

作用素多項式の factorization

北大 応電研 高橋 勝利

作用素値関数の factorization は解析学およびその応用の多くの分野で現われる。Wiener-Hopf 積分作用素に対して, その symbol の spectral factorization は逆作用素の存在を保証すると共にその逆作用素の explicit な表現を与える。また system 理論においては, system の transfer function の (minimal) factorization は部分 system の合成に対応する。

ここでは, Gohberg-Lancaster-Rodman の作用素多項式の factorization についての結果を紹介する。

1. 作用素多項式の標準形

X : Banach space, $\mathcal{L}(X)$: X 上の有界線形作用素全体とする。 $L(\lambda)$ は monic operator polynomial (m.o.p.) i.e. 次の形の関数とする:

$$L(\lambda) = I \cdot \lambda^{\ell} + \sum_{j=0}^{\ell-1} A_j \lambda^j, \quad A_j \in \mathcal{L}(X) \quad (j=0, \dots, \ell-1)$$

I は X 上の恒等作用素

$T \in \mathcal{L}(X^{\ell})$ ($X^{\ell} = X \oplus \dots \oplus X$ ℓ 個の直和) とする。

T は次を満たすとき, $L(\lambda)$ の linearization という:

$$L(\lambda) \oplus I_{l-1} = E(\lambda) (\lambda - T) F(\lambda), \quad \lambda \in \mathbb{C} \quad (I_{l-1} \text{ は } \mathbb{K}^{l-1} \text{ 上の恒等作}$$

ここで, $E(\lambda), F(\lambda)$ は $\forall \lambda \in \mathbb{C}$ で invertible な値をとる operator polynomial で, さらに $E(\lambda)^{-1}, F(\lambda)^{-1}$ も operator polynomial である.

T が $L(\lambda)$ の linearization ならば,

$$\sigma(T) = \sigma(L) \stackrel{\text{def}}{=} \{ \lambda \in \mathbb{C}; L(\lambda) \text{ not invertible} \}.$$

次の様に L を定義する operator $C_1 \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^l)$ は $L(\lambda)$ の linearization である:

$$C_1 = \begin{pmatrix} 0 & I & 0 & \cdots & 0 \\ & 0 & I & \cdots & 0 \\ & & & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & I \\ -A_0 & -A_1 & \cdots & & -A_{l-1} \end{pmatrix}, \quad L \text{ の first companion operator という.}$$

実際, $E(\lambda) = \begin{pmatrix} B_{l-1}(\lambda) & B_{l-2}(\lambda) & \cdots & B_0(\lambda) \\ -I & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -I & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & -I \end{pmatrix}, \quad B_0(\lambda) = I,$

$$B_{i+1}(\lambda) = \lambda B_i(\lambda) + A_{l-i-1} \quad (i=0, 1, \dots, l-2)$$

$$F(\lambda) = \begin{pmatrix} I & 0 & \cdots & 0 \\ \lambda I & I & 0 & \cdots \\ \lambda^2 I & \lambda I & \ddots & \\ \vdots & & & \\ \lambda^{l-1} I & \lambda^{l-2} I & \cdots & \lambda I & I \end{pmatrix}$$

とすれば $E(\lambda), F(\lambda), E(\lambda)^{-1}, F(\lambda)^{-1}$ は operator polynomial で,

$$L(\lambda) \oplus I_{l-1} = E(\lambda) (\lambda - C_1) F(\lambda) \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

$X \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^l, \mathbb{K})$, $T \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^l)$ が次の条件 (a), (b) を満たすとき,

$L(\lambda)$ の right standard pair という:

$$(a) \quad Q(X, T) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} X \\ X^T \\ \vdots \\ X^{T^{l-1}} \end{pmatrix} \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^l) \text{ is invertible, } (b) \quad \sum_{j=0}^{l-1} A_j X^T^j + X^{T^l} = 0.$$

standard pair (X, T) に対し,

$$(c) \quad X^T^i Y = \begin{cases} 0, & i = 0, 1, \dots, l-2 \\ I, & i = l-1 \end{cases}$$

なる operator $Y \in \mathcal{L}(\mathbb{K}, \mathbb{K}^l)$ が一意的に定まる。実際,

$$Y = Q(X, T)^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ I \end{pmatrix}_l. \quad (X, T, Y) \in L(\alpha) \text{ a standard triple といふ。}$$

$$X = (I, 0, \dots, 0) \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^l, \mathbb{K}), \quad T = C_1, \quad Y = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ I \end{pmatrix} \in \mathcal{L}(\mathbb{K}, \mathbb{K}^l)$$

は $L(\alpha)$ の standard triple である。 (X, T, Y) が standard triple for L であるとき, triple (X_1, T_1, Y_1) が次の意味で (X, T, Y)

に similar; $\exists M \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^l)$ invertible s.t. $X_1 = X M,$

$$T_1 = M^{-1} T M, \quad Y_1 = M^1 Y, \quad \text{ならば, 明らかに } (X_1, T_1, Y_1) \text{ も}$$

standard triple. 逆に (X_1, T_1, Y_1) が standard triple なら,

$$M = Q(X, T)^{-1} Q(X_1, T_1) \text{ とおくと, } (X_1, T_1, Y_1) \text{ が } (X, T, Y) \text{ に}$$

similar (上の意味で) なることがわかる。

(X, T, Y) が standard triple for $L(\alpha)$ のとき, pair (T, Y) を left standard pair for $L(\alpha)$ といふ。 left standard pair は次で特徴づけられる:

$$(a)' \quad R(T, Y) \stackrel{\text{def}}{=} (Y, TY, \dots, T^{l-1}Y) \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^l) \text{ invertible}$$

$$(b)' \quad \sum_{j=0}^{l-1} T^j Y A_j + T^l Y = 0.$$

[定理 1.1] $(X, T, Y) \in L(\alpha)$ a standard triple for $L(\alpha)$ とする。

3

こととす,

$$(i) \quad L(\lambda) = I \cdot \lambda^l - X T^l (V_1 + V_2 \lambda + \dots + V_l \lambda^{l-1}),$$

$$: : 2'', \quad (V_1, \dots, V_l) = Q(X, T)^{-1}, \quad V_i \in \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{X}^l)$$

$$(ii) \quad L(\lambda) = I \cdot \lambda^l - (Z_1 + Z_2 \lambda + \dots + Z_l \lambda^{l-1}) T^l Y,$$

$$: : 2'', \quad \begin{pmatrix} Z_1 \\ \vdots \\ Z_l \end{pmatrix} = R(T, Y)^{-1}, \quad Z_i \in \mathcal{L}(\mathcal{X}^l, \mathcal{X})$$

証明. (i): $C_i = Q(X, T) T Q(X, T)^{-1}$ が成り立つことから,

$$-A_i = X T^l V_{i+1}, \quad i = 0, 1, \dots, l-1.$$

$$(ii): \quad R(T, Y) \begin{pmatrix} A_0 \\ \vdots \\ A_{l-1} \end{pmatrix} = \sum_{j=0}^{l-1} T^j Y A_j = -T^l Y \quad (\text{standard pair 条件 (b) より})$$

$$\therefore A_i = -Z_{i+1} T^l Y$$

定理における (i) の表現は L の right standard form といふ。
(ii) (left)

定理 1.1 の逆が成り立つ。

[定理 1.2] (i) $X \in \mathcal{L}(\mathcal{X}^l, \mathcal{X})$, $T \in \mathcal{L}(\mathcal{X}^l)$ に對して,

$Q(X, T)$ が invertible ならば, (X, T) は

$$L(\lambda) = I \cdot \lambda^l - X T^l (V_1 + V_2 \lambda + \dots + V_l \lambda^{l-1}), \quad (V_1, \dots, V_l) = Q(X, T)^{-1}$$

の right standard pair である。(X, T, V_l) は standard triple).

(ii) $T \in \mathcal{L}(\mathcal{X}^l)$, $Y \in \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{X}^l)$ に對して, $R(T, Y)$ が invertible

ならば, (T, Y) は

$$L(\lambda) = I \cdot \lambda^l - (Z_1 + Z_2 \lambda + \dots + Z_l \lambda^{l-1}) T^l Y, \quad \begin{pmatrix} Z_1 \\ \vdots \\ Z_l \end{pmatrix} = R(T, Y)^{-1}$$

の left standard pair である。 $((Z, T, Y))$ は standard triple)。

証明は明らか。

[定理 1.3.] (X, T, Y) standard triple for $L(\lambda)$ ならば,

$$L(\lambda)^{-1} = X(\lambda - T)^{-1}Y, \quad \lambda \notin \sigma(L) (= \sigma(T))$$

証明. $L(\lambda)$ の first companion operator C_1 は $L(\lambda)$ の linearization である:

$$L(\lambda) \oplus I_{2n} = F(\lambda)(\lambda - C_1)F(\lambda)$$

$$\begin{aligned} \therefore L(\lambda)^{-1} &= (F(\lambda)^{-1} \text{ の } \#1\text{行}) \times (\lambda - C_1)^{-1} \times (F(\lambda)^{-1} \text{ の } \#1\text{列}) \\ &= (I, 0, \dots, 0)(\lambda - C_1)^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ I \end{pmatrix} \quad \lambda \notin \sigma(L) \end{aligned}$$

$(I, 0, \dots, 0), C_1, \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ I \end{pmatrix}$ は standard triple for $L(\lambda)$ 故に, (X, T, Y) に similar. $\therefore L(\lambda)^{-1} = X(\lambda - T)^{-1}Y \quad \lambda \notin \sigma(L)$

2. multiplication & division

[定理 2.1.] L_1, L_2 : monic operator polynomial (m.o.p. と書く)

$(X_1, T_1, Y_1), (X_2, T_2, Y_2)$ はそれぞれ L_1, L_2 の standard triple とする。

もし $L(\lambda) = L_2(\lambda)L_1(\lambda)$ ならば,

$$(a) \quad L^{-1}(\lambda) = X(\lambda - T)^{-1}Y,$$

すなわち,

$$X = (X_1, 0), \quad T = \begin{pmatrix} T_1 & Y_1 X_2 \\ 0 & T_2 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 0 \\ Y_2 \end{pmatrix}$$

(b) (X, T, Y) は standard triple for $L(\lambda)$.

$$\text{証明. (a) } (\lambda - T)^{-1} = \begin{pmatrix} (\lambda - T_1)^{-1} & (\lambda - T_1)^{-1}Y_1 X_2(\lambda - T_2)^{-1} \\ 0 & (\lambda - T_2)^{-1} \end{pmatrix}$$

$$\therefore X(\lambda - T)^{-1}Y = X_1(\lambda - T_1)^{-1}Y_1 X_2(\lambda - T_2)^{-1}Y_2 = L_1(\lambda)^{-1}L_2(\lambda)^{-1} = L(\lambda)^{-1}$$

(b): 先ず $Q(X, T)$ が invertible なることを示す。 $L_1(\lambda), L_2(\lambda)$ の次数

を k_1, k_2 とする。 $k_1 + k_2 = l$ とする。

$$T^\lambda = \begin{vmatrix} T_1^\lambda & \sum_{j=0}^{\lambda-1} T_1^j Y_1 X_2 T_2^{\lambda+1-j} \\ 0 & T_2^\lambda \end{vmatrix} \quad \lambda=1, 2, \dots$$

$$Q(X, T) = \begin{vmatrix} X \\ X T \\ \vdots \\ X T^{l-1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} X_1 & 0 \\ X_1 T_1 & (X_1 Y_1) X_2 \\ \vdots & \vdots \\ X_1 T_1^{l-1} & \sum_{j=0}^{l-2} (X_1 T_1^j Y_1) X_2 T_2^{l-1-j} \end{vmatrix}$$

standard triple の条件 (c) より, $X_1 T_1^j Y_1 = \begin{cases} 0 & j=0, 1, \dots, k_1-2 \\ I & j=k_1-1 \end{cases}$

$$\therefore Q(X, T) = \begin{vmatrix} X_1 & 0 \\ X_1 T_1 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ X_1 T_1^{k_1-1} & 0 \\ X_1 T_1^{k_1} & X_2 \\ X_1 T_1^{k_1+1} & \sum_{j=0}^1 (X_1 T_1^{j+k_1-1} Y_1) X_2 T_2^{1-j} \\ \vdots & \vdots \\ X_1 T_1^{l-1} & \sum_{j=0}^{k_2-1} (X_1 T_1^{j+k_1-1} Y_1) X_2 T_2^{k_2-1-j} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} X_1 \\ X_1 T_1 \\ \vdots \\ X_1 T_1^{k_1-1} \end{vmatrix} = Q(X_1, T_1) \text{ invertible}$$

$$\begin{vmatrix} X_2 \\ \sum_{j=0}^1 (X_1 T_1^{j+k_1-1} Y_1) X_2 T_2^{1-j} \\ \vdots \\ \sum_{j=0}^{k_2-1} (X_1 T_1^{j+k_1-1} Y_1) X_2 T_2^{k_2-1-j} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} I & 0 & 0 & \dots & 0 \\ X_1 T_1^{k_1} Y_1 & I & 0 & \dots & 0 \\ X_1 T_1^{k_1+1} Y_1 & X_1 T_1^{k_1} Y_1 & I & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ X_1 T_1^{l-2} Y_1 & X_1 T_1^{l-3} Y_1 & \dots & X_1 T_1^{k_1} Y_1 & I \end{vmatrix} \cdot Q(X_2, T_2)$$

は invertible,

$\therefore Q(X, T)$ は invertible.

$P = \{z \mid |z|=1\}$ 上の関数 P の内部 $\geq \sigma(L)$ となる。

$$L(\lambda) = I \cdot \lambda^l + \sum_{j=0}^{l-1} A_j \lambda^j \quad \text{とする。}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_P \lambda^j L^{-1}(\lambda) d\lambda &= \frac{1}{2\pi i} \int_P \lambda^{j-l} (1 + A_{l-1} \lambda^{-1} + \dots + A_0 \lambda^{-l})^{-1} d\lambda \\ &= \begin{cases} 0 & j=0, 1, \dots, l-2 \\ I & j=l-1 \end{cases} \end{aligned}$$

6.

一方, $\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \lambda^j (\lambda - T)^{-1} d\lambda = T^j$, $j=0, 1, 2, \dots$. 従って, 定理

の (a) より,

$$X T^j Y = \begin{cases} 0 & j=0, 1, 2, \dots, \ell-2 \\ I & j=\ell-1 \end{cases}$$

最後に, (X, T) が standard pair の条件 (b) を満たすことを示す。 $k=0, 1, 2, \dots$ に対し,

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \lambda^k L(\lambda) L(\lambda)^{-1} d\lambda = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \lambda^k L(\lambda) X (\lambda - T)^{-1} Y d\lambda \\ &= (X T^{\ell} + \sum_{j=0}^{\ell-1} A_j X T^j) T^k Y, \end{aligned}$$

$$R(T, Y) \text{ は invertible であるから, } X T^{\ell} + \sum_{j=0}^{\ell-1} A_j X T^j = 0.$$

[定理 2.2.] $L(\lambda)$ は 関数 ℓ の m.o.p., (X, T, Y) を その standard triple とする。もし T -invariant subspace $\mathcal{L}$ が存在して, $Q_k(X, T)|_{\mathcal{L}} : \mathcal{L} \rightarrow \mathbb{R}^k$ が invertible ならば, 次の成立する。ここで, $Q_k(X, T) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{vmatrix} X \\ X T \\ \vdots \\ X T^{k-1} \end{vmatrix} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^{\ell}, \mathbb{R}^k)$.

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad \mathbb{R}^{\ell} &= \mathcal{L} \oplus \text{Im } R_{\ell-k}(T, Y), \quad \text{ここで, } R_{\ell-k}(T, Y) \stackrel{\text{def}}{=} \\ &= (Y, T Y, \dots, T^{\ell-k-1} Y) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^{\ell-k}, \mathbb{R}^{\ell}). \end{aligned}$$

$$\text{(ii)} \quad L(\lambda) = L_2(\lambda) L_1(\lambda),$$

$$\begin{aligned} L_1(\lambda) &\text{ は right standard pair } \tilde{X}_1 = (X|_{\mathcal{L}})(Q_k(X, T)|_{\mathcal{L}})^{-1} \\ \tilde{T}_1 &= (Q_k(X, T)|_{\mathcal{L}})(T|_{\mathcal{L}})(Q_k(X, T)|_{\mathcal{L}})^{-1} \end{aligned}$$

をもち, $L_2(\lambda)$ は left standard pair

$$\tilde{T}_2 = R_{\ell-k}^{-1}(T, Y)(P T|_{\text{Im } R_{\ell-k}(T, Y)})R_{\ell-k}(T, Y), \quad \tilde{Y}_2 = R_{\ell-k}^{-1}(T, Y)(P Y)$$

をもち m.o.p. である。ここで, $R_{\ell-k}^{-1}(T, Y)$ は $R_{\ell-k}(T, Y)$ の逆。

left inverse, P は X^L の $\mathcal{L}$ への $\exists \mathcal{D}$ である $\text{Im } R_{l-k}(T, Y)$ への projection である。

証明. (i) $Q_k(X, T)|_{\mathcal{L}}: \mathcal{L} \rightarrow X^k$ invertible より,
 $X^L = \mathcal{L} \oplus \text{Ker } Q_k(X, T)$. 従って, $\text{Ker } Q_k(X, T) = \text{Im } R_{l-k}(T, Y)$
 を示せばよい。これは standard triple の条件 (c) より従う。

$$(ii) \quad Q(\tilde{X}_1, \tilde{T}_1) = \begin{pmatrix} \tilde{X}_1 \\ \tilde{X}_1 \tilde{T}_1^{l-k-1} \end{pmatrix} = (Q_k(X, T)|_{\mathcal{L}})(Q_k(X, T)|_{\mathcal{L}})^{-1} = I_{X^k}$$

$$R(\tilde{T}_2, \tilde{Y}_2) = I_{X^{l-k}}.$$

定理 1.2. より, standard triple $(\tilde{X}_1, \tilde{T}_1, E_k)$ は $\mathcal{L}$ への m.o.p.
 $L_1(X)$ と, standard triple $(F_{l-k}, \tilde{T}_2, \tilde{Y}_2)$ は $\mathcal{L}$ への $(l-k)$ への m.o.p.

$$L_2(X) \text{ が存在する。ここで, } E_k = Q(\tilde{X}_1, \tilde{T}_1)^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ I_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ I_k \end{pmatrix}_{(X^k)},$$

$$F_{l-k} = (0 \cdots 0 I_{l-k}) R(\tilde{T}_2, \tilde{Y}_2)^{-1} = (0 \cdots 0 I_{l-k}).$$

定理 2.1. より,

$$\tilde{X} = (\tilde{X}_1, 0), \quad \tilde{T} = \begin{pmatrix} \tilde{T}_1 & E_k F_{l-k} \\ 0 & \tilde{T}_2 \end{pmatrix}, \quad \tilde{Y} = \begin{pmatrix} 0 \\ \tilde{Y}_2 \end{pmatrix}$$

は $L_2(X) \subset L_1(X)$ の standard triple である。 $L(X) = L_2(X) \cup L_1(X)$ を示すためには $(\tilde{X}, \tilde{T}, \tilde{Y})$ と (X, T, Y) が similar であることを示せばよい。(定理 1.1. より)。

$X^L = \mathcal{L} \oplus \text{Im } R_{l-k}(T, Y)$ に従って,

X, T, Y は次のように表現される: $X = (X_1, 0)$ ($\text{Im } R_{l-k}(T, Y)$

$$= \text{Ker } Q_k(X, T) \subseteq \text{Ker } X), \quad T = \begin{pmatrix} T_1 & T_3 \\ 0 & T_2 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 0 \\ Y_2 \end{pmatrix}.$$

従って, 分解 $X^L = X^k \oplus X^{l-k} = \mathcal{L} \oplus \text{Im } R_{l-k}(T, Y)$ に従って,

$$M \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} (Q_k(X, T)|_{\mathcal{L}})^{-1} & 0 \\ 0 & R_{l-k}(T, Y) \end{pmatrix} \text{ とすれば, } \tilde{X} = X M,$$

$$\tilde{T} = M^{-1} T M, \quad \tilde{Y} = M^{-1} Y \text{ となることを確かめる。}$$

上の定理で、ある条件を満足する T -invariant subspace から $L(x)$ の right divisor を得ることができたが、実際すべての L の right divisor はこの方法で得られる。

[定理 2.3] $L(x)$: 次数 l の m.o.p., (X, T, Y) をその standard triple, $L_1(x)$: 次数 k の $L(x)$ の monic. right divisor とする。そのとき、次を満たす T -invariant subspace $\mathcal{L}$ が一意的に存在する: $Q_k(X, T)|_{\mathcal{L}}: \mathcal{L} \rightarrow \mathbb{A}^k$ は invertible かつ,

$$(X|_{\mathcal{L}})(Q_k(X, T)|_{\mathcal{L}})^{-1}, (Q_k(X, T)|_{\mathcal{L}})(T|_{\mathcal{L}})(Q_k(X, T)|_{\mathcal{L}})^{-1}$$

は $L_1(x)$ の right standard pair である。

証明. $L(x) = L_2(x) L_1(x)$, L_1, L_2 の standard triple の $1 \rightarrow 2$, それぞれ (X_1, T_1, Y_1) , (X_2, T_2, Y_2) とする。定理 2.1. より,

$$\tilde{X} = (X_1, 0), \quad \tilde{T} = \begin{pmatrix} T_1 & Y_1 X_2 \\ 0 & T_2 \end{pmatrix}, \quad \tilde{Y} = \begin{pmatrix} 0 \\ Y_2 \end{pmatrix}$$

は $L(x)$ の standard triple である。 (X, T, Y) はまた $L(x)$ の standard triple であるから、ある invertible operator $M \in \mathcal{L}(\mathbb{A}^2)$ が存在して、 $\tilde{X} = X M$, $\tilde{T} = M^{-1} T M$, $\tilde{Y} = M^{-1} Y$.

$\mathcal{L} \stackrel{\text{def}}{=} M(\mathbb{A}^k \oplus \{0\})$ は T -invariant である,

$$Q_k(X, T)|_{\mathcal{L}} = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_1 T_1 \\ \vdots \\ X_1 T_1^{k-1} \end{pmatrix} \cdot M^{-1}|_{\mathcal{L}} \quad \text{より, } Q_k(X, T)|_{\mathcal{L}} \text{ は invertible.}$$

$$\text{また, } (X|_{\mathcal{L}})(Q_k(X, T)|_{\mathcal{L}})^{-1} = X_1 \cdot Q(X_1, T_1)^{-1}$$

$$(Q_k(X, T)|_{\mathcal{L}})(T|_{\mathcal{L}})(Q_k(X, T)|_{\mathcal{L}})^{-1} = Q(X_1, T_1) T_1 Q(X_1, T_1)^{-1}$$

より, pair $((X|_{\mathcal{L}})(Q_k(X, T)|_{\mathcal{L}})^{-1}, (Q_k(X, T)|_{\mathcal{L}})(T|_{\mathcal{L}})(Q_k(X, T)|_{\mathcal{L}})^{-1})$ は

L_1 の standard pair (X_1, T_1) に similar であるから, せめては
また right standard pair for L_1 である。この一意性は, L_1
の right standard pair (X_1, T_1) をとると,

$$L = \text{Im} \left[Q(X, T)^{-1} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_1 T_1 \\ \vdots \\ X_1 T_1^{l-1} \end{pmatrix} \right]$$

を示すことにより証明される。

3. Spectral divisors

$L(\lambda) : m.o.p.$, $\Gamma \in \Gamma \cap \sigma(L) = \emptyset$ なる Cauchy contour と
する。 $L(\lambda)$ の right (left) divisor $L_1(\lambda)$ は次を満たすとき,
 Γ -spectral right (left) divisor と呼ばれる:

$$\sigma(L_1) \subseteq \Gamma \text{ の内部}, \quad \sigma(L \cdot L_1^{-1}) \subseteq \Gamma \text{ の外部} \\ (\sigma(L_1^{-1} L) \subseteq \Gamma \text{ の外部})$$

[定理 3.1] $L(\lambda) : \overset{\text{1次}}{m.o.p.}$, (X, T, Y) は $L(\lambda)$ の standard
triple, $L_1(\lambda) : \overset{\text{k次}}{\Gamma}$ -spectral right divisor of $L(\lambda)$ ($\Gamma \cap \sigma(L) = \emptyset$)
とし L が $L_1(\lambda)$ に対応する T -invariant subspace とする (定理
2.3) ならば, $L = \text{Im } P_\Gamma$, $\therefore \therefore \therefore$, $P_\Gamma = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma (\lambda - T)^{-1} d\lambda$.

証明. 定理 2.2, 2.3. より

$$T = \begin{pmatrix} T_1 & T_3 \\ 0 & T_2 \end{pmatrix} \quad \text{on } \mathbb{R}^l = L \oplus \text{Im } R_{l-k}(T, Y)$$

$$\sigma(T_1) = \sigma(L_1), \quad \sigma(T_2) = \sigma(L_2) \quad (L_2 = L \cdot L_1^{-1})$$

$L_1 : \Gamma$ -spectral divisor であり, $\sigma(T_1) \subseteq \Gamma$ の内部, $\sigma(T_2) \subseteq \Gamma$ の外部

$$\therefore P_P = \frac{1}{2\pi i} \int_P \begin{vmatrix} (\lambda - T_1)^{-1} & (\lambda - T_1)^{-1} T_3 (\lambda - T_2)^{-1} \\ 0 & (\lambda - T_2)^{-1} \end{vmatrix} d\lambda = \begin{vmatrix} I & X \\ 0 & 0 \end{vmatrix},$$

$$\therefore \operatorname{Im} P_P = \mathcal{L}$$

[定理 3.2.] $L(\lambda)$: k 上 $m \times m$ p.f., (X, T, Y) : $L(\lambda)$ の standard triple,

$$X = (X_1, X_2), \quad T = \begin{pmatrix} T_1 & 0 \\ 0 & T_2 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix}$$

$\mathcal{K}^k = \operatorname{Im} P_P \oplus \operatorname{Ker} P_P$ に対する表現とある。こゝで,

$$P_P = \frac{1}{2\pi i} \int_P (\lambda - T)^{-1} d\lambda, \quad \text{こゝとある},$$

(i) $L(\lambda)$ が P -spectral right divisor of degree k であるための必要十分条件は,

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_1 T_1 \\ \vdots \\ X_1 T_1^{k-1} \end{pmatrix} : \operatorname{Im} P_P \rightarrow \mathcal{K}^k$$

が invertible であることである。

(ii) $L(\lambda)$ が P -spectral left divisor of degree k であるためには, $(Y_1, T_1 Y_1, \dots, T_1^{k-1} Y_1) : \mathcal{K}^k \rightarrow \operatorname{Im} P_P$ が invertible であることが必要十分である。

証明. (i) 必要性は定理 2.3. と定理 3.1 より従う。十分性:

定理 2.2 より, $L(\lambda) = L_2(\lambda) L_1(\lambda)$, (X_1, T_1) : right standard

pair of L_1 , (T_2, X_2) : left standard pair of L_2 , とできる。

こゝとある, $\sigma(L_1) = \sigma(T_1) \subseteq P$ の内部, $\sigma(L_2) = \sigma(T_2) \subseteq P$ の外部

となり, L_1 は L の P -spectral right divisor となる。

(ii) は次の補題と (i) よりわかる。

[補題 3.3.] (X, T, Y) は $\ell: \mathbb{R}$ m.o.p. $L(X)$ の standard triple,
 $P \in \mathcal{L}(X^\ell)$: projection s.t. $TP = PTP$. このとき次は同値;

$$(i) \quad \begin{pmatrix} X \\ XT \\ \vdots \\ XT^{k-1} \end{pmatrix} \Big|_{\text{Im } P} : \text{Im } P \rightarrow \mathbb{R}^k \text{ is invertible} \quad (k < \ell)$$

$$(ii) \quad \mathbb{R}^\ell = \text{Im } P \oplus \text{Im } (Y, TY, \dots, T^{\ell-k-1}Y)$$

$$(iii) \quad (1-P)(Y, TY, \dots, T^{\ell-k-1}Y) : \mathbb{R}^{\ell-k} \rightarrow \text{Im } (1-P) \text{ is invertible.}$$

文献

I. Gohberg, P. Lancaster, L. Rodman:

1. Spectral analysis of matrix polynomials, I. Canonical forms and divisors, Linear Algebra Appl. 20 (1978), 1-44
2. Spectral analysis of matrix polynomials, II. The resolvent form and spectral divisors, Linear Algebra Appl. 21 (1978), 65-88
3. Representations and divisibility of operator polynomials
 Canad. J. Math. 30 (1978), 1045-1069