

トラスと同相な完全導体による電磁波動散乱問題に対する 選点法を用いた isogeometric 境界要素法における Calderón の前処理について

On Calderón's preconditioner for isogeometric boundary element methods using collocation
for electromagnetic wave scattering problems with a PEC homeomorphic to a torus

田原 寛太¹⁾, 新納 和樹²⁾

Kanta TAHARA and Kazuki NIINO

1) 京都大学情報学研究科 (〒 600-8501 京都市左京区吉田本町)

2) 京都大学情報学研究科 (〒 600-8501 京都市左京区吉田本町, E-mail: niino@i.kyoto-u.ac.jp)

The Calderón preconditioner for the isogeometric BEM (boundary element method) discretised with the collocation for Maxwell's equations is investigated in this paper. The Calderón preconditioning for the EFIE with the Galerkin method in general requires the use of the dual basis function, which causes much computational time. We show that the dual basis function in the isogeometric BEM can be introduced in the same way as the original basis function, and that the computational time of a matrix corresponding to the EFIO (Electric field integral operator) discretised with the dual basis function is as much as that with the original basis function. With some numerical examples, we verify that matrices preconditioned with the proposed method are well-conditioned.

Key Words: Isogeometric boundary element method, Calderón preconditioner, EFIE, collocation

1. 序論

Maxwell 方程式に対する境界積分方程式の一つである EFIE (Electric Field Integral Equation)⁽¹⁾ は, 最も単純な定式化の一つとしてこれを用いた数値解法が広く研究されている. EFIE は離散化した際の線型方程式の係数行列に対応する作用素が悪条件であるため, この線型方程式を反復解法で解く際に反復回数が増加する原因となることが知られている. この問題の解決策として Calderón の前処理⁽²⁾ が知られているが, EFIE に素朴に Calderón の前処理を適用すると離散化が破綻することが知られており, これを回避するために多くの研究では, EFIE の離散化に通常用いられる基底関数である RWG (Rao-Wilton-Glisson) 基底⁽³⁾ に加えて, その双対基底である BC (Buffa-Christiansen) 基底⁽⁴⁾ を用いて離散化を行う. BC 基底は, RWG 基底を定義する三角形メッシュをさらに分割したメッシュ上で定義されるため, 自由度が増加することでより多くの計算時間が必要になる問題がある⁽⁵⁾. 我々のグループでは四角形メッシュで領域境界

を近似し, roof-top 関数を基底関数とすることで双対基底も roof-top 関数となることを示した⁽⁶⁾ が, この場合も双対基底の計算にメッシュの再分割が必要である.

一方, EFIE に限らず Maxwell 方程式に対する積分方程式の離散化において, 領域境界を三角形メッシュで近似しその上で RWG 基底を導入した上で素朴な選点法を考えると, 自然な選点法がメッシュの辺の中点となり積分作用素が発散するため, 選点法が適用できないことが知られている. 我々のグループでは境界要素法と isogeometric 解析を組み合わせることによって境界を滑らかに近似でき, これによって EFIE を選点法で離散化できることを示した⁽⁷⁾.

本研究では isogeometric 解析において選点法で離散化された EFIE に Calderón の前処理を適用する方法について論ずる. isogeometric 解析における EFIE では B-spline 関数のテンソル積で表される基底関数を用いるが, その双対基底も異なるメッシュ上の同じ基底関数で表される. 特に最低次の B-spline 関数による基底関数は roof-top 関数に一致するため, isogeometric 解析における双対基底は roof-top 関数の

2021 年 10 月 25 日受付, 2021 年 11 月 25 日受理

双対基底の拡張にあたることを示す。さらにこの方法では双対基底によって離散化された行列の計算のために、メッシュの再分割は必要なく、自由度を増加させずに係数行列を計算できることを示す。

本稿の構成は以下のとおりである。第2節では、提案手法を議論するための予備的な定式化として isogeometric 解析を用いた選点法による EFIE の離散化について述べる。第3節では、isogeometric 境界要素法における Calderón の前処理と双対基底について述べる。その後第4節で数値例を示し、第5節で結論と今後の課題について述べる。

2. 予備的な定式化

2.1. 電磁波動散乱問題及び積分方程式

領域 Ω^- は滑らかな境界 $\Gamma = \partial\Omega^-$ を持つトーラスに同相な領域とし、 $\Omega^+ = \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega^-}$ とする。 Ω^- を占める完全導体による周波数域における散乱問題を考える：

$$\nabla \times \mathbf{E} = i\omega\mu\mathbf{H}, \quad \nabla \times \mathbf{H} = -i\omega\varepsilon\mathbf{E} \quad \text{in } \Omega^+,$$

$$\mathbf{E}^+ \times \mathbf{n} = 0 \quad \text{on } \Gamma,$$

$$(\mathbf{E}^{\text{sca}}, \mathbf{H}^{\text{sca}}) = (\mathbf{E} - \mathbf{E}^{\text{inc}}, \mathbf{H} - \mathbf{H}^{\text{inc}}) \text{ に対する放射条件.}$$

ここに $\mathbf{n}$ は Γ 上 Ω^- から見た外向き単位法線ベクトル、 ω は周波数、 ε, μ はそれぞれ Ω^+ における誘電率と透磁率、 $\mathbf{E}^+$ は Ω^+ における $\mathbf{E}$ の境界 Γ 上への極限、 $(\mathbf{E}^{\text{inc}}, \mathbf{H}^{\text{inc}})$ は与えられた入射波、 $(\mathbf{E}^{\text{sca}}, \mathbf{H}^{\text{sca}})$ は散乱波である。

この問題に対応する境界積分方程式の定式化の一つとして、以下の EFIE が知られている：

$$i\omega\mu Q\mathbf{j} = \mathbf{E}^{\text{inc}} \times \mathbf{n} \quad (1)$$

ここに $\mathbf{j} = \mathbf{n} \times \mathbf{H}^+$ は表面電流、

$$Q\phi = \mathbf{n} \times \int_{\Gamma} \left(1 + \frac{\nabla \nabla}{k^2}\right) G(x, y) \phi(y) dS_y, \quad (2)$$

$$k = \omega\sqrt{\varepsilon\mu},$$

$$G(x, y) = \frac{e^{ik|x-y|}}{4\pi|x-y|},$$

また、 $\mathbf{H}^+$ は Ω^+ における $\mathbf{H}$ の境界 Γ 上への極限である。

2.2. B-spline 関数による散乱体形状の表現

isogeometric 境界要素法を導入する準備として、散乱体境界 Γ を B-spline 関数で表現する。 $D = (0, 1] \times (0, 1]$ とし、 D にデカルト座標 s_I 、($I = 1, 2$) を導入する。 s_I 軸上に節点 $0 = s_I^0 < s_I^1 < \dots < s_I^{n_I} = 1$ を設け、 $s_I^{-i} = s_I^{n_I-i} - 1$ 、 $s_I^{n_I+i} = s_I^i + 1$ とする ($i = 1, 2$)。一般に節点 $t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_{p+1}$ を有する p 次 B-spline 関数を $B_p(t : t_0, t_1, \dots, t_{p+1})$ と書き、幾何形状を表現する基底関数を次のように取る：

$$\begin{aligned} \phi^{ij}(s_1, s_2) \\ = B_2(s_1 : s_1^{i-2}, s_1^{i-1}, s_1^i, s_1^{i+1}) B_2(s_2 : s_2^{j-2}, s_2^{j-1}, s_2^j, s_2^{j+1}) \\ (0 \leq i \leq n_1 + 1, 0 \leq j \leq n_2 + 1) \end{aligned}$$

これらの基底の Greville 座標

$$(s_1^{ig}, s_2^{jg}) = \left(\frac{s_1^{i-1} + s_1^i}{2}, \frac{s_2^{j-1} + s_2^j}{2} \right)$$

において、 Γ 上の点 x^{ij} を通る条件

$$x^{ij} = \sum_{k=1}^{n_1} \sum_{l=1}^{n_2} \phi^{kl}(s_1^{ig}, s_2^{jg}) \hat{x}^{kl} \quad (1 \leq i \leq n_1, 1 \leq j \leq n_2) \quad (3)$$

を $\hat{x}^{kl}$ について解く。求まった $\hat{x}^{kl}$ より B-spline 関数で表現される Γ の近似式は、 $s_1^{i-1} \leq s_1 \leq s_1^i$ 、 $s_2^{j-1} \leq s_2 \leq s_2^j$ を満たす (s_1, s_2) に対して

$$x(s_1, s_2) = \sum_{k=i-1}^{i+1} \sum_{l=j-1}^{j+1} \phi^{kl}(s_1, s_2) \hat{x}^{kl} \quad (4)$$

で与えられる。但し、この式において $1 \leq k \leq n_1, 1 \leq l \leq n_2$ を満たさない k と l については、それぞれ $\text{mod } n_1, \text{mod } n_2$ の意味で取ることとする。

2.3. isogeometric 解析

本稿では未知関数 $\mathbf{j}$ を B-spline 関数を用いて補間する。幾何学量については C^1 級であることのみを要求する。Buffa ら⁽⁸⁾ によると、 Γ 上の $H_{\text{div}}^{-\frac{1}{2}}$ に属する関数 $\mathbf{j}$ は

$$\mathbf{j}_i(y) \approx \sum_{\alpha} \frac{1}{J} \frac{\partial y_i}{\partial s_I} N_I^{\alpha}(s) j^{\alpha}$$

の形で離散化できる。ここに N_I^{α} 、($I = 1, 2$) は D 上の $H_{\text{div}}^{-\frac{1}{2}}$ の基底 (I がベクトル添字) であり、

$$(B_p(s_1) \times B_{p-1}(s_2), B_{p-1}(s_1) \times B_p(s_2))$$

の形を有する。ここに $B_p(s)$ は s に関して周期 1 の p 次周期 B-spline 関数 ($p \geq 1$) である。また α はこのような基底関数の通し番号、 $j^{\alpha} \in \mathbb{C}$ は係数である。また、幾何形状 $y(s_1, s_2)$ は $(s_1, s_2) \in D$ についてそれぞれ周期 1 の C^1 級周期関数であり、

$$J = \sqrt{\left| \frac{\partial y}{\partial s_1} \times \frac{\partial y}{\partial s_2} \right|}$$

は Jacobian である。なお特に断らない限り、大文字、小文字の添字について、それぞれ範囲 2, 3 の範囲で総和規約を適用する。

本稿では $p = 2$ とする。その結果 N_I^{α} は

$$\alpha = 2((i-1)n_2 + j) - 1$$

$$N_1^{\alpha}(s_1, s_2) = B_2(s_1 : s_1^{i-2}, s_1^{i-1}, s_1^i, s_1^{i+1}) B_1(s_2 : s_2^{j-1}, s_2^j, s_2^{j+1})$$

$$N_2^{\alpha}(s_1, s_2) = 0$$

となるもの (Fig. 1 の黒矢印) と、

$$\alpha = 2((i-1)n_2 + j)$$

$$N_1^{\alpha}(s_1, s_2) = 0$$

$$N_2^{\alpha}(s_1, s_2) = B_1(s_1 : s_1^{i-1}, s_1^i, s_1^{i+1}) B_2(s_2 : s_2^{j-2}, s_2^{j-1}, s_2^j, s_2^{j+1})$$

となるもの (Fig. 2 の黒矢印) に分けられる。それぞれの図において、四角形の頂点が格子点 s_I^i に対応しており、それぞれの基底関数の台は図に示した 6 つの四角形である。し

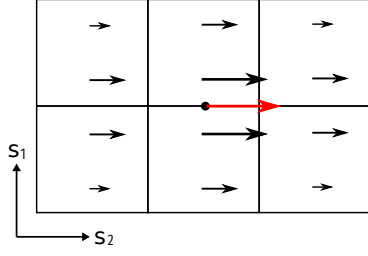


Fig. 1 A basis function directing s_1 direction. Six squares are support of the basis function. Circular dot indicates the collocation point. Red arrow shows the direction in which the boundary integral equations are evaluated at the collocation point.

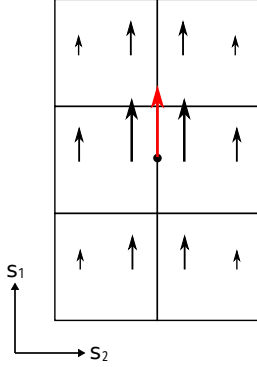


Fig. 2 A basis function directing s_2 direction. Six squares are support of the basis function. Circular dot indicates the collocation point. Red arrow shows the direction in which the boundary integral equations are evaluated at the collocation point.

たがって EFIE (式 (1)) を選点法で離散化する場合、選点を Fig. 1 の黒点に対応する点

$$\left(\frac{s_1^{i-1} + s_1^i}{2}, s_2^j \right) \quad (1 \leq i \leq n_1, 1 \leq j \leq n_2), \quad (5)$$

及び Fig. 2 の黒点に対応する点

$$\left(s_1^i, \frac{s_2^{j-1} + s_2^j}{2} \right) \quad (1 \leq i \leq n_1, 1 \leq j \leq n_2), \quad (6)$$

とし、図中の赤矢印に対応する Γ 上の接ベクトルを $\mathbf{t}$ として、

$$i\omega\mu(\mathbf{n} \times \mathbf{t}) \cdot (Q\mathbf{j}) = (\mathbf{n} \times \mathbf{t}) \cdot (\mathbf{E}^{\text{inc}} \times \mathbf{n}) \quad (7)$$

をそれぞれの選点において評価することが自然であることがわかる⁽⁷⁾。これにより式 (1) の EFIE は以下の代数方程式に帰着される。

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}, \quad (8)$$

ここに

$$(A)_{mn} = i\omega\mu(\mathbf{n} \times \mathbf{t}_m) \cdot \left(Q \left(\frac{1}{J} \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial s_I} N_I^n \right) \right) (x_m), \quad (9)$$

$$(\mathbf{x})_n = \mathbf{j}^n,$$

$$(\mathbf{b})_m = (\mathbf{n} \times \mathbf{t}_m) \cdot (\mathbf{E}^{\text{inc}}(x_m) \times \mathbf{n}),$$

$(\cdot)_{mn}$ は行列の (m, n) 要素, $(\cdot)_m$ はベクトルの第 m 要素, x_m は m 番目の選点, $\mathbf{t}_m$ は選点 x_m におけるベクトル $\mathbf{t}$ に対応するベクトルであり、

$$\mathbf{t}_m = \begin{cases} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial s_1} & \text{if } x_m = x \left(\frac{s_1^{i-1} + s_1^i}{2}, s_2^j \right) \\ \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial s_2} & \text{if } x_m = x \left(s_1^i, \frac{s_2^{j-1} + s_2^j}{2} \right) \end{cases} \quad (10)$$

である。

3. isogeometric 境界要素法における Calderón の前処理

3.1. Calderón の公式

式 (2) で定義された作用素 Q は以下の Calderón の公式

$$k^2 Q^2 = -\frac{1}{4} \mathcal{I} + \mathcal{K}$$

を満たす⁽⁹⁾。ここに $\mathcal{I}$ は単位作用素, $\mathcal{K}$ はコンパクト作用素である。これより $k^2 Q^2$ は単位作用素の定数倍にコンパクト作用素を除いて等しいので、線形方程式の求解に反復法を用いる際、式 (1) を直接離散化して解くよりも、EFIE の両辺に $-i\omega\epsilon Q$ を乗じた式

$$k^2 Q^2 \mathbf{j} = -i\omega\epsilon Q(\mathbf{E}^{\text{inc}} \times \mathbf{n}) \quad (11)$$

を離散化した式を解く方が反復回数を削減できることが期待される。

3.2. Calderón の前処理の離散化

式 (11) の離散化を考察するために、式 (9) で定義された行列 A と作用素 Q の関係について考察する。行列 A を線形写像と見なしたときの定義域のベクトル空間は、 $H_{\text{div}}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ の基底関数

$$\frac{1}{J} \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial s_I} N_I^n \quad (12)$$

の係数を並べたベクトルの集合と見なすことができる。実際、

$$\mathbf{j} = \sum_n \frac{1}{J} \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial s_I} N_I^n j^n$$

とし、基底関数の係数を並べたベクトルを $\mathbf{x}$, $((\mathbf{x})_n = j^n)$ とすると、

$$(A\mathbf{x})_m = (\mathbf{n} \times \mathbf{t}_m) \cdot (i\omega\mu Q\mathbf{j})(x_m)$$

となり、ベクトル $A\mathbf{x}$ の第 m 成分は、ベクトル場 $i\omega\mu Q\mathbf{j}$ の選点 x_m における値の $\mathbf{n} \times \mathbf{t}_m$ 方向成分である。したがって作用素 Q^2 に対応する行列を、行列 A から構成するためには、あるベクトル場の選点 x_m における $\mathbf{n} \times \mathbf{t}_m$ 方向成分を並べたベクトルを、同じベクトル場を基底関数で補間した際の係数を並べたベクトルに変換する変換行列が必要である。また $A\mathbf{x}$ は選点 x_m 上の $\mathbf{n} \times \mathbf{t}_m$ 方向成分に対応するが、選点 x_m を台の中心に持つ基底関数 (12) は直交方向である $\mathbf{t}_m$ 方向に向いているため、 $\mathbf{n} \times \mathbf{t}_m$ 方向に向いた新たな基底を導入するのが自然である。

以上の考察より、 Q^2 の離散化として以下のような方法を提案する。まず選点 x_m 上で $\mathbf{n} \times \mathbf{t}_m$ 方向を向いた基底関数を導入するために、Fig. 3 の様に元のメッシュ (図中黒点線)

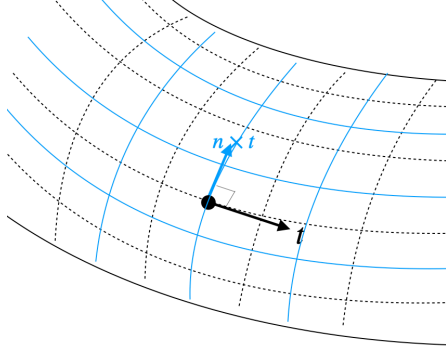


Fig. 3 The boundary Γ decomposed with the original mesh (black dotted lines) and the mesh for dual basis function (blue lines).

を半分ずらしたメッシュ(図中青線)を構成する。これは式(3)で $\hat{x}^{kl}$ を決定するための選点 x^{ij} を変更するのみで実現できる(具体的な方法は4節で述べる)。このようにして得られた幾何形状を $\hat{\mathbf{y}}$ とし、この上で定義される基底関数

$$\frac{1}{J} \frac{\partial \hat{\mathbf{y}}}{\partial s_I} N_I^n$$

を考える。本稿ではこの基底関数を元の基底関数(12)に対する双対基底と呼ぶ。実際2.2節で定義した $H_{\text{div}}^{-\frac{1}{2}}(D)$ の基底関数 N_I^n を $p=1$ とすると、上で定義した基底関数はRoof-top関数とその双対基底に対応する⁽⁶⁾。

また元のメッシュの各選点 x_m 上でベクトル場の $\mathbf{n} \times \mathbf{t}_m$ 方向成分(f_m とする)が与えられたとき、このベクトル場を双対基底で補完するためには、各選点で立式される連立方程式

$$T\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{f}$$

を解いて $\tilde{\mathbf{x}}$ を定めれば良い。ここに

$$\begin{aligned} (T)_{mn} &= \left\{ (\mathbf{n} \times \mathbf{t}_m) \cdot \frac{1}{J} \frac{\partial \tilde{\mathbf{y}}}{\partial s_I} N_I^n \right\} \Big|_{\tilde{\mathbf{y}}=x_m}, \quad (13) \\ (\tilde{\mathbf{x}})_n &= \tilde{j}^n, \\ (\mathbf{f})_m &= f_m \end{aligned}$$

である。さらに N_I^n の定義より $N_1^n = 0$ または $N_2^n = 0$ なので、式(13)中の I に関する総和規約は $I=1$ または $I=2$ と見なせることと、 D の分割が十分に細かいとき $\frac{\partial \tilde{\mathbf{y}}}{\partial s_I} \approx \frac{\partial \tilde{\mathbf{y}}}{\partial s_I}$ であることに注意すると、式(10)より

$$\begin{aligned} (T)_{mn} &= \left\{ \frac{1}{J} \mathbf{n} \cdot \left(\frac{\partial \tilde{\mathbf{y}}}{\partial s_K} \times \frac{\partial \tilde{\mathbf{y}}}{\partial s_I} \right) N_I^n \right\} \Big|_{\tilde{\mathbf{y}}=x_m} \\ &\approx \begin{cases} N_2^n(s_m) & (K=1, I=2) \\ -N_1^n(s_m) & (K=2, I=1) \\ 0 & (K=I) \end{cases} \quad (14) \end{aligned}$$

となり、 T は幾何形状に依存しない。但し s_m は選点 x_m に対応する D 上の点である。式(14)より、 $(T)_{mn}$ は選点 x_m における N_I^n の辺と平行な成分の値に対応するため、2次B-spline関数 B_2 の各区間の midpoint の値に等しい。したがっ

て T は各行に非零の要素数が3の疎行列であり、 s_1, s_2 軸の分割が等間隔のとき狭義優対角行列であることがわかる。

同様に双対基底を定義したメッシュ上の選点 $\tilde{x}_m$ で、ベクトル場の $\mathbf{n} \times \tilde{\mathbf{t}}_m$ 方向成分が与えられたときに、このベクトル場を元の基底関数で補間することを考えると対応する行列 $\tilde{T}$ は

$$\begin{aligned} (\tilde{T})_{mn} &= \left\{ (\mathbf{n} \times \tilde{\mathbf{t}}_m) \cdot \frac{1}{J} \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial s_I} N_I^n \right\} \Big|_{\mathbf{y}=\tilde{x}_m} \\ &= -T \end{aligned}$$

となる。

以上より、式(11)は以下の様に離散化できることがわかる。

$$\tilde{T}^{-1} \tilde{A} T^{-1} A \mathbf{x} = \tilde{T}^{-1} \tilde{A} T^{-1} \mathbf{b}. \quad (15)$$

4. 数値計算例

本稿では領域 Ω^- として、境界 Γ が

$$\begin{aligned} x_1 &= (a + b \cos \theta) \cos \phi \\ x_2 &= (a + b \cos \theta) \sin \phi \\ x_3 &= b \sin \theta \\ (0 \leq \phi \leq 2\pi, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi) \end{aligned}$$

で表されるトーラス形状を考えた。以下の数値例では $a=3, b=1, \varepsilon=\mu=1$ とした。また入射波は

$$\mathbf{E}^{\text{inc}} = (0, e^{ikx_1}, 0)$$

とした。3.2節で示した通り提案手法では2種類の基底関数を導入するために2種類のメッシュを用意する。メッシュは式(3)において x_k^{ij} を

$$x_1^{ij} = (a + b \cos \theta^j) \cos \phi^i \quad (16)$$

$$x_2^{ij} = (a + b \cos \theta^j) \sin \phi^i \quad (17)$$

$$x_3^{ij} = b \sin \theta^j \quad (18)$$

とし、求めた $\hat{x}^{kl}$ から式(4)により定義されるが、通常の基底関数を与えるためのメッシュでは式(16), (17), (18)において

$$\phi^i = 2\pi s_1^{ig}$$

$$\theta^j = 2\pi s_2^{jg}$$

とし、双対基底を与えるためのメッシュは

$$\phi^i = 2\pi \left(s_1^{ig} + \frac{1}{2n_1} \right)$$

$$\theta^j = 2\pi \left(s_2^{jg} + \frac{1}{2n_2} \right)$$

とした。

波数を $k=1$ 、メッシュの分割数を $(n_1, n_2) = (15, 5), (30, 10), (45, 15), (60, 20)$ としたときの、式(8)の係数行列 A と式(15)の係数行列 $\tilde{T}^{-1} \tilde{A} T^{-1} A$ の条件数をプロットした図が Fig. 4

である．この図の横軸は各分割数に対する自由度 $2n_1n_2$ である．行列 A は悪条件であり，メッシュサイズが大きくなるに従い条件数も大きくなるが，行列 $\tilde{T}^{-1}\tilde{A}T^{-1}A$ の条件数は小さい値で安定しており，Calderón の前処理が予想通りの効果を挙げていることがわかる．また $(n_1, n_2) = (15, 5), (60, 20)$

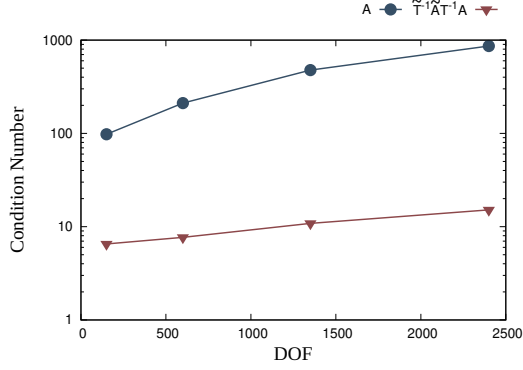


Fig. 4 Condition numbers of A and $\tilde{T}^{-1}\tilde{A}T^{-1}A$.

の場合について，行列 A と $\tilde{T}^{-1}\tilde{A}T^{-1}A$ の固有値を複素平面上にプロットした図を Figs. 5, 6 に，これらの図の原点付近の拡大図を Figs. 7, 8 に示す．Figs. 5, 7 より $(n_1, n_2) = (15, 5)$ の場合，Calderón の前処理を適用した行列は固有値が $-\frac{1}{4}$ 周辺に集まっていることがわかる．一方 Figs. 6, 8 に示す $(n_1, n_2) = (60, 20)$ の場合では，自由度が増加したことにより，行列 $\tilde{T}^{-1}\tilde{A}T^{-1}A$ の固有値の分布が $-\frac{1}{4}$ 周辺から広がっているが，絶対値最小の固有値が行列 A のそれより大きい

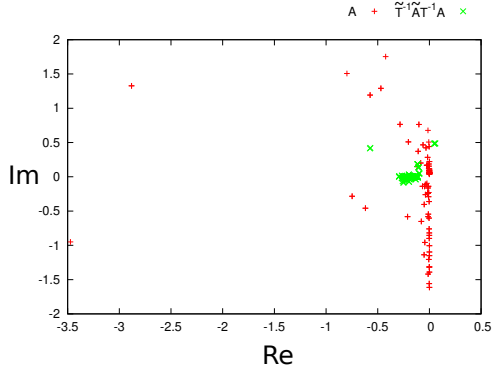


Fig. 5 Eigenvalues of A and $\tilde{T}^{-1}\tilde{A}T^{-1}A$ for $(n_1, n_2) = (15, 5)$.

5. 結論

本稿では選点法を用いた isogeometric 境界要素法における Calderón の前処理の実装法を提案した．境界 Γ を 2 種類のメッシュで近似し，それぞれのメッシュで同じ基底関数を導入することで Calderón の前処理が実装できることを示した．またこの方法では 2 種類のメッシュとして同じ分割数のメッシュを用いるため，BC 基底などで必要となるメッシュの再分割が必要なく，係数行列と前処理行列が同じ計算量で計算できる．本稿では Calderón の前処理の実装について，最も

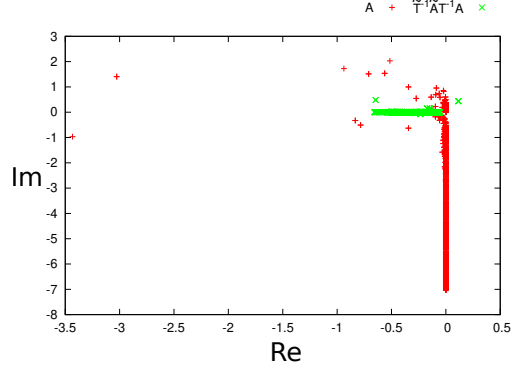


Fig. 6 Eigenvalues of A and $\tilde{T}^{-1}\tilde{A}T^{-1}A$ for $(n_1, n_2) = (60, 20)$.

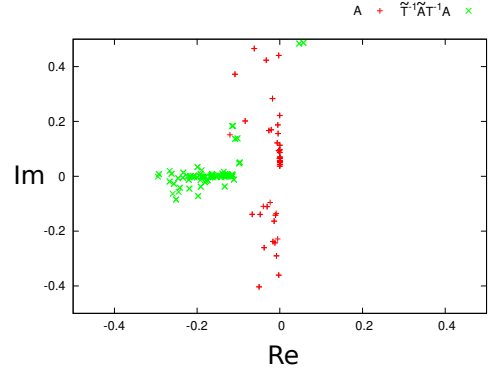


Fig. 7 An enlarged drawing of Fig. 5 around the origin.

基礎的な部分に着目するために，領域形状をトーラスと同相なものに限定することで，単一のパッチ D によって境界全体が近似できる場合を取り扱った．通常の isogeometric 解析で用いられるような複数のパッチを張り合わせて境界形状を表現する場合は，パッチをまたぐ基底関数とその双対基底を導入する必要がある．特に境界形状が立方体境界と同相な場合，立方体の角をまたぐ双対基底が精度の悪化などを引き起こすことが roof-top 関数の場合に知られており⁽⁶⁾，提案手法も同様の問題を持つと考えられる．この問題に対応することは今後の課題である．

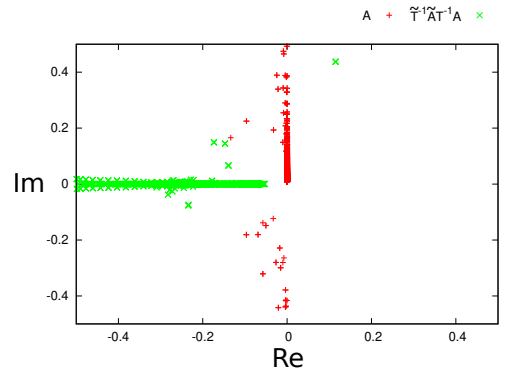


Fig. 8 An enlarged drawing of Fig. 6 around the origin.

参考文献

- (1) W. C. Chew. *Waves and fields in inhomogeneous media*. IEEE press New York, 1995.
- (2) O. Steinbach and W.L. Wendland. The construction of some efficient preconditioners in the boundary element method. *Advances in Computational Mathematics*, Vol. 9, No. 1, pp. 191–216, 1998.
- (3) S. Rao, D. Wilton, and A. Glisson. Electromagnetic scattering by surfaces of arbitrary shape. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, Vol. 30, No. 3, pp. 409–418, 1982.
- (4) A. Buffa and S.H. Christiansen. A dual finite element complex on the barycentric refinement. *Mathematics of Computation*, Vol. 76, pp. 1743–1769, 2007.
- (5) F.P. Andriulli, K. Cools, H. Bagci, F. Olyslager, A. Buffa, S. Christiansen, and E. Michielssen. A multiplicative Calderón preconditioner for the electric field integral equation. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, Vol. 56, No. 8, pp. 2398–2412, 2008.
- (6) K. Niino and N. Nishimura. Calderón’s preconditioning approaches for PMCHWT formulations for Maxwell’s equations. *International Journal of Numerical Modelling: Electronic Networks, Devices and Fields*, Vol. 25, pp. 558–572, 2012.
- (7) 新納和樹, 西村直志. Maxwell 方程式における isogeometric 境界積分法と選点法による離散化. 計算数理工学論文集, Vol. 19, pp. 91–94, 2019.
- (8) Annalisa Buffa, Giancarlo Sangalli, and Rafael Vázquez. Isogeometric analysis in electromagnetics: B-splines approximation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 199, No. 17-20, pp. 1143–1152, 2010.
- (9) J.C. Nédélec. *Acoustic and Electromagnetic Equations: Integral Representations for Harmonic Problems*. Springer Verlag, 2001.