

Borsuk の対心定理の様々な応用

Applications of Borsuk's antipodal theorem

川崎英文, 九州大学大学院数理学研究院*

HIDEFUMI KAWASAKI †

FACULTY OF MATHEMATICS, KYUSHU UNIVERSITY

Abstract

トポロジーがタンパク質の構造解析やデータ解析に応用されるようになって久しい. 最適化理論やゲーム理論の分野でも不動点定理は重要な道具であるが, トポロジーを十分に活用しているとは言いえない. 筆者はこの2年間 Borsuk の対心定理の最適化理論への応用を図ってきた. 本稿ではこの研究の経緯を解説する.

1 序

Borsuk の対心定理 [1] は n 次元球面 S^n から n 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ への連続写像 φ には $\varphi(\mathbf{u}) = \varphi(-\mathbf{u})$ を満たす点 $\mathbf{u} \in S^n$ が存在することを主張する. Borsuk の対心定理には, それと同等な定理がいくつかある. 組合せ版の Tucker の補題や, 集合被覆版の LSB 定理などである. また, 応用としてはハムサンドウィッチ定理, 離散的なハムサンドウィッチ定理にモーメント曲線を絡めたネックレス分割定理, Lovász による Kneser 予想の解決等がよく知られている (Matoušek [10]). 本稿ではそれらとは別に, 筆者が現在研究している Borsuk の対心定理の応用を紹介する.

2 ハムサンドウィッチ定理

最初にハムサンドウィッチ定理の手法を説明する. μ を $\mathbb{R}^n$ のルベグ測度とし, A_i ($i = 1, \dots, n$) を測度が正の $\mathbb{R}^n$ の部分集合とする. ハムサンドウィッチ定理は A_i ($i = 1, \dots, n$) の測度を同時に2等分する超平面が存在することを主張する.

S^n の元 $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n, u_{n+1})$ に対し, 最初の n 次元ベクトルを $u = (u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^n$ で表すと, $\mathbf{u} = (u, u_{n+1})$ となる. $\langle u, x \rangle$ を $\mathbb{R}^n$ の内積 $u_1x_1 + \dots + u_nx_n$ として, 各 $\mathbf{u} \in S^n$ に対し, 超平面 $H_{\mathbf{u}} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle u, x \rangle = u_{n+1}\}$ と2つの閉半空間を

$$H_{\mathbf{u}}^+ = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle u, x \rangle \geq u_{n+1}\}, \quad H_{\mathbf{u}}^- = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle u, x \rangle \leq u_{n+1}\} \quad (2.1)$$

で定義する. $\varphi_i(\mathbf{u}) := \mu(A_i \cap H_{\mathbf{u}}^+)$, $\varphi := (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ で S^n から $\mathbb{R}^n$ への連続写像を定義すると, Borsuk の対心定理により, $\exists \mathbf{u} \in S^n$ s.t. $\varphi(\mathbf{u}) = \varphi(-\mathbf{u})$. $H_{\mathbf{u}}^+ = H_{-\mathbf{u}}^-$ なので,

$$\mu(A_i \cap H_{\mathbf{u}}^+) = \mu(A_i \cap H_{-\mathbf{u}}^-) \quad (i = 1, \dots, n)$$

となる. これがハムサンドウィッチ定理の主張と証明である.

*kawasaki.hidefumi.245@m.kyushu-u.ac.jp

†本研究は科研費 JSPS KAKENHI Grant Number 20K03751 の助成を受けている.

3 パラメトリック最適化問題に対する対心定理

筆者の最初の研究結果は、パラメータ $\mathbf{u} \in S^n$ の非線形最適化問題に対する対心定理である。ここでは、ハムサンドウィッチ定理を参考に、閉半空間 $H_{\mathbf{u}}^+$ を用いた。詳細は川崎 [3, 5]。

本節では A_i を $\mathbb{R}^n$ の空でないコンパクト凸集合、 $f_i: \mathbb{R}^n \times S^n \rightarrow \mathbb{R}$ を連続関数とする。このとき、次の最適値関数

$$F_i(\mathbf{u}) := \max_{x \in A_i \cap H_{\mathbf{u}}^+} f_i(x, \mathbf{u}).$$

は $A_i \cap H_{\mathbf{u}}^+$ が非空な領域では連続であるが、非空から空に変わるときに不連続 (図 1) になるので、Borsuk の対心定理が適用できない。

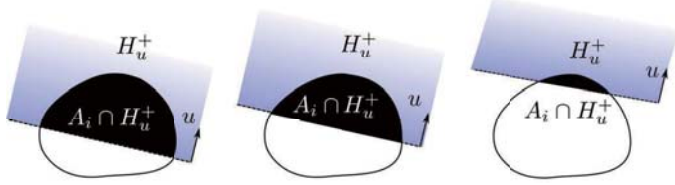


図 1: 最適値関数 $F_i(\mathbf{u})$ の不連続性。

そこで、次の写像 $\psi = (\psi_1, \dots, \psi_n): S^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ を導入した ([5])。 $A_i \cap H_{\mathbf{u}}^+$ が非空から空に変わるときに ψ_i の値が 0 になることが期待できるからである。

$$\psi_i(\mathbf{u}) := \begin{cases} \max_{x \in A_i \cap H_{\mathbf{u}}^+} f_i(x, \mathbf{u}) - \min_{x \in A_i \cap H_{\mathbf{u}}^+} f_i(x, \mathbf{u}) & (A_i \cap H_{\mathbf{u}}^+ \neq \emptyset), \\ 0 & (A_i \cap H_{\mathbf{u}}^+ = \emptyset). \end{cases} \quad (3.1)$$

実際、 A_i の境界が面や線分を含まないならば (A_i の狭義凸性とよぶ)、 ψ は S^n 全体で連続になる。しかし、Borsuk の対心定理を ψ に適用すると、 $\mathbf{u} \in S^n$ が自明な解になる可能性があり、それを排除するために、最適値関数を次のように改良した。

$$\varphi_i(\mathbf{u}) := \begin{cases} \max_{x \in A_i \cap H_{\mathbf{u}}^+} f_i(x, \mathbf{u}) - \min_{x \in A_i \cap H_{\mathbf{u}}^+} f_i(x, \mathbf{u}) & (A_i \cap H_{\mathbf{u}}^+ \neq \emptyset), \\ \delta^*(\mathbf{u} | A_i) - u_{n+1} & (A_i \cap H_{\mathbf{u}}^+ = \emptyset), \end{cases} \quad (3.2)$$

ここで、 δ^* は支持関数 $\delta^*(\mathbf{u} | A_i) := \max\{\langle \mathbf{u}, x \rangle \mid x \in A_i\}$ である。定義式 (3.2) の場合分けは前者が本質的で、後者は自明な解を排除するための仕掛けである。また、後者は $A_i \cap H_{\mathbf{u}}^+ = \emptyset$ と $\delta^*(\mathbf{u} | A_i) - u_{n+1} < 0$ が同値であることから導出した。このとき、 φ は連続であり、Borsuk の対心定理から次の結果が得られる。

定理 1 (パラメトリック最適化問題の対心定理 1) A_i の狭義凸性と、関数 $f_i(x, \mathbf{u})$ が $\mathbf{u}$ に関して対心的であることを仮定する。すなわち、 $f_i(x, -\mathbf{u}) = -f_i(x, \mathbf{u})$ が任意の $(x, \mathbf{u}) \in \mathbb{R}^n \times S^n$ で成立するとする。このとき、ある $\mathbf{u} \in S^n$ が存在して、 $A_i \cap H_{\mathbf{u}}^+$ と $A_i \cap H_{\mathbf{u}}^-$ は非空であり、すべての $i = 1, \dots, n$ に対して次の等式が成立する。

$$\max_{x \in A_i \cap H_{\mathbf{u}}^+} f_i(x, \mathbf{u}) - \min_{x \in A_i \cap H_{\mathbf{u}}^+} f_i(x, \mathbf{u}) = \max_{x \in A_i \cap H_{\mathbf{u}}^-} f_i(x, \mathbf{u}) - \min_{x \in A_i \cap H_{\mathbf{u}}^-} f_i(x, \mathbf{u}). \quad (3.3)$$

特に, $f_i(x, \mathbf{u}) = \langle u, x \rangle$ をとると, A_i の狭義凸性を必要とせずに, 次の定理が得られる.

定理 2 $A_i \subset \mathbb{R}^n$ ($i = 1, \dots, n$) を内部が非空なコンパクト凸集合とすると, ある $\mathbf{u} \in S^n$ が存在して, $A_i \cap H_{\mathbf{u}}^+$ と $A_i \cap H_{\mathbf{u}}^-$ は非空であり

$$\delta^*(u \mid A_i \cap H_{\mathbf{u}}^+) - \delta_*(u \mid A_i \cap H_{\mathbf{u}}^+) = \delta^*(u \mid A_i \cap H_{\mathbf{u}}^-) - \delta_*(u \mid A_i \cap H_{\mathbf{u}}^-) \quad (3.4)$$

がすべての $i = 1, \dots, n$ で成立する. ただし, $\delta_*(u \mid X) := \min_{x \in X} \langle u, x \rangle$.

4 非線形最適化問題に対する別のアプローチ

前節の方法は集合値写像 $\mathbf{u} \mapsto A_i \cap H_{\mathbf{u}}^+$ の連続性を必要とし, それを保証するために狭義凸性などを仮定した. 加えて証明も面倒である. 本節では別のアプローチを考える. 詳細は川崎 [6].

本節を通して以下の仮定を設ける (前節より弱い仮定). $A_i \subset \mathbb{R}^n$ を非空なコンパクト集合とする (凸性は不要). $f_i : \mathbb{R}^n \times D^n \rightarrow \mathbb{R}$ を $u \in D^n$ に関して対心的な連続関数とする (よって $f_i(x, \mathbf{0}) = 0$). ここで, D^n は n 次元閉球である. γ_i を任意の実定数とする.

このとき, $\mathbf{u} = (u, u_{n+1}) \in S^n$ として, 最適値関数 κ_i を (4.1) で定義すると, κ_i は連続になる.

$$\kappa_i(\mathbf{u}) := \max_{x \in A_i} f_i(x, u) - \gamma_i u_{n+1}. \quad (4.1)$$

Borsuk の対心定理を $\kappa = (\kappa_1, \dots, \kappa_n)$ に適用すると, 次の定理が得られる.

定理 3 (パラメトリック最適化問題の対心定理 2)

(1) 任意の $\gamma_1, \dots, \gamma_n \in \mathbb{R}$ に対し, ある $\mathbf{u} = (u, u_{n+1}) \in S^n$ が存在して, $u \neq \mathbf{0}$ かつ

$$\max_{x \in A_i} f_i(x, u) + \min_{x \in A_i} f_i(x, u) = 2\gamma_i u_{n+1} \quad (i = 1, \dots, n). \quad (4.2)$$

(2) $\max_{x \in A_i} f_i(x, u) + \min_{x \in A_i} f_i(x, u)$ が i に依存しないような非零な $u \in D^n$ が存在する.

(3) (4.3) を満たす非零ベクトル $v \in D^n$ が存在しなければ

$$\max_{x \in A_i} f_i(x, v) + \min_{x \in A_i} f_i(x, v) = 0, \quad (i = 1, \dots, n), \quad (4.3)$$

任意の $\gamma_1, \dots, \gamma_n \in \mathbb{R}$ に対し, $\max_{x \in A_i} f_i(x, u) + \min_{x \in A_i} f_i(x, u)$ ($i = 1, \dots, n$) の比が $\gamma_1 : \gamma_2 : \dots : \gamma_n$ になるような D^n の内点 u が存在する.

定理 3 で $f_i(x, u) = \langle u, x \rangle$ をとると

$$\max_{x \in A_i} f(x, u) =: \delta^*(u \mid A_i), \quad \min_{x \in A_i} f(x, u) =: \delta_*(u \mid A_i)$$

となる. その幾何学的意味を把握するために

$$c_i(u) := \frac{\delta^*(u \mid A_i) + \delta_*(u \mid A_i)}{2}$$

とおくと, 次の集合評価定理 (定理 4) としてまとめることができる. 定理 4 をこうよぶ理由は次節で説明する.

定理 4 (集合評価定理)

(1) 任意の $\gamma_1, \dots, \gamma_n \in \mathbb{R}$ に対し, ある $\mathbf{u} = (u, u_{n+1}) \in S^n$ が存在して, $u \neq 0$ かつ

$$c_i(\mathbf{u}) = \gamma_i u_{n+1} \quad (i = 1, \dots, n). \quad (4.4)$$

(2) $c_i(\mathbf{u})$ が i に依存しない非零な $\mathbf{u} \in D^n$ が存在する.

(3) $c_i(\mathbf{u}) = 0 \ (\forall i)$ を満たす非零な $\mathbf{v} \in D^n$ が存在しなければ, 任意の $\gamma_1, \dots, \gamma_n \in \mathbb{R}$ に対し,

$$c_1(\mathbf{u}) : \dots : c_n(\mathbf{u}) = \gamma_1 : \dots : \gamma_n \quad (4.5)$$

を満たす D^n の内点 $\mathbf{u}$ が存在する.

次節に進む前に 3 節と 4 節の 2 つの対心定理 の関係を説明しよう. 実は, 定理 2 の (3.4) と定理 4 の (4.4) は本質的に同じものである. 正確には, A_i がコンパクト凸集合で $A_i \cap H_{\mathbf{u}}^+$ と $A_i \cap H_{\mathbf{u}}^-$ が非空のとき, (3.4) と (4.4) で $\gamma_i = 1$ としたものは同じ等式になる. 詳細は川崎 [6]. 他方, 定理 4 (3) は定理 2 にはない主張であり, 集合 (グループ) を評価する定理と解釈できる.

5 個の比較と集合の比較

まず, 図 2 から $c_i(\mathbf{u})$ が A_i の $\mathbf{u}$ 方向の中央値を表すことがわかる.

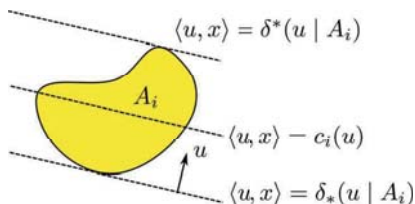


図 2: 超平面 $\langle u, x \rangle = c_i(u)$ は集合 A_i の $\mathbf{u}$ 方向の幅を 2 等分する.

これを基に, 「評価」の意味を説明する. 例えば, 筆記試験, 面接試験の点数が $(60, 60), (40, 80)$ の 2 名の受験生を評価しようとするとき, 総合評価は重み $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ 次第で変わる (図 3).

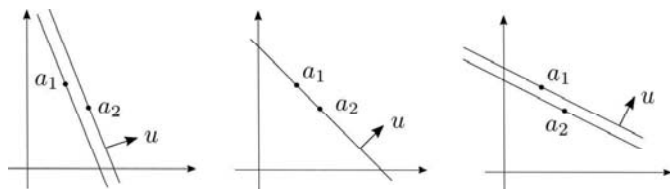


図 3: 左: $a_1 < a_2$. 中: $a_1 = a_2$. 右: $a_1 > a_2$.

しかし, $(60, 60), (80, 80)$ に対しては, 重みが正であれば結果は変わらない. 定理 4 (3) は $\mathbb{R}^n$ の n 個の集合 (グループ) についても, 同様の議論を展開できることを示している.

例 1 定理 4 (3) を図を使って説明しよう. 図 4 と図 5 の A_1, A_2 は同じ配置にある. 原点を通る直線でそれらの幅を同時に 2 等分することはできないので, (3) により, 任意の γ_1, γ_2 に対し, $c_1(u) : c_2(u) = \gamma_1 : \gamma_2$ となるように重み $u \in \mathbb{R}^2$ をとることができる. 図 4 は $\gamma_1 : \gamma_2 = 1 : 2$, 図 5 は $\gamma_1 : \gamma_2 = 1 : -2$ である.

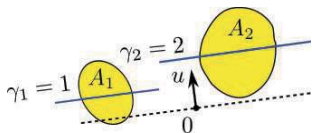


図 4: $\gamma_1 = 1, \gamma_2 = 2$

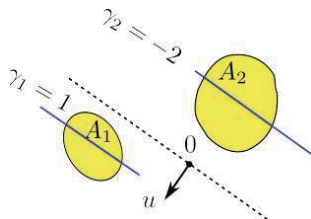


図 5: $\gamma_1 = 1, \gamma_2 = -2$

集合 A_i が点対称な場合は, 定理 4 の重み u を連立 1 次方程式を解いて求めることができる.

命題 1 A_i が非空なコンパクト集合で, 点 p_i に関して対称ならば, $c_i(u) = \langle p_i, u \rangle$ である. また, $c_i(u) = 0$ ($i = 1, \dots, n$) を満たす非零ベクトル $u \in \mathbb{R}^n$ が存在しないことと, $p_1, \dots, p_n$ が 1 次独立であることは同値である. さらに, $P = (p_1 \dots p_n)$ とおくと, (4.4) は次の連立 1 次方程式に帰着される.

$$P^T u = u_{n+1} \gamma.$$

集合 A_i が点対称でない場合は, 中心 p_i の代替として, geometrical center や center point (Edelsbrunner [2]) などを用いることが考えられる. これは今後の研究課題である.

6 ハムサンドウィッチ定理の弱い拡張

本節では 4 節の手法をハムサンドウィッチ定理に適用する. 詳細は川崎 [7, 8].

$A_1, \dots, A_n \subset \mathbb{R}^n$ を正のルベーグ測度をもつ集合, $f_i(x, u)$ を $(x, u) \in \mathbb{R}^n \times D^n$ 上の実数値連続関数で, $f_i(x, -u) = f_i(x, u)$ を満たすと仮定する. この設定で話を進めることもできるが, ここでは定数関数 $f_i(x, u) = 1/\mu(A_i)$ で話をまとめることにする.

γ_i を任意の実定数として, $u = (u, u_{n+1}) \in S^n$ に対して,

$$\nu_i(u) := \int_{A_i \cap H_u^+} f_i(x, u) dx - \gamma_i u_{n+1}$$

で連続写像 $\nu := (\nu_1, \dots, \nu_n)$ を定義すると, Borsuk の対心定理から定理 5 が得られる. ただし,

$$\rho_i(u) := \frac{\mu(A_i \cap H_u^+)}{\mu(A_i)}.$$

定理 5 (2) はハムサンドウィッチ定理のことであり, (1) と (3) はその拡張になる.

定理 5 (1) 任意の $\gamma_1, \dots, \gamma_n \in \mathbb{R}$ に対し, 次の等式を満たす $\mathbf{u} = (u, u_{n+1}) \in S^n$ が存在する.

$$\rho_i(\mathbf{u}) - \frac{1}{2} = \gamma_i u_{n+1}. \tag{6.1}$$

特に, どの γ_i も $-1/2$ と異なるときは, $-1 < u_{n+1} < 1$ が成立する.

- (2) $A_1, \dots, A_n$ の測度を同時に 2 等分する超平面が存在する.
- (3) $A_1, \dots, A_n$ の測度を同時に 2 等分する原点を通る超平面が存在しなければ, $-1/2$ と異なる任意の $\gamma_1, \dots, \gamma_n \in \mathbb{R}$ に対し,

$$\rho_1(\mathbf{u}) - \frac{1}{2} : \dots : \rho_n(\mathbf{u}) - \frac{1}{2} = \gamma_1 : \dots : \gamma_n \tag{6.2}$$

を満たす $\mathbf{u} \in S^n$ で, $0 < u_{n+1} < 1$ なるものが存在する. 特に, $\gamma_1 = \dots = \gamma_n = c$ ($0 < c \leq 1/2$) をとると,

$$\frac{1}{2} < \rho_1(\mathbf{u}) = \dots = \rho_n(\mathbf{u}) < \frac{1}{2} + c (\leq 1) \tag{6.3}$$

を満たす $\mathbf{u} \in S^n$ で, $0 < u_{n+1} < 1$ なるものが存在する.

注意 1 全ての γ_i を同じ値 $0 < c \leq 1/2$ としたとき, (6.1) から,

$$\rho_i(\mathbf{u}) = c u_{n+1} + \frac{1}{2}$$

となる. $0 < u_{n+1} < 1$ は存在のみが保証されていて, その値は不明なので, 分割比 $\rho_i(\mathbf{u})$ の値も不明である. これが本節のタイトルを「弱い拡張」とした理由である.

参 考 文 献

[1] K. Borsuk, Drei Sätze über die n -dimensionale euklidische Sphäre, *Fundamenta Mathematicae*, **20** (1933), 177–190.

[2] H. Edelsbrunner, *Algorithmis in Combinatorial Geometry*, Springer, Berlin, (1987)

[3] H. Kawasaki, An application of Borsuk-Ulam’s theorem to parametric optimization, *Linear and Nonlinear Analysis*, **9**, No. 3 (2023) 245-252.

[4] 川崎英文, Borsuk-Ulam の定理の最適化への応用, 数理解析研究所講究録 2274 「非線形解析学と凸解析学の研究」, (2024) 1 月, 146–152.

[5] H. Kawasaki, An application of Borsuk-Ulam’s theorem to nonlinear programming, *J. of the Operations Research Society of Japan*, **68**, No. 1, (2025) 21-19.
<https://doi.org/10.15807/jorsj.68.21>

[6] H. Kawasaki, An antipodal theorem for parametric optimization problems, *Bulletin of informatics and cybernetics*, **56**, No. 4 (2024) 1-8. <https://doi.org/10.5109/7178785>

[7] H. Kawasaki, Weak extension of the ham-sandwich theorem: some ratio not in half. submitted.

- [8] 川崎英文, ハムサンドイッチ定理の拡張: 等分割以外の可能性, 数理解析研究所講究録 2304 「不確実性環境下における数理的意思決定の進化」, (2025) 3 月, 22–25.
- [9] L. Lovász, Kneser's conjecture, chromatic number and homotopy, *Journal of Combinatorial Theory, Ser. A*, **25** (1978), 319–324.
- [10] J. Matoušek, *Using the Borsuk-Ulam Theorem*, Springer, Berlin Heidelberg, (2008).