

N 体 Schrödinger 作用素の極限吸収原理

— A remark on the commutator method —

名古屋大. 工 田村 英男 (Hideo Tamura)

1. N 体 Schrödinger 作用素 (C.m. motion removed)

$$H = H_0 + V, \quad V = \sum_{1 \leq j < k \leq N} V_{jk}.$$

と考える。但し, H_0 は free Hamiltonian, 作用素 H_0, H は共に Hilbert space $L^2 = L^2(\mathbb{R}_x^{3(N-1)})$ に作用する。 j -th と k -th 粒子間の pair potential (real-valued) $V_{jk} = V_{jk}(x_{jk})$, $x_{jk} = x_j - x_k \in \mathbb{R}^3$, に次の仮定をおく:

$$(V) \quad (V.0) \quad V_{jk}(y) = V_{jk}^s(y) + V_{jk}^l(y), \quad y \in \mathbb{R}^3,$$

$$(V.1) \quad |V_{jk}^s(y)| \leq C (1 + |y|)^{-(1+p)}, \quad \exists p > 0.$$

$$(V.2) \quad |\partial_y^\alpha V_{jk}^e(y)| \leq C(1+|y|)^{-(|\alpha|+p)}, \quad 0 \leq |\alpha| \leq 1.$$

Notations

$$(i) \quad X_\beta, \beta \geq 0 : \varphi(x) \longmapsto (1+|x|)^{-\beta} \varphi(x), \quad x \in \mathbb{R}^{3(N-1)},$$

$$(ii) \quad \|\cdot\| \text{ operator norm} : L^2 \longrightarrow L^2.$$

Theorem. 仮定: (i) (V); (ii) spectral parameter $\lambda \in \mathbb{R}^1$ は H の eigenvalue & $\tilde{u}$ threshold $\tilde{u}$ ではない.

このとき:

$$(i) \quad \|X_\beta (H - (\lambda \pm i\kappa))^{-1} X_\beta\| = O(1), \quad \kappa \downarrow 0, \quad \beta > \frac{1}{2}.$$

(ii) 実数軸への境界値 $X_\beta (H - (\lambda \pm i0))^{-1} X_\beta : L^2 \rightarrow L^2$ が存在する.

2. 上の定理に関連したいくつかの結果を述べよう.

(1) $N=2$ case. 定理と同じ仮定のもとで, Ikebe-Saito [I-S] (1972), Lavine [L] (1973) で 極限吸収原理が証明された.

(2) $N \geq 2$ case. 次のクラスの potential について. Mourre [M] (1981), $N=2, 3$, Perry-Sigal-Simon [P-S-S] (1981), $N \geq 2$, に對, 極限吸収原理が証明されたこと.

$$\begin{aligned}
 (0) \quad & V_{jk} = V_{jk}^1 + V_{jk}^2 + V_{jk}^3 \\
 (c.0) \quad & V_{jk}^d, \quad 1 \leq d \leq 3, \\
 (c.1) \quad & (1+|y|) V_{jk}^1 \\
 (c.2) \quad & (1+|y|) (\nabla V_{jk}^2) \\
 (c.3) \quad & (1+|y|) (\nabla V_{jk}^3) \quad \left. \vphantom{\begin{matrix} (c.1) \\ (c.2) \\ (c.3) \end{matrix}} \right\} : H^2(\mathbb{R}_y^3) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}_y^3) \\
 & \hspace{15em} \text{compact} \\
 (b.1) \quad & (1+|y|)^2 V_{jk}^1 \\
 (b.2) \quad & (1+|y|)^2 (\nabla V_{jk}^2) \\
 (b.3) \quad & (1+|y|)^2 (\nabla \nabla V_{jk}^3) \quad \left. \vphantom{\begin{matrix} (b.1) \\ (b.2) \\ (b.3) \end{matrix}} \right\} : L^2(\mathbb{R}_y^3) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}_y^3) \\
 & \hspace{15em} \text{bounded.}
 \end{aligned}$$

我々の定理の主張は $V_{jk}^1 = V_{jk}^S$, $V_{jk}^2 = V_{jk}^L$, $V_{jk}^3 = 0$, とおくことによつて, boundedness restrictions (b.1) ~ (b.3) を仮定しなくとも, N 体 Schrödinger 作用素

に対する極限吸収原理が成立することにある。例えは、

smoothness を仮定しなければ ($V_{jk}^2 = V_{jk}^3 = 0$ or $V_{jk}^k = 0$)、

[M], [P-S-S] では decaying assumption とし

$V_{jk}(y) = O(|y|^{-2})$, $|y| \rightarrow \infty$ の必要はない。上の定理では

一般の short-range potential $V_{jk}(y) = O(|y|^{-\delta})$, $\delta > 1$ に

対して極限吸収原理が成立する。

(3) 最近の Amrein-Berthier-Georgescu [A-B-G]

の仕事で、我々の定理と同じ結果が得られている。

(4) 定理の一つの応用として：

「 X_β , $\beta > 1/2$, は locally H -smooth である」

ことが従う：

$$\int_{-\infty}^{\infty} \|X_\beta \exp(-itH) E_H(P) \varphi\|_{L^2}^2 dt \leq C_P \|\varphi\|_{L^2}^2$$

但し, $I \subset \mathbb{R}^1$ の compact interval (H の eigenvalue & w threshold は含まない), $E_H(\lambda)$ は H に対する spectral resolution.

この結果は Sigal-Soffer [S-S] の N 体完全性と論じた仕事において、一つの基本的役割を果たしてきた。([S-S] では (2) に述べた potential のクラスを考えている。)

3. 定理は Mourre [M] による commutator method と少し修正することによって証明される。この方法の概要及び修正すべき点と簡単に述べよう。詳しくは、上記の論文 [M], [P-S-S], [A-B-G], 及び Tamura [T] と参照して下さい。

3.1 一般性を失わずに $0 < p \leq 1$ と仮定します。今、dilation unitary group の生成作用素 A を次のように定義する：

$$A := (1/2i) \left\{ x \cdot \nabla + \nabla \cdot x \right\}, \quad x \in \mathbb{R}^{3(N-1)}.$$

作用素 A は次の性質をもつ：

$$i[H_0, A] = i(H_0 A - A H_0) = 2H_0.$$

元来の Mourre commutator method による証明では、この

証明の一個所で、double commutator

$$(H_0 + i)^{-1} [[V, A], A] (H_0 + i)^{-1} : L^2 \rightarrow L^2, \text{ bounded}$$

が使われ、このことと保証するためにのみ boundedness restrictions (b.1) ~ (b.3) が使われできた。この難しさをさけるために ε -cut off Hamiltonian $H(\varepsilon)$ を次のように導入する： 今 $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}_y^3)$, $0 \leq \chi \leq 1$, $\text{supp. } \chi \subset \{y : |y| \leq 2\}$, $\chi = 1$ on $\{y : |y| \leq 1\}$ とし、

$$V_{jk}^\varepsilon = \chi(\varepsilon(x_j - x_k)) V_{jk}(x_j - x_k), \quad 0 < \varepsilon \leq 1,$$

$$H(\varepsilon) = H_0 + V^\varepsilon, \quad V^\varepsilon = \sum_{1 \leq j < k \leq N} V_{jk}^\varepsilon.$$

と定義する。修正すべき点は、commutator method を H と自身よりむしろ $H(\varepsilon)$ に適用することにある。実際、定理の仮定のもとで、double commutator に対して

$$\|(H_0 + i)^{-1} [[V^\varepsilon, A], A] (H_0 + i)^{-1}\| = O(\varepsilon^{p-1}), \quad \varepsilon \rightarrow 0.$$

が従う。

3.2 定理の仮定のもとで

Fact: set of eigenvalues and thresholds of H is closed and countable $\hookrightarrow$

が従う。従って、定理の spectral parameter $\lambda \in \mathbb{R}^1$ に対し、次のような cut-off function $f_0 \in C_0^\infty(\mathbb{R}^1)$, $0 \leq f_0 \leq 1$, が与えられる: $\text{supp } f_0 \subset (\lambda - 2\delta, \lambda + 2\delta)$, $(0 < \delta \ll 1)$ の (eigenvalues, thresholds of H) ; $f_0 = 1$ on $[\lambda - \delta, \lambda + \delta]$.

次の評価は Mourre commutator method において最も中心的役割を果たす: 十分小さい δ , $0 < \delta \ll 1$ ととることによって、

$$i f_0(H) [H, A] f_0(H) \geq \gamma f_0(H)^2, \quad \exists \gamma > 0,$$

in the form sense. この評価は Mourre estimate とよばれる。その証明は Froese-Herbat [F-H] が簡潔で読みやすいと思われる。

上の評価より、十分小さい ε , $0 < \varepsilon < 1$ に対して

$$M(\varepsilon) := i f_0(H) [H(\varepsilon), A] f_0(H) \geq (\delta/2) f_0(H)^2$$

が直ちに従う。

3.3 今、作用素 $G_\kappa(\varepsilon): L^2 \rightarrow L^2$ ε 次のように定義する:

$$G_\kappa(\varepsilon) := (H - \lambda - i\kappa - i\varepsilon M(\varepsilon))^{-1}.$$

$H(\varepsilon)$ に対する Mourre estimate より 次の基本的評価が得られる:

$$(0) \quad \|G_\kappa(\varepsilon)\| = O(\varepsilon^{-1}), \quad \varepsilon \rightarrow 0, \text{ uniformly in } \kappa;$$

$$(i) \quad \|g_0(H) G_\kappa(\varepsilon)\| = O(1), \quad \varepsilon \rightarrow 0, \text{ where } g_0 = 1 - f_0.$$

$$(ii) \quad \|f_0(H) G_\kappa(\varepsilon) X_\rho(\varepsilon)\| = O(\varepsilon^{-1/2}) \|F_\kappa(\varepsilon)\|^{1/2},$$

但し

$$F_k(\varepsilon) := X_{\beta}(\varepsilon) G_k(\varepsilon) X_{\beta}(\varepsilon),$$

$$X_{\beta}(\varepsilon), \beta > 1/2: \varphi(x) \longmapsto (1+|x|)^{-\beta} (1+\varepsilon|x|)^{\beta-1} \varphi(x).$$

作用素 $F_k(\varepsilon)$ に differential inequality technique を適用
すると、評価 (i) ~ (ii) より

$$\|(d/d\varepsilon)F_k(\varepsilon)\| = O(\varepsilon^{\beta-1}) + O(\varepsilon^{\beta-3/2}) \|F_k\|^{1/2} + O(\varepsilon^{\beta-1}) \|F_k\|$$

が得られる。この differential inequality を解くことによ
り、 ε ($\varepsilon=0$ の近傍で可積分 in ε)、

$$\|F_k(0)\| = O(1), \quad k \rightarrow 0.$$

従って、定理の statement (i) を証明される。

Remark. 元々の commutator method (H に適用する)
では、

$$\|(d/d\varepsilon)F_k\| = O(\varepsilon^{\beta-1}) + O(\varepsilon^{\beta-3/2}) \|F_k\|^{1/2} + O(1) \|F_k\|$$

が得られました。

4. Commutator method は Mourre 以後、
 Froese-Harbit [F-H]₂ により、 N 体 Schrödinger 作用素の
 正の固有値の非存在の証明、及び Jensen-Mourre-Perry
 [J-M-P] により、resolvent の energy に関する
 smoothness 問題に活用されました。更に、筆者
 [T]₂ により、slowly decaying perturbation をもち、 t -
 acoustic operator の low frequency resolvent analysis
 及び limiting amplitude principle (極限振幅原理)
 の証明へと、その応用は広げられている。

References.

- [A-B-G] : On Mourre's approach to spectral theory, preprint 1988,
to be published in Helv. Acta Phys.
- [F-H] : Duke Math. J., 49(1982), 1075-1085.
- [F-H]₂ : Comm. Math. Phys., 87(1982), 429-447.
- [I-S] : J. Math. Kyoto Univ., 7(1972), 513-542.
- [J-M-P] : Ann. Inst. Henri Poincaré, Physique Theorique, 41(1984),
207-225.
- [L] : J. Func. Anal., 12(1973), 130-154.
- [M] : Comm. Math. Phys., 78(1981), 391-408.
- [P-S-S] : Ann. of Math., 114(1981), 519-567.
- [S-S] : Ann. of Math., 126(1987), 35-108.
- [T] : Principle of limiting absorption for N-body Schrödinger
operators, -a remark on the commutator method-, preprint
1988, to be published in Letters in Math. Phys.
- [T]₂ : Resolvent estimates at low frequencies and limiting
amplitude principle for acoustic propagators, preprint
1988, to be published in J. Math. Soc. Japan.