lambda]$ 係数の多項式 $L_r(\Lambda; T)$ と $\tilde{L}_{p,r}(\Lambda; X, Y)$ を, それぞれ

$$L_r(\Lambda; T) = p^r \sum_{i=1}^{p^{r+1}-1} \frac{(-\Lambda)^{i-1}}{i} T^i \in \mathbb{Z}_{(p)}[\Lambda][T],$$

$$\tilde{L}_{p,r}(\Lambda; X, Y) = -\frac{L_{p,r}(\Lambda; X) + L_{p,r}(\Lambda; Y) - L_{p,r}(\Lambda; \Lambda XY + X + Y)}{(-\Lambda)^{p^{r+1}-1}} \in \mathbb{Z}_{(p)}[\Lambda][X, Y]$$

で定義する. $\tilde{L}_{p,r}(\Lambda; X, Y)$ は矛盾なく定義され, 関数等式

$$\tilde{L}_{p,r}(\Lambda; Y, Z) + \tilde{L}_{p,r}(\Lambda; X, \lambda YZ + Y + Z) = \tilde{L}_{p,r}(\Lambda; \lambda XY + X + Y, Z) + \tilde{L}_{p,r}(\Lambda; X, Y)$$

を満たす.

2.2. 群準同型 $\eta^0 : A^{\mathbb{N}} \rightarrow A[[T]]$ と $\eta^1 : A^{\mathbb{N}} \rightarrow Z^2(\widehat{\mathcal{G}}^{(\lambda)}, \widehat{\mathcal{G}}_{a,A})$ を, それぞれ

$$\eta^0 : \mathbf{a} = (a_0, a_1, \dots) \mapsto \sum_{r=0}^{\infty} a_r \left[\sum_{i=p^r}^{p^{r+1}-1} \frac{p^r}{i} (-\lambda)^{i-p^r} T^i \right],$$

$$\eta^1 : \mathbf{a} = (a_0, a_1, \dots) \mapsto \sum_{r=0}^{\infty} a_r \tilde{L}_{p,r}(\lambda; X, Y)$$

で定義する. (前節にて「ある種の logarithm を変形した冪級数」と称したのは, η^0 を定義する冪級数のことである.) このとき, 次の図式は可換:

$$\begin{array}{ccc} A^{\mathbb{N}} & \xrightarrow{\eta^0} & A[[T]] \\ \Psi \downarrow & & \downarrow \partial \\ A^{\mathbb{N}} & \xrightarrow{\eta^1} & Z^2(\widehat{\mathcal{G}}^{(\lambda)}, \widehat{\mathcal{G}}_{a,A}). \end{array}$$

ここで, ∂ は $f(T) \mapsto f(X) + f(Y) - f(\lambda XY + X + Y)$ で定義される cocycle map である. 上の可換図式から, 群準同型

$$\begin{aligned}\eta^0 &: \text{Ker} [\Psi : A^{\mathbb{N}} \rightarrow A^{\mathbb{N}}] \rightarrow \text{Hom}_{A\text{-gr}}(\widehat{\mathcal{G}}^{(\lambda)}, \widehat{\mathbb{G}}_{a,A}), \\ \eta^1 &: \text{Coker} [\Psi : A^{\mathbb{N}} \rightarrow A^{\mathbb{N}}] \rightarrow H_0^2(\widehat{\mathcal{G}}^{(\lambda)}, \widehat{\mathbb{G}}_{a,A})\end{aligned}$$

が誘導される. 同様に

$$\begin{aligned}\eta^0 &: \text{Ker} [\Psi : A^{(\mathbb{N})} \rightarrow A^{(\mathbb{N})}] \rightarrow \text{Hom}_{A\text{-gr}}(\mathcal{G}^{(\lambda)}, \mathbb{G}_{a,A}), \\ \eta^1 &: \text{Coker} [\Psi : A^{(\mathbb{N})} \rightarrow A^{(\mathbb{N})}] \rightarrow H_0^2(\mathcal{G}^{(\lambda)}, \mathbb{G}_{a,A})\end{aligned}$$

も誘導される.

以上の準備の下, 主定理は次のように述べられる.

定理 2.3. 群準同型

$$\begin{aligned}\eta^0 &: \text{Ker} [\Psi : A^{\mathbb{N}} \rightarrow A^{\mathbb{N}}] \rightarrow \text{Hom}_{A\text{-gr}}(\widehat{\mathcal{G}}^{(\lambda)}, \widehat{\mathbb{G}}_{a,A}), \\ \eta^1 &: \text{Coker} [\Psi : A^{\mathbb{N}} \rightarrow A^{\mathbb{N}}] \rightarrow H_0^2(\widehat{\mathcal{G}}^{(\lambda)}, \widehat{\mathbb{G}}_{a,A})\end{aligned}$$

は全単射.

系 2.4. 群準同型

$$\begin{aligned}\eta^0 &: \text{Ker} [\Psi : A^{(\mathbb{N})} \rightarrow A^{(\mathbb{N})}] \rightarrow \text{Hom}_{A\text{-gr}}(\mathcal{G}^{(\lambda)}, \mathbb{G}_{a,A}), \\ \eta^1 &: \text{Coker} [\Psi : A^{(\mathbb{N})} \rightarrow A^{(\mathbb{N})}] \rightarrow H_0^2(\mathcal{G}^{(\lambda)}, \mathbb{G}_{a,A})\end{aligned}$$

は全単射.

補注 2.5. A が $\mathbb{Q}$ -代数のときは, 同型

$$\text{Hom}_{A\text{-gr}}(\widehat{\mathcal{G}}^{(\lambda)}, \widehat{\mathbb{G}}_{a,A}) \simeq \left\{ \frac{a}{\lambda} \log(1 + \lambda T); a \in A \right\},$$

を得る. ここで

$$\frac{1}{\lambda} \log(1 + \lambda T) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-\lambda)^{i-1}}{i} T^i \in \mathbb{Q}[[T]].$$

例 2.6. $\lambda = 1$ とする. このとき $\Psi : A^{(\mathbb{N})} \rightarrow A^{(\mathbb{N})}$ は全単射. 従って,

$$\text{Hom}_{A\text{-gr}}(\mathbb{G}_{m,A}, \mathbb{G}_{a,A}) = 0, \quad H_0^2(\mathbb{G}_{m,A}, \mathbb{G}_{a,A}) = 0$$

を得る.

例 2.7. $\lambda = 0$ とする. A の標数が 0 の場合, $\Psi : A^{(\mathbb{N})} \rightarrow A^{(\mathbb{N})}$ は全射. 従って, $H_0^2(\mathbb{G}_{a,A}, \mathbb{G}_{a,A})$

0. また, 容易な計算で

$$\text{Hom}_{A\text{-gr}}(\mathbb{G}_{a,A}, \mathbb{G}_{a,A}) \simeq \{aT; a \in A\} \simeq A.$$

一方, A の標数を p とすると $\Psi : A^{(\mathbb{N})} \rightarrow A^{(\mathbb{N})}$ は零射で,

$$\mathrm{Hom}_{A\text{-gr}}(\mathbb{G}_{a,A}, \mathbb{G}_{a,A}) \simeq \left\{ \sum_{r=0}^{\infty} a_r T^{p^r}; (a_0, a_1, \dots) \in A^{(\mathbb{N})} \right\} \simeq A^{(\mathbb{N})},$$

$$H_0^2(\mathbb{G}_{a,A}, \mathbb{G}_{a,A}) \simeq \left\{ \sum_{r=0}^{\infty} a_r \left[\frac{X^{p^{r+1}} + Y^{p^{r+1}} - (X+Y)^{p^{r+1}}}{p} \right]; (a_0, a_1, \dots) \in A^{(\mathbb{N})} \right\} \simeq A^{(\mathbb{N})}.$$

3. 証明の概略 (1)

この節では主定理の証明の概略について述べる. A を $\mathbb{Z}_{(p)}$ -代数, $\lambda \in A$ とする.

まずは $\eta^0 : \mathrm{Ker}[\Psi : A^{\mathbb{N}} \rightarrow A^{\mathbb{N}}] \rightarrow \mathrm{Hom}_{A\text{-gr}}(\widehat{\mathcal{G}}^{(\lambda)}, \widehat{\mathbb{G}}_{a,A})$ の全単射性だが, 単射性は明白である. 全射性は下の補題により直ちに導かれる.

補題 3.1. $f(T) \in A[[T]]$ とする. $f(T)$ が関数等式 $f(X) + f(Y) - f(\lambda XY + X + Y) = 0$ を満たせば, ある $\mathbf{a} \in \mathrm{Ker}[\Psi : A^{\mathbb{N}} \rightarrow A^{\mathbb{N}}]$ が存在して $f(T) = \eta^0(\mathbf{a})$ となる.

証明. $f(T) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i T^i$ とおく. 仮定から $c_0 = 0$ は容易. $f(X) + f(Y) - f(\lambda XY + X + Y)$ をテイラー展開し, 仮定と合わせると

$$\begin{aligned} 0 &= f(X) + f(Y) - f(\lambda XY + X + Y) \\ &= - \sum_{j \geq 2} \sum_{k=1}^{j-1} \sum_{i=m(j,k)}^k \binom{j-k+i}{j-2k+2i} \binom{j-2k+2i}{i} \lambda^{k-i} c_{j-k+i} X^k Y^{j-k} \end{aligned}$$

を得る (定数項は省いた). ここで $m(j, k) = \max\{0, 2k - j\}$. 以降, 未定係数法により $f(T)$ の係数を決定していく. まず XY^{j-1} の係数を比較すると, 任意の $j \geq 2$ に対し,

$$(j-1)\lambda c_{j-1} + j c_j = 0 \quad (1)$$

を得る. このとき, $s \geq 0, p^s < j < p^{s+1}$ なる任意の s, j に対し,

$$c_j = \frac{p^s}{j} (-\lambda)^{j-p^s} c_{p^s} \quad (2)$$

となることが帰納的に示される. 上式は, 例えば $\mathbb{Q}$ 上での考察なら (1) から直ちに従うが, $\mathbb{Z}_{(p)}$ -代数上では容易でない. $(j, p) \neq 1$ のときには, 主に二項係数の計算によって上手く回避する必要がある. さて, 上の (1) と (2) を合わせると, 任意の $s \geq 0$ に対して

$$-(-\lambda)^{p^{s+1}-p^s} c_{p^s} + p c_{p^{s+1}} = 0 \quad (3)$$

を得る. 未定係数法で全ての関係式を詰めていくと, 最終的に (2) と (3) に帰着されることがわかる. 従って, 任意の $r \geq 0$ に対して $a_r = c_{p^r}$, $\mathbf{a} = (a_0, a_1, a_2, \dots)$ とおけば, $\mathbf{a} \in \mathrm{Ker}[\Psi : A^{\mathbb{N}} \rightarrow A^{\mathbb{N}}]$ かつ

$$f(T) = \sum_{r=0}^{\infty} a_r \left[\sum_{i=p^r}^{p^{r+1}-1} \frac{p^r}{i} (-\lambda)^{i-p^r} T^i \right] = \eta^0(\mathbf{a}). \quad \square$$

$\eta^0 : \text{Ker} [\Psi : A^{(\mathbb{N})} \rightarrow A^{(\mathbb{N})}] \rightarrow \text{Hom}_{A-\text{gr}}(\mathcal{G}^{(\lambda)}, \mathbb{G}_{a,A})$ の全単射性は、上と下の補題を組み合わせるにより得られる。

補題 3.2. $a_0, a_1, a_2, \dots \in A$ とする. 任意の $r \geq 0$ に対して $-(-\lambda)^{p^{r+1}-p^r} a_r + p a_{r+1} = 0$ が成り立つと仮定する. このとき, もし

$$\sum_{r=0}^{\infty} a_r \left[\sum_{i=p^r}^{p^{r+1}-1} \frac{p^r}{i} (-\lambda)^{i-p^r} T^i \right] \in A[T, \frac{1}{1+\lambda T}]$$

ならば, 有限個を除くすべての r について $a_r = 0$.

証明. まず

$$(1 + \lambda T)^n \sum_{r=0}^{\infty} a_r \left[\sum_{i=p^r}^{p^{r+1}-1} \frac{p^r}{i} (-\lambda)^{i-p^r} T^i \right] = f(T)$$

とおく. ここで, $f(T) \in A[T]$, $n \geq 0$. 今, $\deg f < p^r$ とする. 両辺の T^{p^r} の係数を比較すると, $1 \leq i \leq r$ なる i について

$$a_r + \sum_{i=1}^r c_i (-\lambda)^{p^r-p^{r-i}} a_{r-i} = 0.$$

ここで $c_i \in \mathbb{Z}_{(p)}$. 仮定より, $1 \leq i \leq r$ なる i について

$$(-\lambda)^{p^r-p^{r-i}} a_{r-i} = p^i a_r.$$

$1 + \sum_{i=1}^r p^i c_i$ は $\mathbb{Z}_{(p)}$ で逆元を持つから, $\deg f < p^r$ なる r について $a_r = 0$. $\square$

次に $\eta^1 : \text{Coker} [\Psi : A^{\mathbb{N}} \rightarrow A^{\mathbb{N}}] \rightarrow H_0^2(\widehat{\mathcal{G}}^{(\lambda)}, \widehat{\mathbb{G}}_{a,A})$ の全単射性である. この証明の本質は, Lazard の comparison lemma (以下「Lazard の補題」で統一) を使って 2-cocycle $g(X, Y) \in Z^2(\widehat{\mathcal{G}}^{(\lambda)}, \widehat{\mathbb{G}}_{a,A})$ を正規化するところにある.

Lazard の補題 ([1, Lem 3]) A を任意の可換環とし, $l \geq 2$ とする. $g(X, Y) \in A[X, Y]$ を,

$$\begin{cases} g(Y, Z) + g(X, Y + Z) = g(X + Y, Z) + g(X, Y), \\ g(X, Y) = g(Y, X) \end{cases}$$

を満たす次数 l の斉次多項式とする. このとき, ある $a \in A$ が存在して

$$g(X, Y) = a C_l(X, Y)$$

と表せる. ここで, $C_l(X, Y)$ は

$$C_l(X, Y) = \begin{cases} \frac{X^l + Y^l - (X + Y)^l}{p} & (l \in P) \\ X^l + Y^l - (X + Y)^l & (l \notin P) \end{cases}$$

で定義される $\mathbb{Z}$ 係数の多項式.

補題 3.3. $g(X, Y) \in Z^2(\widehat{\mathcal{G}}^{(\lambda)}, \widehat{\mathbb{G}}_{a,A})$ とする. このとき, ある $\mathbf{b} = (b_0, b_1, b_2, \dots) \in A^{\mathbb{N}}$ が存在して, $g(X, Y)$ は $\sum_{r=0}^{\infty} b_r \tilde{L}_{p,r}(\lambda; X, Y)$ と cohomologous. (すなわち $H_0^2(\widehat{\mathcal{G}}^{(\lambda)}, \widehat{\mathbb{G}}_{a,A})$ の元として一致する.)

証明. $g(X, Y) \in Z^2(\widehat{\mathcal{G}}^{(\lambda)}, \widehat{\mathbb{G}}_{a,A})$ とし, $g(X, Y)$ を次のように斉次式に分解する:

$$g(X, Y) = \sum_{r=l}^{\infty} g_r(X, Y).$$

$l \geq 2$ としてよい. $g(X, Y)$ は関数等式

$$g(Y, Z) + g(X, \lambda YZ + Y + Z) = g(\lambda XY + X + Y, Z) + g(X, Y)$$

を満たすので, $g_l(X, Y)$ は

$$g_l(Y, Z) + g_l(X, Y + Z) = g_l(X + Y, Z) + g_l(X, Y)$$

を満たす. 従って, Lazard の補題により, ある $a_l \in A$ が存在して $g_l(X, Y) = a_l C_l(X, Y)$. ここで, 任意の $r \geq 1$ に対して

$$t_r(X, Y) = X^r + Y^r - (\lambda XY + X + Y)^r \in B^2(\mathcal{G}^{(\lambda)}, \mathbb{G}_{a,A})$$

とおく. $t_l(X, Y) \equiv X^l + Y^l - (X + Y)^l \pmod{\deg(l+1)}$ だから, $l \notin P$ ならば,

$$g(X, Y) - a_l t_l(X, Y) \equiv 0 \pmod{\deg(l+1)}$$

を得る. $l+1 \notin P$ ならば, $g(X, Y) - a_l t_l(X, Y) \in Z^2(\widehat{\mathcal{G}}^{(\lambda)}, \widehat{\mathbb{G}}_{a,A})$ に対して同じ議論を適用できる. 従って, 結局

$$g(X, Y) - \sum_{r=l}^{p^e-1} a_r t_r(X, Y) = \sum_{r=p^e}^{\infty} g'_r(X, Y)$$

という斉次式分解を得る. ここで $e \geq 1$. さて, $g'_{p^e}(X, Y)$ に対しても Lazard の補題が適用できるので, ある $a_{p^e} \in A$ が存在して

$$g(X, Y) - \sum_{r=l}^{p^e-1} a_r t_r(X, Y) \equiv a_{p^e} C_{p^e}(X, Y) \pmod{\deg(p^e+1)}$$

となる. ここまでは上と変わらないが, $C_{p^e}(X, Y)$ の定義から, 今度は $t_{p^e}(X, Y)$ を用いずに $\tilde{L}_{p,p^e-1}(\lambda; X, Y)$ を使う. (実は, 任意の $r \geq 0$ に対して

$$\tilde{L}_{p,r}(\lambda; X, Y) \equiv C_{p^{r+1}}(X, Y) \pmod{\deg(p^{r+1}+1)}$$

となることが単純な計算によりわかる。) すると、次を得る：

$$g(X, Y) - \sum_{r=l}^{p^e-1} a_r t_r(X, Y) - a_{p^e} \tilde{L}_{p,e-1}(\lambda; X, Y) \equiv 0 \pmod{\deg(p^e + 1)}.$$

$\tilde{L}_{p,e-1}(\lambda; X, Y) \in Z^2(\hat{\mathcal{G}}^{(\lambda)}, \hat{\mathbb{G}}_{a,A})$ だから、上式の左辺は $Z^2(\hat{\mathcal{G}}^{(\lambda)}, \hat{\mathbb{G}}_{a,A})$ の元。従って今までの議論を繰り返すことにより、結局 $A[[X, Y]]$ の中で

$$g(X, Y) - \sum_{\substack{r \geq l \\ r \notin P}} a_r t_r(X, Y) - \sum_{r=e}^{\infty} a_{p^r} \tilde{L}_{p,r-1}(\lambda; X, Y) = 0$$

を得る。左辺の第二項は $B^2(\hat{\mathcal{G}}^{(\lambda)}, \hat{\mathbb{G}}_{a,A})$ の元だから、任意の $r \geq e-1$ に対して $b_r = a_{p^{r+1}}$ とおけば、 $g(X, Y)$ は $\sum_{r=e-1}^{\infty} b_r \tilde{L}_{p,r}(\lambda; X, Y)$ と cohomologous である。□

上の補題から $\eta^1 : \text{Coker}[\Psi : A^N \rightarrow A^N] \rightarrow H_0^2(\hat{\mathcal{G}}^{(\lambda)}, \hat{\mathbb{G}}_{a,A})$ の全射性が従う。さて、残されたのは η^1 の単射性であるが、これは下の補題から得られる。

補題 3.4. $b = (b_0, b_1, b_2, \dots) \in A^N$ とし、 $g(X, Y) = \sum_{r=0}^{\infty} b_r \tilde{L}_{p,r}(\lambda; X, Y) \in A[[X, Y]]$ とおく。このとき、

$$g(X, Y) = f(X) + f(Y) - f(\lambda XY + X + Y) \quad (4)$$

となる $f(T) \in A[[T]]$ が存在するならば、任意の $r \geq 0$ に対して

$$b_r = -(-\lambda)^{p^{r+1}-p^r} a_r + p a_{r+1}$$

となる $a = (a_0, a_1, a_2, \dots) \in A^N$ が存在する。

証明. 誌面の都合上とてもすべての計算を紹介することはできない。手法は、homomorphism を決定したときと同様、(4) 式に対して未定係数法を用いる。詳細は [6, Lem3.6] を参照のこと。□

$\eta^1 : \text{Coker}[\Psi : A^{(N)} \rightarrow A^{(N)}] \rightarrow H_0^2(\hat{\mathcal{G}}^{(\lambda)}, \hat{\mathbb{G}}_{a,A})$ の全単射性は、 $g(X, Y) \in Z^2(\hat{\mathcal{G}}^{(\lambda)}, \hat{\mathbb{G}}_{a,A})$ が多項式になるための条件を調べることによって得られる。やはりここでも未定係数法を用いる。詳細は [6, Cor3.5] を参照のこと。

4. 証明の概略 (2)

この節では主定理の別証明について触れる。準備として、前半では関口-諏訪 [3] の主結果を紹介する。そして後半にて別証明の概略を解説する。 A を $\mathbb{Z}_{(p)}$ 代数、 $\lambda \in A$ とする。

4.1. 関口-諏訪 [3] の主結果

まず Aritn-Hasse exponential series を拡張した形式冪級数を定義する。詳細は関口-諏

訪 [3, Ch2] を参照されたい.

4.1.1. U, Λ を不定元とし, $\mathbb{Q}[U, \Lambda]$ 係数の形式冪級数 $E_p(U, \Lambda; T)$ を

$$E_p(U, \Lambda; T) = (1 + \Lambda T)^{\frac{U}{\Lambda}} \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \Lambda^{p^k} T^{p^k} \right)^{\frac{1}{p^k} \left\{ \left(\frac{U}{\Lambda} \right)^{p^k} - \left(\frac{U}{\Lambda} \right)^{p^{k-1}} \right\}}$$

で定義する. これは Artin-Hasse exponential series

$$E_p(T) = \exp \left(\sum_{r \geq 0} \frac{T^{p^r}}{p^r} \right) \in \mathbb{Z}_{(p)}[[T]]$$

を用いて

$$E_p(U, \Lambda; T) = \begin{cases} \prod_{(k,p)=1} E_p(U \Lambda^{k-1} T^k)^{(-1)^{k-1}/k} & (p > 2), \\ \prod_{(k,2)=1} E_p(U \Lambda^{k-1} T^k)^{1/k} \left[\prod_{(k,2)=1} E_p(U \Lambda^{2k-1} T^{2k})^{1/k} \right]^{-1} & (p = 2) \end{cases}$$

と表せることが示される. $(k, p) = 1$ ならば $(1+T)^{1/k} \in \mathbb{Z}_{(p)}[[T]]$ となることから, $E_p(U, \Lambda; T) \in \mathbb{Z}_{(p)}[U, \Lambda][[T]]$. 特に, $E_p(1, 0; T) = E_p(T)$, $E_p(\Lambda, \Lambda; T) = 1 + \Lambda T$ である.

$\mathbb{U} = (U_0, U_1, U_2, \dots)$ とする. $E_p(\mathbb{U}, \Lambda; T) \in \mathbb{Z}_{(p)}[U_0, U_1, U_2, \dots, \Lambda][[T]]$ を

$$E_p(\mathbb{U}, \Lambda; T) = \prod_{k=0}^{\infty} E_p(U_k, \Lambda^{p^k}; T^{p^k}).$$

で定義する. さらに, $F_p(\mathbb{U}, \Lambda; X, Y) \in \mathbb{Z}_{(p)}[U_0, U_1, U_2, \dots, \Lambda][[X, Y]]$ を

$$F_p(\mathbb{U}, \Lambda; X, Y) = \prod_{k=1}^{\infty} \left[\frac{(1 + \Lambda^{p^k} X^{p^k})(1 + \Lambda^{p^k} Y^{p^k})}{1 + \Lambda^{p^k}(X + Y + \Lambda XY)^{p^k}} \right]^{\Phi_{k-1}(\mathbb{U})/p^k \Lambda^{p^k}}$$

で定義する. ここで $\Phi_n(\mathbb{U})$ は Witt 多項式.

4.1.2. 群準同型 $\xi^0 : W(A) \rightarrow A[[T]]^\times$ と $\xi^1 : W(A) \rightarrow Z^2(\hat{\mathcal{G}}^{(\lambda)}, \hat{\mathbb{G}}_{m,A})$ を, それぞれ $\mathbf{a} \mapsto E_p(\mathbf{a}, \lambda; T)$, $\mathbf{a} \mapsto F_p(\mathbf{a}, \lambda; X, Y)$ によって定義する. F を Witt 環の Frobenius 自己準同型とし, $F^{(\lambda)} = F - (\lambda^{p-1}, 0, 0, \dots)$ とおく. このとき, 次の可換図式を得る:

$$\begin{array}{ccc} W(A) & \xrightarrow{\xi^0} & A[[T]]^\times \\ F^{(\lambda)} \downarrow & & \downarrow \partial \\ W(A) & \xrightarrow{\xi^1} & Z^2(\hat{\mathcal{G}}^{(\lambda)}, \hat{\mathbb{G}}_{m,A}). \end{array}$$

ここで $\partial : A[[T]]^\times \rightarrow Z^2(\widehat{\mathcal{G}}^{(\lambda)}, \widehat{\mathbb{G}}_{m,A})$ は $f(T) \mapsto f(X)f(Y)f(\lambda XY + X + Y)^{-1}$ で定義される cocycle map. このとき, ξ^0 と ξ^1 は群準同型

$$\begin{aligned}\xi^0 : {}_{F(\lambda)}W(A) &\rightarrow \text{Hom}_{A\text{-gr}}(\widehat{\mathcal{G}}^{(\lambda)}, \widehat{\mathbb{G}}_{m,A}); \mathbf{a} \mapsto E_p(\mathbf{a}, \lambda; T), \\ \xi^1 : W(A)/F^{(\lambda)} &\rightarrow H_0^2(\widehat{\mathcal{G}}^{(\lambda)}, \widehat{\mathbb{G}}_{m,A}); \mathbf{a} \mapsto F_p(\mathbf{a}, \lambda; X, Y)\end{aligned}$$

を誘導する. ここで ${}_{F(\lambda)}W(A)$ は $F^{(\lambda)} : W(A) \rightarrow W(A)$ の核を意味する. このとき, 関口-諏訪 [3] の主結果は次のように述べられる.

定理 4.1.3. ([3, Th 2.19.1]) 群準同型

$$\begin{aligned}\xi^0 : {}_{F(\lambda)}W(A) &\rightarrow \text{Hom}_{A\text{-gr}}(\widehat{\mathcal{G}}^{(\lambda)}, \widehat{\mathbb{G}}_{m,A}), \\ \xi^1 : W(A)/F^{(\lambda)} &\rightarrow H_0^2(\widehat{\mathcal{G}}^{(\lambda)}, \widehat{\mathbb{G}}_{m,A})\end{aligned}$$

は全単射.

4.2. 証明の概略 (2)

$A[\varepsilon]$ を双数の環 (すなわち, $\varepsilon^2 = 2$ なる ε を A に添加した環) とする. まず, 加法群と乗法群を結びつけるために, 双数の環を介した群の完全列をいくつか定義する.

4.2.1. 群準同型 $A[[T]] \rightarrow (A[\varepsilon][[T]])^\times$, $(A[\varepsilon][[T]])^\times \rightarrow A[[T]]^\times$ を, それぞれ $f(T) \mapsto 1 + \varepsilon f(T)$, $f(T) + \varepsilon g(T) \mapsto f(T)$ によって定義する. このとき,

$$0 \rightarrow A[[T]] \rightarrow (A[\varepsilon][[T]])^\times \rightarrow A[[T]]^\times \rightarrow 0$$

は群の完全列. さらに, 群準同型 $Z^2(\widehat{\mathcal{G}}^{(\lambda)}, \widehat{\mathbb{G}}_{a,A}) \rightarrow Z^2(\widehat{\mathcal{G}}^{(\lambda)}, \widehat{\mathbb{G}}_{m,A[\varepsilon]})$, $Z^2(\widehat{\mathcal{G}}^{(\lambda)}, \widehat{\mathbb{G}}_{m,A[\varepsilon]}) \rightarrow Z^2(\widehat{\mathcal{G}}^{(\lambda)}, \widehat{\mathbb{G}}_{m,A})$ を, それぞれ $f(X, Y) \mapsto 1 + \varepsilon f(X, Y)$, $f(X, Y) + \varepsilon g(X, Y) \mapsto f(X, Y)$ で定義する. このとき,

$$0 \rightarrow Z^2(\widehat{\mathcal{G}}^{(\lambda)}, \widehat{\mathbb{G}}_{a,A}) \rightarrow Z^2(\widehat{\mathcal{G}}^{(\lambda)}, \widehat{\mathbb{G}}_{m,A[\varepsilon]}) \rightarrow Z^2(\widehat{\mathcal{G}}^{(\lambda)}, \widehat{\mathbb{G}}_{m,A}) \rightarrow 0$$

は群の完全列.

Augmentation homomorphism $W(A[\varepsilon]) \rightarrow W(A)$ は $(a_0 + b_0\varepsilon, a_1 + b_1\varepsilon, a_2 + b_2\varepsilon, \dots) \mapsto (a_0, a_1, a_2, \dots)$ で定義される. このとき,

$$\text{Ker}[W(A[\varepsilon]) \rightarrow W(A)] = \{(b_0\varepsilon, b_1\varepsilon, b_2\varepsilon, \dots); b_i \in A \text{ for all } i \geq 0\}$$

は $W(A[\varepsilon])$ の square null ideal で, 加法群として $A^\mathbb{N}$ と同型. 従って, 群の完全列

$$0 \rightarrow A^\mathbb{N} \rightarrow W(A[\varepsilon]) \rightarrow W(A) \rightarrow 0$$

を得る.

$F : W(A[\varepsilon]) \rightarrow W(A[\varepsilon])$ は $A^\mathbb{N}$ の自己準同型 $(a_0, a_1, a_2, \dots) \mapsto (pa_1, pa_2, pa_3, \dots)$ を誘導する. $c = (c_0, c_1, c_2, \dots) \in W(A)$ とする. このとき, $F - c : W(A[\varepsilon]) \rightarrow W(A[\varepsilon])$ は

$A^{\mathbb{N}}$ の自己準同型 $(a_0, a_1, a_2, \dots) \mapsto (pa_1 - \Phi_0(c)a_0, pa_2 - \Phi_1(c)a_1, pa_3 - \Phi_2(c)a_2, \dots)$ を誘導する. 特に, $F^{(\lambda)} : W(A[\varepsilon]) \rightarrow W(A[\varepsilon])$ は

$$(a_0, a_1, a_2, \dots) \mapsto (pa_{r+1} - \lambda^{p^{r+1}-p^r} a_r)_{r \geq 0}$$

を誘導する. これを Φ と書く.

4.2.2. Λ を不定元とし, $\mathbb{Q}[\Lambda]$ 係数の形式冪級数 $L_p(\Lambda; T)$ と $L_{p,r}(\Lambda; X, Y)$ を, それぞれ

$$L_p(\Lambda; T) = \frac{1}{\Lambda} \left\{ \log(1 + \Lambda T) - \frac{1}{p} \log(1 + \Lambda^p T^p) \right\},$$

$$L_{p,r}(\Lambda; X, Y) = \frac{1}{p\Lambda^{p^{r+1}}} \log \frac{(1 + \Lambda^{p^{r+1}} X^{p^{r+1}})(1 + \Lambda^{p^{r+1}} Y^{p^{r+1}})}{1 + \Lambda^{p^{r+1}}(X + Y + \Lambda XY)^{p^{r+1}}}$$

で定義する. 単純な計算により

$$L_p(\Lambda; T) = \begin{cases} \sum_{(k,p)=1} \frac{(-\Lambda)^{k-1}}{k} T^k & (p > 2), \\ \sum_{(k,2)=1} \frac{\Lambda^{k-1}}{k} T^k - \sum_{(k,2)=1} \frac{\Lambda^{2k-1}}{k} T^{2k} & (p = 2) \end{cases}$$

となる. すなわち, $L_p(\Lambda; T) \in \mathbb{Z}_{(p)}[\Lambda][[T]]$. さらに,

$$\frac{(1 + \Lambda^{p^{r+1}} X^{p^{r+1}})(1 + \Lambda^{p^{r+1}} Y^{p^{r+1}})}{1 + \Lambda^{p^{r+1}}(X + Y + \Lambda XY)^{p^{r+1}}} \equiv 1 \pmod{p}$$

に注意すると $L_{p,r}(\Lambda; X, Y) \in \mathbb{Z}_{(p)}[\Lambda][[X, Y]]$ であることもわかる.

4.2.3. 群準同型 $\xi^0 : A^{\mathbb{N}} \rightarrow A[[T]]$, $\xi^0 : W(A[\varepsilon]) \rightarrow (A[\varepsilon][[T]])^\times$ を, それぞれ

$$\xi^0 : A^{\mathbb{N}} \rightarrow A[[T]]; \mathbf{a} \mapsto \sum_{r=0}^{\infty} a_r L_p(\lambda^{p^r}; T^{p^r})$$

$$\xi^0 : W(A[\varepsilon]) \rightarrow (A[\varepsilon][[T]])^\times; \mathbf{a} \mapsto E_p(\mathbf{a}, \lambda; T)$$

で定義する. さらに, $\xi^1 : A^{\mathbb{N}} \rightarrow Z^2(\widehat{\mathcal{G}}^{(\lambda)}, \widehat{\mathbb{G}}_{a,A})$ と $\xi^1 : W(A[\varepsilon]) \rightarrow Z^2(\widehat{\mathcal{G}}^{(\lambda)}, \widehat{\mathbb{G}}_{m,A[\varepsilon]})$ を

$$\xi^1 : A^{\mathbb{N}} \rightarrow Z^2(\widehat{\mathcal{G}}^{(\lambda)}, \widehat{\mathbb{G}}_{a,A}); \mathbf{a} \mapsto \sum_{r=0}^{\infty} a_r L_{p,r}(\lambda; X, Y)$$

$$\xi^1 : W(A[\varepsilon]) \rightarrow Z^2(\widehat{\mathcal{G}}^{(\lambda)}, \widehat{\mathbb{G}}_{m,A[\varepsilon]}); \mathbf{a} \mapsto F_p(\mathbf{a}, \lambda; X, Y)$$

で定義する.

以上の準備の下, 我々は次の補題を得る:

補題 4.2.4. 次の図式は可換.

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \longrightarrow & A[[T]] & \longrightarrow & (A[\varepsilon][[T]])^\times & \longrightarrow & A[[T]]^\times \longrightarrow 0 \\
& & \nearrow \xi^0 & \downarrow \partial & \nearrow \xi^0 & \downarrow \partial & \nearrow \xi^0 \\
0 & \longrightarrow & A^N & \longrightarrow & W(A[\varepsilon]) & \longrightarrow & W(A) \longrightarrow 0 \\
& & \downarrow \Phi & & \downarrow F^{(\lambda)} & & \downarrow F^{(\lambda)} \\
& & 0 & \longrightarrow & Z^2(\widehat{\mathcal{G}}^{(\lambda)}, \widehat{\mathbb{G}}_{a,A}) & \longrightarrow & Z^2(\widehat{\mathcal{G}}^{(\lambda)}, \widehat{\mathbb{G}}_{m,A[\varepsilon]}) \longrightarrow 0 \\
& & \nearrow \xi^1 & \downarrow \partial & \nearrow \xi^1 & \downarrow \partial & \nearrow \xi^1 \\
0 & \longrightarrow & A^N & \longrightarrow & W(A[\varepsilon]) & \longrightarrow & W(A) \longrightarrow 0
\end{array}$$

証明. ポイントとなるのは, 上で定義した $E_p(\mathbb{U}, \Lambda; T)$ と $L_p(\Lambda; T)$, また $F_p(\mathbb{U}, \Lambda; X, Y)$ と $L_{p,r}(\Lambda; X, Y)$ の間に次のような関係があることである (それほど自明ではない):

$$\begin{aligned}
E_p(\mathbb{U}, \Lambda; T) &\equiv 1 + \sum_{r=0}^{\infty} U_r L_p(\Lambda^{p^r}; T^{p^r}) \pmod{(U_0, U_1, U_2, \dots)^2}, \\
F_p(\mathbb{U}, \Lambda; X, Y) &\equiv 1 + \sum_{r=0}^{\infty} U_r L_{p,r}(\Lambda; X, Y) \pmod{(U_0, U_1, U_2, \dots)^2}.
\end{aligned}$$

これより, $\mathbf{b} = (a_0\varepsilon, a_1\varepsilon, a_2\varepsilon, \dots)$ とすると

$$\begin{aligned}
E_p(\mathbf{b}, \lambda; T) &= 1 + \sum_{r=0}^{\infty} (a_r\varepsilon) L_p(\lambda^{p^r}; T^{p^r}) = 1 + \varepsilon \sum_{r=0}^{\infty} a_r L_p(\lambda^{p^r}; T^{p^r}), \\
F_p(\mathbf{b}, \lambda; X, Y) &= 1 + \sum_{r=0}^{\infty} (a_r\varepsilon) L_{p,r}(\lambda; X, Y) = 1 + \varepsilon \sum_{r=0}^{\infty} a_r L_{p,r}(\lambda; X, Y)
\end{aligned}$$

を得る. その他の部分については比較的容易に確かめられる. $\square$

4.2.5. $B = A[\varepsilon]$ とおき, $\prod_{B/A}$ を Weil restriction functor とする. 分裂する形式群スキームの完全列

$$0 \rightarrow \widehat{\mathbb{G}}_{a,A} \rightarrow \left[\prod_{B/A} \mathbb{G}_{m,B} \right]^\wedge \rightarrow \widehat{\mathbb{G}}_{m,A} \rightarrow 0$$

から, 長完全列

$$\begin{aligned}
0 &\rightarrow \mathrm{Hom}_{A\text{-gr}}(\widehat{\mathcal{G}}^{(\lambda)}, \widehat{\mathbb{G}}_{a,A}) \rightarrow \mathrm{Hom}_{B\text{-gr}}(\widehat{\mathcal{G}}^{(\lambda)}, \widehat{\mathbb{G}}_{m,B}) \rightarrow \mathrm{Hom}_{A\text{-gr}}(\widehat{\mathcal{G}}^{(\lambda)}, \widehat{\mathbb{G}}_{m,A}) \rightarrow 0, \\
0 &\rightarrow H_0^2(\widehat{\mathcal{G}}^{(\lambda)}, \widehat{\mathbb{G}}_{a,A}) \rightarrow H_0^2(\widehat{\mathcal{G}}^{(\lambda)}, \widehat{\mathbb{G}}_{m,B}) \rightarrow H_0^2(\widehat{\mathcal{G}}^{(\lambda)}, \widehat{\mathbb{G}}_{m,A}) \rightarrow 0
\end{aligned}$$

を得る. 上の補題と合わせ, 本稿最終ページの可換図式を得る. 従って, 関口-諏訪 [3] の主結果から, $\xi^0 : \mathrm{Ker} \Phi \rightarrow \mathrm{Hom}_{A\text{-gr}}(\widehat{\mathcal{G}}^{(\lambda)}, \widehat{\mathbb{G}}_{a,A})$, $\xi^1 : \mathrm{Coker} \Phi \rightarrow H_0^2(\widehat{\mathcal{G}}^{(\lambda)}, \widehat{\mathbb{G}}_{a,A})$ は同型.

4.2.6. $a_0, a_1, a_2, \dots \in A$ とする. 任意の $r \geq 0$ に対して $\lambda^{p^{r+1}-p^r} a_r = p a_{r+1}$ が成り立つ

$$\sum_{r=0}^{\infty} a_r L_p(\lambda^{p^r}; T^{p^r}) = \begin{cases} \sum_{r=0}^{\infty} a_r \left[\sum_{k=p^r}^{p^{r+1}-1} \frac{p^r}{k} (-\lambda)^{k-p^r} T^k \right] & (p > 2), \\ a_0 T - \sum_{r=1}^{\infty} a_r \left[\sum_{k=2^r}^{2^{r+1}-1} \frac{2^r}{k} (-\lambda)^{k-2^r} T^k \right] & (p = 2) \end{cases}$$

となることが示される。また、任意の $r \geq 0$ に対して

$$L_{p,r}(\Lambda; X, Y) = \frac{p^r}{(-\Lambda)^{p^{r+1}-1}} \sum_{k=1}^{p^{r+1}-1} \frac{(-\Lambda)^{k-1}}{k} \{X^k + Y^k - (X + Y + \Lambda XY)^k\}$$

と定義する。このとき、 $H_0^2(\widehat{\mathcal{G}}^{(\lambda)}, \widehat{\mathbb{G}}_{a,A})$ の元として

$$[L_{p,r}(\lambda; X, Y)] = \begin{cases} [\tilde{L}_{p,r}(\lambda; X, Y)] & (p > 2), \\ -[\tilde{L}_{p,r}(\lambda; X, Y)] & (p = 2) \end{cases}$$

となることがわかる。これより、群準同型

$$\begin{aligned} \eta^0 : \text{Ker} [\Psi : A^{\mathbb{N}} \rightarrow A^{\mathbb{N}}] &\rightarrow \text{Hom}_{A\text{-gr}}(\widehat{\mathcal{G}}^{(\lambda)}, \widehat{\mathbb{G}}_{a,A}), \\ \eta^1 : \text{Coker} [\Psi : A^{\mathbb{N}} \rightarrow A^{\mathbb{N}}] &\rightarrow H_0^2(\widehat{\mathcal{G}}^{(\lambda)}, \widehat{\mathbb{G}}_{a,A}) \end{aligned}$$

の全単射性が導かれる。

参考文献

- [1] M.LAZARD, *Sur les groupes de Lie formels à un paramètre*, Bulletin de la Société Mathématique de France 83 (1955), pp.251-274.
- [2] T.SEKIGUCHI, N.SUWA, *Some cases of extensions of group schemes over a discrete valuation ring I*, Journal of The Faculty of Science, the University of Tokyo, Sec.IA, Vol.38, No.1 (1991), pp.1-45.
- [3] T.SEKIGUCHI, N.SUWA, *A note on extensions of algebraic and formal groups, IV*, Preprint series, CHUO MATH No.48 (1999).
- [4] N.SUWA, *A letter to T.Sekiguchi* (1999).
- [5] B.WEISFEILER, *On a case of extensions of group schemes*, Transactions of the American Mathematical Society, Vol.248, No.1 (1979), pp.171-189.
- [6] —, *On the extensions of the formal group schemes $\widehat{\mathcal{G}}^{(\lambda)}$ by $\widehat{\mathbb{G}}_a$ over a $\mathbb{Z}_{(p)}$ -algebra*, Preprint (2000).
- [DG] M.DEMAZURE, P.GABRIEL, *Groupes algébriques, Tome 1*, Masson-North-Holland (1970).
- [HZ] M.HAZEWINKEL, *Formal groups and applications*, Academic Press (1978).

$$\begin{array}{ccccccc}
& & 0 & & 0 & & 0 \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
& 0 & \rightarrow & \text{Hom}_{A\text{-gr}}(\widehat{\mathcal{G}}^{(\lambda)}, \widehat{\mathbb{G}}_{a,A}) & \rightarrow & \text{Hom}_{A[\varepsilon]\text{-gr}}(\widehat{\mathcal{G}}^{(\lambda)}, \widehat{\mathbb{G}}_{m,A[\varepsilon]}) & \rightarrow & \text{Hom}_{A\text{-gr}}(\widehat{\mathcal{G}}^{(\lambda)}, \widehat{\mathbb{G}}_{m,A}) & \rightarrow & 0 \\
& & \searrow \xi^0 & & \searrow \xi^0 & & \searrow \xi^0 \\
0 & \rightarrow & \text{Ker } \Phi & \xrightarrow{F^{(\lambda)}} & W(A[\varepsilon]) & \xrightarrow{F^{(\lambda)}} & W(A) & \rightarrow & 0 \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
& 0 & \rightarrow & A[[T]] & \rightarrow & (A[\varepsilon][[T]])^\times & \rightarrow & A[[T]]^\times & \rightarrow & 0 \\
& & \searrow \xi^0 & & \searrow \xi^0 & & \searrow \xi^0 \\
0 & \rightarrow & A^{\mathbb{N}} & \xrightarrow{\partial} & W(A[\varepsilon]) & \xrightarrow{\partial} & W(A) & \rightarrow & 0 \\
& & \downarrow \Phi & & \downarrow F^{(\lambda)} & & \downarrow F^{(\lambda)} & & \\
& 0 & \rightarrow & Z^2(\widehat{\mathcal{G}}^{(\lambda)}, \widehat{\mathbb{G}}_{a,A}) & \rightarrow & Z^2(\widehat{\mathcal{G}}^{(\lambda)}, \widehat{\mathbb{G}}_{m,A[\varepsilon]}) & \rightarrow & Z^2(\widehat{\mathcal{G}}^{(\lambda)}, \widehat{\mathbb{G}}_{m,A}) & \rightarrow & 0 \\
& & \searrow \xi^1 & & \searrow \xi^1 & & \searrow \xi^1 \\
0 & \rightarrow & A^{\mathbb{N}} & \xrightarrow{\partial} & W(A[\varepsilon]) & \xrightarrow{\partial} & W(A) & \rightarrow & 0 \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
& 0 & \rightarrow & H_0^2(\widehat{\mathcal{G}}^{(\lambda)}, \widehat{\mathbb{G}}_{a,A}) & \rightarrow & H_0^2(\widehat{\mathcal{G}}^{(\lambda)}, \widehat{\mathbb{G}}_{m,A[\varepsilon]}) & \rightarrow & H_0^2(\widehat{\mathcal{G}}^{(\lambda)}, \widehat{\mathbb{G}}_{m,A}) & \rightarrow & 0 \\
& & \searrow \xi^1 & & \searrow \xi^1 & & \searrow \xi^1 \\
0 & \rightarrow & \text{Coker } \Phi & \xrightarrow{F^{(\lambda)}} & W(A[\varepsilon])/F^{(\lambda)} & \xrightarrow{F^{(\lambda)}} & W(A)/F^{(\lambda)} & \rightarrow & 0 \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
& & 0 & & 0 & & 0 & & \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
& & 0 & & 0 & & 0 & &
\end{array}$$