

測定による波動関数の位相相関の喪失 数値実験と解析

早大理工 町田顕 (Ken MACHIDA)

日立 河野尚幸 (Naoyuki KONO)

早大理工 中里弘道 (Hiromichi NAKAZATO)

早大理工 並木美喜雄 (Mikio NAMIKI)

Bari Univ. Saverio Pascazio

1 はじめに

Machida-Namiki による多ヒルベルト空間理論 [1] では、いわゆる量子力学的観測問題 [2] を測定による波動関数の位相相関の消滅（デコヒーレンス）として捉え、巨視的な測定器の局所系（開放系）と微視的な測定対象系との量子力学的相互作用によってこれを実現するものと定式化している。数学的には開放系としての性格を取り込むために多くのヒルベルト空間が必要となるわけであるが、物理的にはこの理論は次のような量子力学的測定過程の実際を反映している。まず、量子力学の予言は“同じ条件下”で多数回繰り返された実験（試行）結果とのみ比較され得るものであったことを思い起こそう。測定器局所系は多数の構成粒子から成る量子開放系であるから、巨視的に“同じ条件下”といってもその微視的な状態（考慮すべき構成粒子の数や配置など）は試行毎にゆらいでいると考えるのが自然である。この結果、相互作用後の対象系波動関数には試行毎に異なった位相因子が付与されることになる。ゆらぎが十分であれば、対象系波動関数の持っていた位相情報は、多数回繰り返された試行の重ね焼き（これが量子力学の予言に相当）によって完全に失われるだろう。こうして位相相関の喪失が実現されるわけである。

近年、Namiki-Pascazio [3] は、測定過程におけるゆらぎの効果を考慮して位相相関の喪失の度合を定量的に示すデコヒーレンスパラメータ ϵ を導入した。本小論では、測定過程に現れると考えられる特徴的なゆらぎとこのデコヒーレンスパラメータとの関連についての最近の研究成果を報告する。

本来量子力学的測定過程は複雑な量子多体問題でありその取り扱いは極めて難しいが、ここでは特にゆらぎの効果にのみ着目し、1次元デルタ関数型ポテンシャル列（測定器局所系のモデル）による非相対論的粒子（測定対象粒子）の散乱問題として定式化し数値的に解析した。測定器局所系のゆらぎはポテンシャルの数や配置の試行毎の変化として取り込むことになるが、このような簡単なモデルでもゆらぎの一般的性格は十分反映されているものと考えられる。さてゆらぎの影響は、具体的には粒子の透過係数とパラメータ ϵ に

現われることになるが、これらの量は考えているモデルが測定器として有効に作動するかどうかを特徴付ける量でもある。この事実は、どのような測定器系を設定すればより効率良く位相相関を消滅できるかという議論をも可能にし、将来的には「測定器の設計理論」につながる可能性を示唆している。この観点からしても、透過係数やパラメータ ϵ の近似式を簡単なモデルに基づいて導出しておくことは重要である。今回我々が導出した近似式は数値実験の結果を良く再現しており、この方向への第一歩と見なすことができよう。

2 デコヒーレンスパラメータ

ここでは、典型的な測定過程として Stern-Gerlach 型の透過型実験を考える。このタイプの実験では、まず測定量（例えばスピンなどの量子数）に応じたスペクトル分解が行われ、投入された対象粒子は二つの経路 1 と 2 に導かれる。一方の経路（経路 2 とする）には測定器が設置されており、経路 2 を通る分波 ψ_2 は測定器の局所系との相互作用の結果 $T\psi_2$ となる。 T は透過係数である。測定器通過後の全波動関数 ψ は、分波 $T\psi_2$ と経路 1 からの分波 ψ_1 の重ね合わせで表される。

$$\psi = \psi_1 + T\psi_2. \quad (1)$$

波動関数の位相相関を見るためには、同じ条件のもとで粒子を繰り返し送り込み、例えば Young 型二重スリット実験でのスクリーン上の干渉縞のように、その重ね焼きを調べることになる。前節で述べたように、測定による位相相関の喪失を議論する際には測定器局所系の性格をきちんと取り込むことが極めて重要である。すなわち、試行毎に異なる測定器局所系の微視的状态を反映して透過係数も毎回異なった値を取ると考えるべきであり、 j 番目の試行 ($j = 1, \dots, N_p$, N_p は試行総数を表す) における透過係数を T_j と表す。実験結果と比較すべき検出確率は、多数回試行を繰り返した際の試行平均

$$\begin{aligned} \bar{P} &\equiv \frac{1}{N_p} \sum_{j=1}^{N_p} P^{(j)} = \frac{1}{N_p} \sum_{j=1}^{N_p} |\psi_1 + T_j \psi_2|^2 \\ &= |\psi_1|^2 + \overline{|T|^2} |\psi_2|^2 + 2 \operatorname{Re}(\psi_1^* \bar{T} \psi_2) \end{aligned} \quad (2)$$

によって表される。上付きのバーは N_p 回試行したときの試行平均を表す。

第三項がいわゆる干渉項であり位相相関の有無を表している。そこでデコヒーレンスパラメータ ϵ を次のように定義しよう。

$$\epsilon = 1 - \frac{|\bar{T}|^2}{\overline{|T|^2}}, \quad 0 \leq \epsilon \leq 1. \quad (3)$$

これを用いると式 (2) は、 $\bar{T} \equiv |\bar{T}|e^{i\beta}$ とおいて

$$\bar{P} = |\psi_1|^2 + \overline{|T|^2} |\psi_2|^2 + 2\sqrt{\overline{|T|^2}} \sqrt{1-\epsilon} \operatorname{Re}(\psi_1^* e^{i\beta} \psi_2) \quad (4)$$

となる。

この式をみると、パラメータ ϵ は位相相関の喪失の度合を定量的に表す指標であることが分かる。すなわち、 $\epsilon = 1$ のときには干渉項が完全に消滅し検出確率は排他的な確率事象の和で表されている。位相相関の喪失である。逆に、 $\epsilon = 0$ のときには干渉項は完全に残り、分波どうしの相関は完全に保持されている。興味深いのはこの中間的な場合 $0 < \epsilon < 1$ であり、これは部分的な位相相関の消滅に対応している。ゆらぎの効果は位相相関の消滅に寄与すると考えられるから、 ϵ パラメータを増大させる ($\epsilon \rightarrow 1$) のものと期待される。次節では、具体的なモデルを設定して両者の関係の解析を行なう。

3 数値実験

3.1 デルタ関数型ポテンシャル列

既に述べたように、ゆらぎの効果に着目する限り、測定器の局所系を N 個のポテンシャルから成る 1 次元デルタ関数型ポテンシャル列

$$V(x) = \sum_{\ell=1}^N \Lambda \delta(x - b_{\ell}) \quad (5)$$

で近似したとしてもその本質は失われないだろう。ポテンシャル $V(x)$ による波数 k の粒子の透過係数 T および反射係数 R は容易に求めることができる

$$\begin{pmatrix} T \\ 0 \end{pmatrix} = e^{-ikb_N} Z \prod_{\ell=1}^{N-1} e^{ikd_{\ell}\tau_3} Z \begin{pmatrix} 1 \\ R \end{pmatrix} \quad (6)$$

となる [4]。ここで、 $d_{\ell} = b_{\ell+1} - b_{\ell}$ は隣り合うポテンシャル間距離、 τ_3 はパウリ行列であり、一個のポテンシャルに対する伝達行列 Z は次のように与えられている。

$$Z = \begin{pmatrix} 1 - i\Omega & -i\Omega \\ i\Omega & 1 + i\Omega \end{pmatrix} \quad (7)$$

ただし、 $\Omega = \Lambda/\hbar v$ は一個のポテンシャルによる散乱の強さを表すパラメータ、 v は入射粒子の速さである。

さて、開放系としての測定器局所系の性格を、ポテンシャル V を規定するパラメータが試行回数 j 毎に異なっているとして取り込もう。具体的には、ポテンシャルの間隔 d_{ℓ} および粒子が経験するポテンシャルの総数 N が試行毎に変化しているものと仮定する。この設定のもとで、多数の入射粒子 (試行) 毎の透過係数 T_j を計算し、平均の透過係数および透過確率を求め ϵ パラメータを計算するわけである。

$$\langle T \rangle = \bar{T} = \frac{1}{N_p} \sum_{j=1}^{N_p} T_j \quad (8)$$

$$\langle |T|^2 \rangle = t \equiv \overline{|T|^2} = \frac{1}{N_p} \sum_{j=1}^{N_p} |T_j|^2 \quad (9)$$

さらにここで一種のエルゴード仮説を認め、試行平均 $\dots$ をアンサンブル平均 $\langle \dots \rangle$ で置き換えてよいものとする。数値計算では試行回数 N_p は 1000 とし、 d_ℓ と N に関してはガウス分布を仮定する。

3.2 各パラメータの設定

平均のポテンシャル間隔 $\langle d \rangle$ を決める際に反射確率がほぼ 1 になってしまうような共鳴散乱は透過波を調べるために避ける必要がある。共鳴散乱は入射中性子の波数 k と $\langle d \rangle$ を掛けたものが π の整数倍になるときに起こることがわかっているので、

$$k\langle d \rangle = 4.5 \pi \quad (10)$$

とおく。熱中性子が原子と相互作用する状況を想定しているので、波長 λ と $\langle d \rangle$ は、

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = 2\text{\AA}, \quad \langle d \rangle = 4.5\text{\AA} \quad (11)$$

である。ポテンシャル間隔とポテンシャル数はそれぞれ平均 $\langle d \rangle$ 、 $\langle N \rangle$ のガウス分布に従うとし、標準偏差は、

$$\Delta d \equiv \frac{\delta d}{\langle d \rangle}, \quad \delta d \equiv \sqrt{\langle (d - \langle d \rangle)^2 \rangle} \quad (12)$$

$$\Delta N \equiv \frac{\delta N}{\sqrt{\langle N \rangle}}, \quad \delta N \equiv \sqrt{\langle (N - \langle N \rangle)^2 \rangle} \quad (13)$$

である。今回の数値実験では二つのパラメータを次の範囲にとる。

$$0 \leq \Delta d \leq 0.5, \quad 0 \leq \Delta N \leq 1 \quad (14)$$

ポテンシャルからの散乱の強さを表すパラメータ Ω は、

$$\Omega = 10^{-1} \quad (15)$$

とおく。

以上のように $\langle d \rangle$ および Ω の値を設定したので、透過確率およびデコヒーレンスパラメータは $\Delta N \cdot \Delta d \cdot \langle N \rangle$ の関数と考えることができる。

$\Delta N \cdot \Delta d \cdot \langle N \rangle$ の値を変えたときにどのように波動関数の位相相関の喪失 ($\epsilon \rightarrow 1$) が実現するかを調べるのが我々のすべきことである。このために、 Δd を固定し $\langle N \rangle$ と ΔN を変化させる場合・ ΔN を固定し $\langle N \rangle$ と Δd を変化させる場合・ $\langle N \rangle$ を固定し Δd と ΔN を変化させる場合の三つの場合を考え数値実験を行う。

3.3 数値実験

1. $\langle N \rangle \cdot \Delta N$ を変化させる場合

Δd をいくつかの値に固定したときの ϵ および $t \equiv \langle |T|^2 \rangle$ の $\langle N \rangle$ および ΔN 依存性をみたのが図 1(a) および図 1(b) である。これをみて以下のことがわかる。

- (a) ϵ のグラフから $\langle N \rangle$ が大きくなるほど、また ΔN が大きくなるほど位相相関の喪失が起きやすいことがわかる。
- (b) ϵ のグラフにおいて $\Delta d = 0$ の場合をみると、位相相関が保たれている状態 ($\epsilon = 0$) から位相相関の喪失が実現した状態 ($\epsilon = 1$) への遷移はかなり急激であり、 $\langle N \rangle \Delta N^2 = \text{一定}$ の線に沿って起こっていることがわかる。
- (c) t のグラフをみると、 $\Delta d = 0$ のときは透過確率がほぼ 1 であり、 $\Delta d > 0$ のときは $\langle N \rangle$ が大きくなると透過確率 $\rightarrow 0$ であることがわかる。いずれのときも透過確率は ΔN にほとんど依存していない。

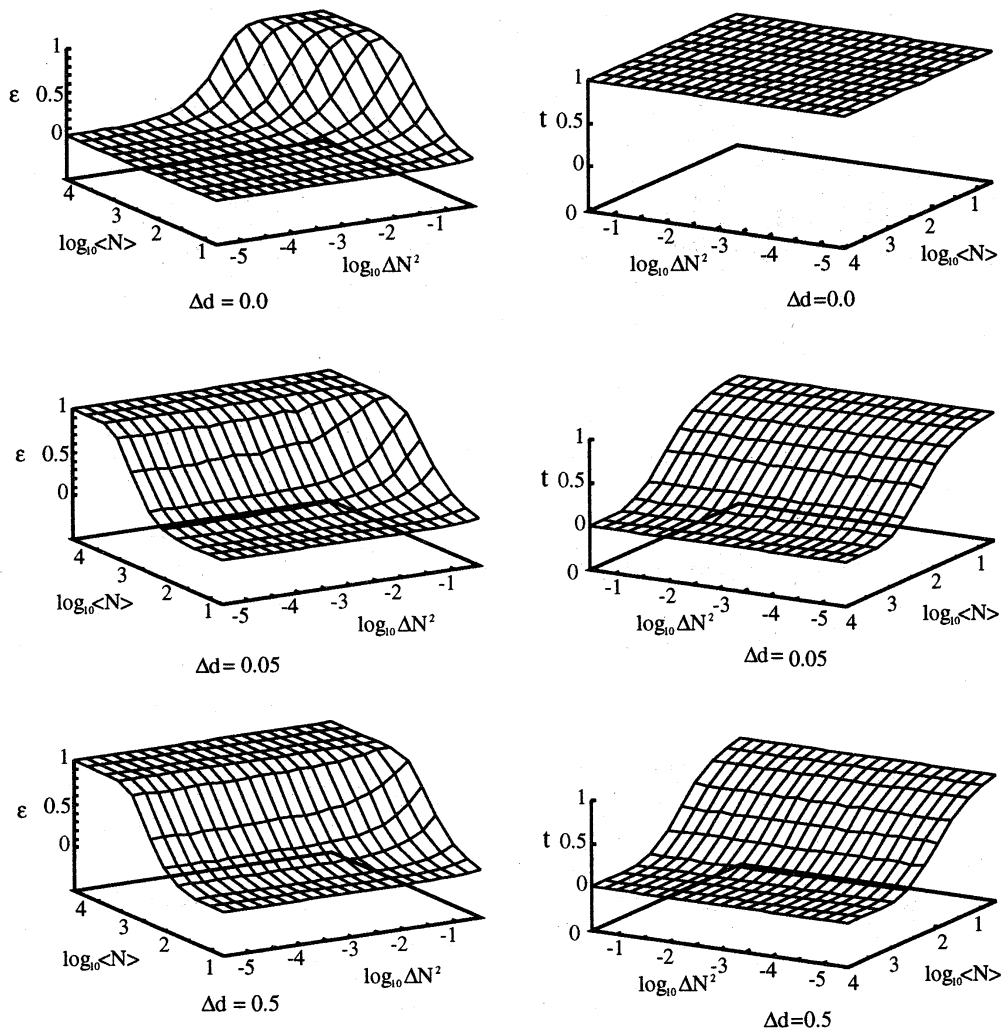


Fig 1(a)

Fig 1(b)

図 1: $\Delta d = 0.0, 0.05, 0.5$ としたときの (a) デコヒーレンスパラメータ ϵ および (b) 透過確率 t の $\langle N \rangle, \Delta N$ 依存性

2. $\langle N \rangle \cdot \Delta d$ を変化させる場合

ΔN をいくつかの値に固定したときの ϵ および $t \equiv \langle |T|^2 \rangle$ の $\langle N \rangle \cdot \Delta d$ 依存性をみたのが図2(a)および図2(b)である。これから次のことがわかる。

- (a) ϵ のグラフから $\langle N \rangle$ が大きくなるほど、また Δd が大きくなるほど位相相関の喪失が起きやすいことがわかる。
- (b) t のグラフから $\langle N \rangle$ が大きくなるほど、また Δd が大きくなるほど透過確率 $\rightarrow 0$ となる。
- (c) 同様透過確率には ΔN 依存性がほとんどみられない。
- (c) $\epsilon \cdot t$ とも $\Delta d > 0.1$ の領域で‘飽和’現象がみられる。すなわちこの領域で ϵ および t は Δd に依存しなくなっている。

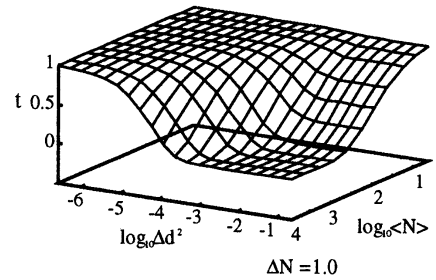
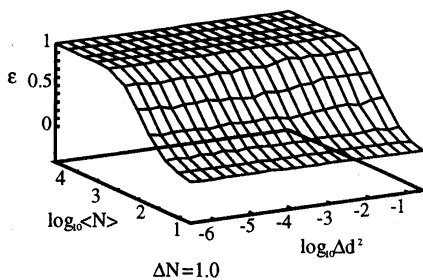
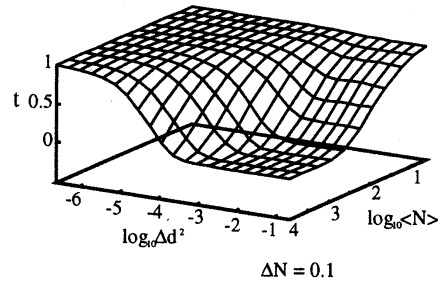
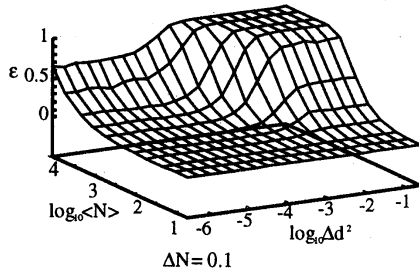
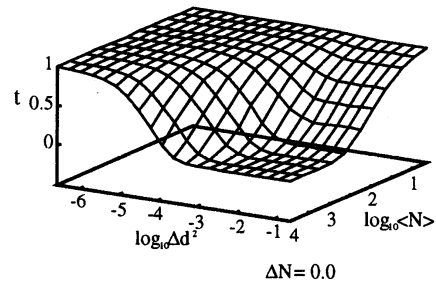
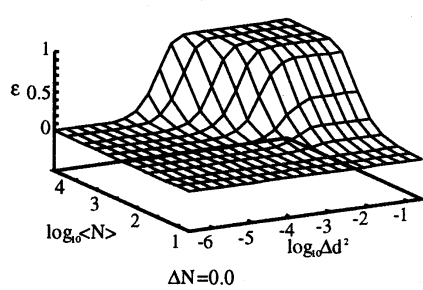


Fig 2(a)

Fig2(b)

図 2: $\Delta N = 0.0, 0.1, 1.0$ としたときの (a) デコヒーレンスパラメータ ϵ および (b) 透過確率 t の $\langle N \rangle, \Delta d$ 依存性

3. Δd と ΔN を変化させる場合

$\langle N \rangle$ をいくつかの値に固定したときの ϵ および $t \equiv \langle |T|^2 \rangle$ の $\langle N \rangle \Delta N^2 \cdot \langle N \rangle \Delta d^2$ 依存性をみたのが図3である。これをみると次のことがわかる。

- (a) ϵ のグラフから、 $\langle N \rangle > 10^3$ であれば $\langle N \rangle \Delta d^2 > 1 \cdot \langle N \rangle \Delta N^2 > 10^3$ の領域で位相相関の喪失が実現している。
- (b) 1・2でも指摘したように t のグラフをみると透過確率は ΔN に依存していない。
- (c) t のグラフから $\langle N \rangle \Delta d^2 > 1$ の範囲で急速に透過確率の値が小さくなる。

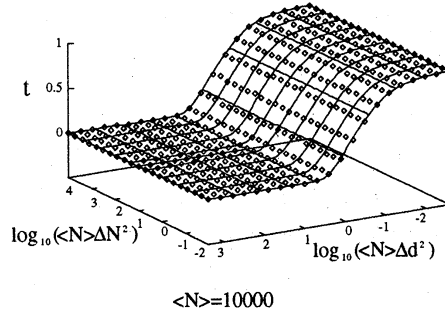
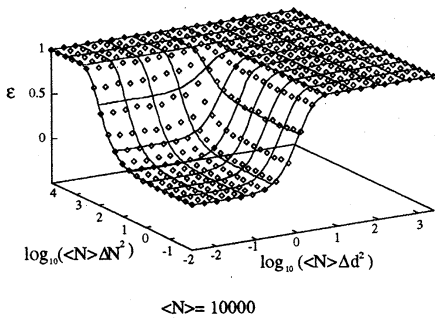
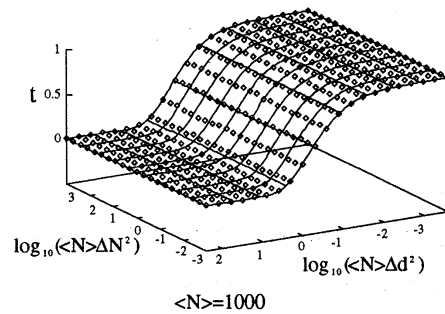
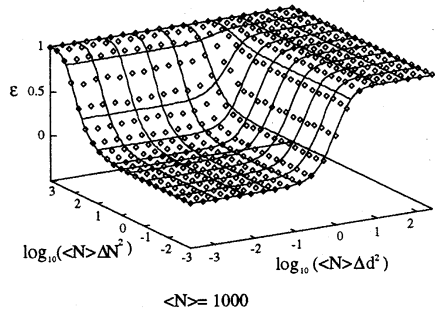
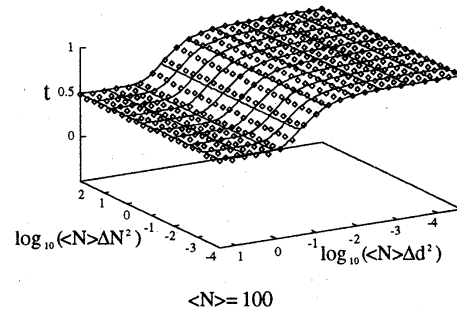
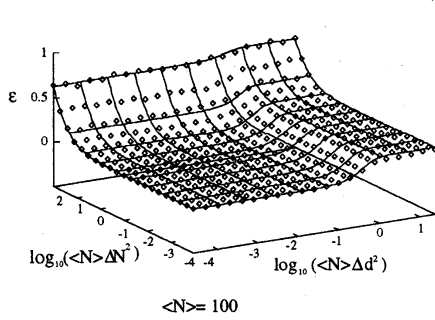


Fig 3(a)

Fig 3(b)

図3: $\langle N \rangle = 100, 1000, 10000$ としたときの (a) デコヒーレンスパラメータ ϵ および (b) 透過確率 t の $\langle N \rangle (\Delta N)^2, \langle N \rangle (\Delta d)^2$ 依存性。実線は近似式 (18), (14) を表しており、数値実験の結果は点で示されている。

4 近似式

数値実験で得られた内容を理解するため、また前述したように「測定器の設計理論」を確立する際、デコヒーレンスパラメータと透過確率のゆらぎ依存性を解析的な式上で簡単なモデルで把握しておくことが必要と考え近似式を導出することを試みる。基本的に、 T を反射の次数で展開し2回の反射までで近似して得た結果である[4]。 $\mathcal{R} \cdot T$ はそれぞれ一個のデルタ関数型ポテンシャルの反射係数および透過係数である。

まず入射粒子が実効的に相互作用するポテンシャル数として N_{eff} を導入する。

$$N_{\text{eff}} \equiv \langle N \rangle + 2 \operatorname{Re} \left\{ \frac{s(s^{\langle N \rangle} - \langle N \rangle s + \langle N \rangle - 1)}{T^2(s-1)^2} \right\} \quad (16)$$

ここで $s \equiv T^2 \langle e^{2ikd} \rangle = -T^2 e^{-2(k\langle d \rangle)^2 \Delta d^2}$ である。 $\Omega \ll 1$ であれば $(|T|^2)^N \simeq \exp(-N|\mathcal{R}|^2)$ であるから N_{eff} は入射粒子が実効的に相互作用するポテンシャル数とみなせる。

これを用いると次の近似式を得る。

$$|\langle T \rangle|^2 \simeq \exp(-\langle N \rangle \Delta N^2 \Omega^2) \exp(-N_{\text{eff}} |\mathcal{R}|^2) \quad (17)$$

$$\langle |T|^2 \rangle \simeq \exp(-N_{\text{eff}} |\mathcal{R}|^2) \exp(|\mathcal{R}|^4 S_{N_{\text{eff}}}^{(4)}) \quad (18)$$

$$\epsilon \simeq 1 - \exp(-\langle N \rangle \Delta N^2 \Omega^2) \exp(-|\mathcal{R}|^4 S_{N_{\text{eff}}}^{(4)}) \quad (19)$$

ただし、

$$S_N^{(4)} \equiv \frac{|T|^{4N} - N|T|^4 + N - 1}{(|T|^4 - 1)^2} \quad (20)$$

である。

式(18)は数値実験のところで述べた透過確率が ΔN に依らないという結果を考慮して得たものである。従って ΔN に依らない形になっている。

今考えている状況 ($\Delta d \neq 0, \Delta N \neq 0$) は入射中性子の経験する散乱体(原子)の総数と散乱体の間隔が試行ごとにゆらいでいる状況であり、物理的には最も興味深くかつ一般的な状況である。気体や液体物質と入射中性子が相互作用するような場合と考えられる。

図3(a)・(b)でみることができるよう近似式と数値実験の結果はよく一致している。

さて、式(16)から $\Delta d = 0$ のときは $0 \leq N_{\text{eff}} \leq 1$ となり、式(19)・(20)からデコヒーレンスパラメータはほぼ $\langle N \rangle (\Delta N)^2$ に依存することがわかる。 $\langle N \rangle (\Delta N)^2$ の値がある程度大きくなると指数関数的に1に近づくことから数値実験1.(b)の内容の説明がつく。

$\Delta d = 0$ という状況は物理的にもおもしろい。というのは、結晶のような巨視系と入射中性子が相互作用する状況に近いからである。このとき原子どうしの間隔はほぼ一定であるが、入射中性子により入射角に微妙な違いがあるため、経験する結晶の部分が異なる。よって、相互作用する散乱体(原子)の総数が入射中性子によって異なる状況と考えられる。

さらに、式(16)から $\Delta d > 0.1$ のとき $s \simeq 0$ であるから $N_{\text{eff}} \simeq \langle N \rangle$ となり、式(18)・(19)から透過確率・デコヒーレンスパラメータ共に Δd 依存性がなくなってしまう。これはまさに数値実験2.(c)の内容である。

5 結論

今回の数値実験の結果 (図 1・2・3) から、一種の相転移のようにパラメータの変化に伴い相関を保持した状態 ($\epsilon = 0$) から相関を喪失した状態 ($\epsilon = 1$) に移ることがわかった。また今回考慮した2種類のゆらぎ (ポテンシャル間隔のゆらぎ Δd ・ポテンシャル数のゆらぎ ΔN) は位相相関喪失の異なったメカニズムを与えることもわかった。

ポテンシャル列 V による入射粒子の散乱を反射の次数により展開することで得られた我々の近似式 (18)・(19) は数値実験の再現性に優れていることがわかり、さらに一般的な場合への拡張の可能性を期待させるものである。

参考文献

- [1] S. Machida and M. Namiki, Prog. Theor. Phys. **63** (1980) 1457; 1833; M. Namiki, Found. Phys. **18** (1988) 29.
- [2] *Quantum Theory and Measurement*, edited by J.A. Wheeler and W.H. Zurek (Princeton University Press, 1983); B. d'Espagnat, *Conceptual Foundations of Quantum Mechanics* (Benjamin, 1971); P. Busch, P.J. Lahti and P. Mittelstaedt, *The quantum theory of measurement* (Springer-Verlag, Berlin, 1991); M. Namiki and S. Pascazio, Physics Reports **232** (1993) 301.
- [3] M. Namiki and S. Pascazio, Physics Reports **232** (1993) 301; M. Namiki, S. Pascazio and C. Schiller, Phys. Lett. **A182** (1994) 17.
- [4] N. Kono, K. Machida, M. Namiki and S. Pascazio, preprint BA-TH/95-202, WU-HEP-95-2.