

Cohomology of Operator Algebras

東工大理 中 神 祥 臣

この内容は R. V. Kadison and J. R. Ringrose により
発展させられている作用素環の Cohomology の論文:

Cohomology of operator algebras,

I. Type I von Neumann algebras.

Acta Math. 126 (1971), 227-243.

II. Extended cobounding and the hyperfinite case

Arkiv för Mat. 9 (1971), 55-63.

の主要な結果の紹介である。これらに引き続き Johnson,
Kadison and Ringrose は才Ⅲ番目の論文を最近発表して
いるので, もし原稿が入手できればそれについても最後に簡
単に触れたいと思っている。なお, これら3編の論文をもと
にした講義が昨年 Ringrose 自身により行われており, その
様子は

Lecture on Operator Algebras.

Springer Verlag, 247 (1972), 359-434.

に収められている。

§ 1. 術語と定義

A を複素数体 $\mathbb{C}$ 上で定義され単位元 1 をもつ単位代数とする。 $\mathcal{M}$ が A -左加群 (または A -右加群) であるとは、 $\mathcal{M}$ が加群であるとともに $x \in A, m \in \mathcal{M}$ に対して $xm \in \mathcal{M}$ (または $mx \in \mathcal{M}$) が定義され次の (i), (ii), (iii), (iv) (または (i'), (ii'), (iii'), (iv')) が成り立つことである。

$$(i) \quad x(m_1 + m_2) = xm_1 + xm_2, \quad (i') \quad (m_1 + m_2)x = m_1x + m_2x$$

$$(ii) \quad (x+y)m = xm + ym, \quad (ii') \quad m(x+y) = mx + my$$

$$(iii) \quad (xy)m = x(ym), \quad (iii') \quad m(xy) = (mx)y$$

$$(iv) \quad 1 \cdot m = m \quad (iv') \quad m \cdot 1 = m$$

$\mathcal{M}$ が A -両側加群 であるとは $\mathcal{M}$ は A -左加群かつ A -右加群であって $x, y \in A$ と $m \in \mathcal{M}$ に対し

$$(v) \quad (xm)y = x(my)$$

が成り立つことである。以後現われる A はすべて単位代数である。

$A = (A, || \cdot ||)$ を Banach 代数とする。 $\mathcal{M}$ が A -両側 Banach 加群 であるとは、 $\mathcal{M} = (\mathcal{M}, || \cdot ||)$ が Banach 代数でありかつ

A -両側加群であるとともに, 或る数 $\lambda > 0$ が存在して

$$\|xm\| \leq \lambda \|x\| \|m\| \quad (\text{または } \|mx\| \leq \lambda \|x\| \|m\|)$$

が成り立つことである. $\mathcal{M}$ が A -両側双対加群 であるとは, $\mathcal{M}$ がある Banach 空間 $\mathcal{M}^*$ の双対空間と同型であるような A -両側 Banach 加群であるとともに $x \in A, m \in \mathcal{M}$ に対し $m \mapsto xm$ と $m \mapsto mx$ が弱*連続となっていることである.

$\mathcal{M}$ を A -両側 Banach 加群とする. n を任意な自然数とする. A 上で定義された $\mathcal{M}$ に値を持つ有界な n 重線形写像全体の集合を $C^n(A, \mathcal{M})$ と表わす. $C^0(A, \mathcal{M})$ を $\mathcal{M}$ 自身で定義する. 各 n に対して $C^n(A, \mathcal{M})$ から $C^{n+1}(A, \mathcal{M}) \wedge$ の写像 δ を各 $f \in C^n(A, \mathcal{M})$ に対し

$$\begin{aligned} (\delta f)(x_0, x_1, \dots, x_n) &= x_0 f(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ &+ \sum_{j=1}^n (-1)^j f(x_0, \dots, x_{j-2}, x_{j-1} x_j, x_{j+1}, \dots, x_n) \\ &+ (-1)^{n+1} f(x_0, x_1, \dots, x_{n-1}) x_n \end{aligned}$$

で定義し, $C^0(A, \mathcal{M})$ から $C^1(A, \mathcal{M}) \wedge$ の写像 δ を各 $m \in C^0(A, \mathcal{M})$ に対し

$$(\delta m)(x) = xm - mx$$

で定義する. この δ を Co boundary operator とする. 直接計算により $\delta^2 = 0$ が確かめられる. $\delta C^{n-1}(A, \mathcal{M})$ を $B^n(A, \mathcal{M})$

で表わし, $f \in C^n(A, \mathcal{M})$ のうち $\delta f = 0$ となるものの集まりを $Z^n(A, \mathcal{M})$ とする. $\delta^2 = 0$ であるから $B^n(A, \mathcal{M}) \subset Z^n(A, \mathcal{M})$. このとき剰余類の集合 $Z^n(A, \mathcal{M})/B^n(A, \mathcal{M})$ を $H^n(A, \mathcal{M})$ と表わし, A の n 次元 Cohomology 群 という. Banach 代数 A の中心を Z とする. $C^n(A, \mathcal{M})$, $n \geq 1$ の元の内, 任意な j と $z \in Z$ に対し

$$\begin{aligned} f(x_1, \dots, x_{j-1}, zx_j, x_{j+1}, \dots, x_n) \\ = z f(x_1, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, x_n) z \end{aligned}$$

となるような f の集まりを $NC^n(A, \mathcal{M})$ で表わし, $C^0(A, \mathcal{M})$ の元の内, 任意な $z \in Z$ に対し

$$zm = mz$$

となるような m の集まりを $NC^0(A, \mathcal{M})$ で表わす. $NZ^n(A, \mathcal{M}) = Z^n(A, \mathcal{M}) \cap NC^n(A, \mathcal{M})$ とする. もし $f \in Z^1(A, \mathcal{M})$ とすれば

$$0 = (\delta f)(x, y) = x f(y) - f(xy) + f(x) y$$

すなわち, $f(xy) = x f(y) + f(x) y$. ^{から $\mathcal{M}$ へ}したが, f は A の微分である. もし $f \in B^1(A, \mathcal{M})$ ならば, $f = \delta m$, $m \in \mathcal{M}$ であるから, $f(x) = xm - mx$, したがって $\mathcal{M} = A$ ならば f は内微分である. このことから von Neumann 代数または単純な単位代数 M の微分は内微分であるという境の結果は $H^1(M, M) = 0$ と言い換えることができる.

例. $\mathcal{M} = B(\mathcal{H})$, A をその C^* -部分代数とすると

$$C^0(A, \mathcal{M}) = B(\mathcal{H}), \quad Z^0(A, \mathcal{M}) = A'$$

$$C^0(A, A) = A, \quad Z^0(A, A) = A \cap A'$$

$$Z^1(A, A) = \{A \text{ の微分} \}$$

$$B^1(A, A) = \{A \text{ の内微分} \}.$$

なお, $Z^2(A, \mathcal{M})$ の元は A から $\mathcal{M} \wedge$ の因子団であり $B^2(A, \mathcal{M})$ の元は split な因子団である.

§2. Cocycle の正規化.

$Z^n(A, \mathcal{M})$ の元を n -cocycle という

補助定理 2.1. A を Banach 代数, Z をその中心, $\mathcal{M}$ を A -両側 Banach 加群とする. $f \in Z^n(A, \mathcal{M})$ を ใดこかの argument が Z の元である場合に 0 となっているような n -cocycle とすると, $f \in NZ^n(A, \mathcal{M})$.

証明. $f \in Z^n(A, \mathcal{M})$ とすれば $\delta f = 0$. したがって

$$\begin{aligned} 0 &= (\delta f)(z, x_1, \dots, x_n) \\ &= z f(x_1, \dots, x_n) - f(zx_1, x_2, \dots, x_n) + f(z, x_1x_2, x_3, \dots, x_n) - \\ &\quad \dots + (-1)^n f(z, x_1, \dots, x_{n-2}, x_{n-1}x_n) + (-1)^{n+1} f(z, x_1, \dots, x_{n-1})x_n \end{aligned}$$

$$= z f(x_1, \dots, x_n) - f(zx_1, x_2, \dots, x_n).$$

したがって、 $\tau \quad f(zx_1, x_2, \dots, x_n) = z f(x_1, \dots, x_n)$. 再び $\delta f = 0$ より

1)

$$\begin{aligned} 0 &= (\delta f)(x_1, \dots, x_{j-1}, z, x_j, x_{j+1}, \dots, x_n) \\ &= x_1 f(x_2, \dots, x_{j-1}, z, x_j, \dots, x_n) - f(x_1 x_2, x_3, \dots, x_{j-1}, z, x_j, \dots, x_n) \\ &\quad + \dots + (-1)^i f(x_1, \dots, x_{j-2}, x_{j-1} z, x_j, \dots, x_n) \\ &\quad + (-1)^{i+1} f(x_1, \dots, x_{j-1}, z x_j, x_{j+1}, \dots, x_n) + \dots \\ &\quad + (-1)^{n+1} f(x_1, \dots, x_{j-1}, z, x_j, \dots, x_{n-1}) x_n \\ &= (-1)^i \{ f(x_1, \dots, x_{j-2}, x_{j-1} z, x_j, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_{j-1}, z x_j, x_{j+1}, \dots, x_n) \}. \end{aligned}$$

したがって、 $\tau \quad f(x_1, \dots, x_{j-1}, z x_j, x_{j+1}, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, x_{j-2}, z x_{j-1}, x_j, \dots, x_n)$,

$2 \leq j \leq n$. 再び $\delta f = 0$ より

$$\begin{aligned} 0 &= (\delta f)(x_1, \dots, x_n, z) \\ &= x_1 f(x_2, \dots, x_n, z) - f(x_1 x_2, x_3, \dots, x_n, z) + \\ &\quad \dots + (-1)^n f(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n z) + (-1)^{n+1} f(x_1, \dots, x_n) z. \end{aligned}$$

したがって $\tau \quad f(x_1, \dots, z x_n) = z f(x_1, \dots, x_n)$.

補助定理 2.2. A を Banach 代数, $\mathcal{M}$ を A -両側双対加群とし, G を invariant mean μ をもつ A の正規元から成る群とすれば, 次の (i), (ii), (iii) が成り立つ $L_{\mathcal{M}}^{\infty}(G)$ から $\mathcal{M}$ への有界な写像 $\bar{\mu}$ が存在する.

(i) $f \in L_{\mathcal{M}}^{\infty}(G)$ に対し, $f_z(v) = z f(v) y$; $x, y \in A$ とす

れば $\bar{\mu}(f_z) = z \bar{\mu}(f)$ である。

(ii) $f \in L^\infty_m(G)$ に対し $f_w(v) = f(vw)$ とすれば $\bar{\mu}(f) = \bar{\mu}(f_w)$.

(iii) $f \in L^\infty_m(G)$ が定値 m ならば $\bar{\mu}(f) = m$.

証明. $f \in L^\infty_m(G)$ と $m_* \in \mathcal{M}_*$ に対し

$$\langle \bar{\mu}(f), m_* \rangle = \mu \langle f(\cdot), m_* \rangle$$

により $\bar{\mu}(f) \in \mathcal{M}$ を決めればよい。

定理 2.3. A を C^* -代数, Z をその中心, $\mathcal{M}$ を A -両側双対加群とする. $f \in Z^n(A, \mathcal{M})$, $n \geq 1$ ならば, $g \in C^{n-1}(A, \mathcal{M})$ が存在して $f - \delta g$ はどこかの arguments が Z の元であるときに 0 となるような n -cocycle である. 特に, $Z^n(A, \mathcal{M}) = B^n(A, \mathcal{M}) + NZ^n(A, \mathcal{M})$, $n \geq 1$ である.

証明. G を Z の unitary な元全体とすれば, G は可換群となり invariant mean μ を持つ. $f \in Z^n(A, \mathcal{M})$ に対し

$$h_{x_1, \dots, x_{n-1}}^{(1)}(v) = v^* f(v, x_1, \dots, x_{n-1}) \text{ とし } g_1(x_1, \dots, x_n) =$$

$$\bar{\mu}(h_{x_1, \dots, x_{n-1}}^{(1)}) \text{ とする. このとき}$$

$$\begin{aligned} (\delta g_1)(x_1, \dots, x_n) &= x_1 g_1(x_2, \dots, x_n) + \sum_{j=1}^{n-1} (-1)^j g_1(x_1, \dots, x_j x_{j+1}, \dots, x_n) \\ &\quad + (-1)^n g_1(x_1, \dots, x_{n-1}) x_n. \end{aligned}$$

この右辺は次のような $L^\infty_m(G)$ の元

$$v \longmapsto x_1 v^* f(v, x_2, \dots, x_n) + \sum_{j=1}^{n-1} (-1)^j v^* f(v, x_1, \dots, x_j x_{j+1}, \dots, x_n) \\ + v^* f(v, x_1, \dots, x_{n-1}) x_n$$

に μ を作用させた結果である. ここで $x_1 \in G$ とすれば

$$v \longmapsto x_1 v^* f(v, x_2, \dots, x_n) - v^* f(v x_1, x_2, \dots, x_n)$$

に μ を作用させた結果は 0 となり, $x_1 \in G$ の場合には

$$\delta g_1 - f = 0$$

である. $f_1 \equiv f - \delta g_1$ とすれば $f_1 \in Z^n(A, M)$ である.

$h_{x_1, \dots, x_{n-1}}^{(2)}(v) \equiv v^* f_1(x_1, v, x_2, \dots, x_{n-1})$ かつ $g_2(x_1, \dots, x_{n-1})$
 $\equiv \mu(h_{x_1, \dots, x_{n-1}}^{(2)})$ として, 上と同様の計算を行うと, $x_2 \in G$
 の場合には

$$\delta g_2 + f_1 = 0$$

となることがわかる. $x_2 \in G$ の代りに $x_1 \in G$ でも $f_1 = 0$
 であるから $\delta g_2 + f_1 = 0$ が得られる. 以下帰納的に上の
 論法を繰り返して $x_1, \dots, x_n$ のどれか i が G の元ならば

$$f - \delta(g_1 - g_2 + \dots + (-1)^{n+1} g_n) = 0.$$

したがって $g \equiv g_1 - g_2 + \dots + (-1)^{n+1} g_n$ とすればよい. 後
 半は補助定理 2.1 より明らか.

§ 3. I 型 von Neumann 代数の Cohomology.

補助定理 3.1. M を I_∞ ($\ell = 1, 2, \dots, \infty$) 型 von Neumann 代

数, Z とその中心, $\{e_{\kappa} : \kappa \in I\}$ を M の行列単位集合で $\{e_{\kappa} : \kappa \in I\}$ が abelian で equivalent な射影への単位分割となっているものとする. もし $f \in C^n(M, M)$ が任意な $z \in Z$ に対し $f(zx_1, x_2, \dots, x_n) = zf(x_1, x_2, \dots, x_n)$ を満たしていれば次の (i), (ii), (iii) が成り立つ.

(i) 各 $\kappa \in I$ と M の各元 $x_1, \dots, x_n$ に対し

$$\left\{ \sum_J e_{\kappa} f(e_{\kappa} x_1, x_2, \dots, x_n) : J \text{ は有限} \right\}$$

は M の或る元 $h(x_1, \dots, x_n) \wedge \sigma$ -弱収束し $h \in C^n(M, M)$.

(ii) $\|h\| \leq \|f\|$

(iii) $h(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1 h(1, x_2, \dots, x_n)$.

証明. M は discrete であるから, M' は abelian に選べる.

そのとき M が作用している Hilbert 空間を $\mathcal{H}$ とする. 単位ベクトル $\xi \in \mathcal{H}$ に対し, $\xi_{\kappa} = e_{\kappa} f(e_{\kappa} x_1, x_2, \dots, x_n)$ とおく. 各有限集合 $J \subset I$ に対し $\sum_J \omega_{\xi_{\kappa}}$ は $M_{e_{\kappa\kappa}}$ 上の正値形式である.

$M_{e_{\kappa\kappa}}$ は極大可換であるから, $\omega_{\eta} = \sum_J \omega_{\xi_{\kappa}}$ となるような $\eta \in \mathcal{H}$ が存在して $M_{e_{\kappa\kappa}}$ 上で $\omega_{\xi_{\kappa}} \leq \omega_{\eta}$ である. $M_{e_{\kappa\kappa}}$ の中心は M の中心と同型であるから, 各 $\kappa \in J$ 毎に $h_{\kappa} \in Z$ が決まると $\xi_{\kappa} = h_{\kappa} \eta$ となる. ここで $k = \sum_J h_{\kappa}^* e_{\kappa}$ とすると

$$k k^* = \left(\sum h_{\kappa} e_{\kappa} \right) \left(\sum h_{\kappa} e_{\kappa} \right)^* = \left(\sum h_{\kappa} h_{\kappa}^* \right) e_{\kappa\kappa}$$

であるから, k の極分解 $k = h e_{\kappa\kappa} v$, $h = \left(\sum h_{\kappa} h_{\kappa}^* \right)^{1/2}$ が得

られる.

$$\begin{aligned}
 \sum_j \|\xi_j\|^2 &= \sum_j (e_{KK} f(e_{K1} x_1, x_2, \dots, x_n) \xi | h_j \eta) \\
 &= \sum_j (e_{KK} f(h_j^* e_{KK} x) \xi | \eta) \\
 &= (e_{KK} f(h x) \xi | \eta) \\
 &= (e_{KK} f(h e_{KK} v) \xi | \eta) \\
 &\leq \|f\| \|x\| \|\xi\| \|\eta\|.
 \end{aligned}$$

ところで $\|h\eta\|^2 = \sum \|h_j \eta\|^2 = \sum \|\xi_j\|^2$ であるから, (i) と (ii) が得られる.

$\sum e_{ll} = 1$ であるから, すべて l の有限集合 $K \subset I$ とすべて $l \in K$ のベクトル $\xi \in \mathcal{H}$ に対し, $\sum_{l \in K} e_{ll} \xi$ として得られるベクトルの集合 $\mathcal{H}_0$ は $\mathcal{H}$ で稠密である. $x_1 \in M$ に対し $e_{K1} x_1 e_{lK} \in M_{e_{KK}}$ であるが $M_{e_{KK}} = \sum_{l \in K} e_{ll} M_{e_{ll}}$ であるから, $z_{ll} e_{KK} = e_{K1} x_1 e_{lK}$ とする. z_{ll} は $M_{e_{ll}}$ の元である. z_{ll} が存在する. このとき

$$e_{K1} x_1 = \sum_{l \in K} e_{K1} x_1 e_{lK} e_{ll} = \sum_{l \in K} z_{ll} e_{KK}$$

$$x_1 e_{lK} = \sum_{l' \in K} e_{ll'} e_{K1} x_1 e_{l'K} = \sum_{l' \in K} e_{ll'} z_{l'l} e_{KK}$$

である. 任意な $\mathcal{H}_0$ の元 ξ と η に対し

$$\begin{aligned}
 (h(x_1, \dots, x_n) \xi | \eta) &= (\sum_{l \in K} e_{ll} f(e_{K1} x_1, x_2, \dots, x_n) \xi | \eta) \\
 &= \sum_{l \in K} (e_{ll} f(e_{K1} x_1, x_2, \dots, x_n) \xi | \eta) \\
 &= \sum_{l \in K} (e_{ll} f(\sum_{l' \in K} z_{l'l} e_{KK}, x_2, \dots, x_n) \xi | \eta) \quad (1) \\
 &= (x_1 h(1, x_2, \dots, x_n) \xi | \eta) \\
 &= (x_1 \sum_{l \in K} e_{ll} f(e_{ll}, x_2, \dots, x_n) \xi | \eta)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{\nu} (x_1 e_{\nu\kappa} f(e_{\kappa\nu}, x_2, \dots, x_n) \xi | \eta) \\
&= \sum_{\nu} \left(\sum_{\ell} e_{\ell\kappa} z_{\ell\nu} f(e_{\kappa\nu}, x_2, \dots, x_n) \xi | \eta \right) \\
&= \sum_{\nu} \sum_{\ell} (e_{\ell\kappa} f(z_{\ell\nu} e_{\kappa\nu}, x_2, \dots, x_n) \xi | \eta) \\
&= \sum_{\ell} \sum_{\nu} (e_{\ell\kappa} f(z_{\ell\nu} e_{\kappa\nu}, x_2, \dots, x_n) \xi | \eta) \quad (2)
\end{aligned}$$

最後 $\wedge \sum$ の交換は $\eta \in \mathcal{H}_0$ であるから $\sum_{\ell}$ が有限和であることに依る.

(1) 式 = (2) 式を示せば (ii) が得られる. $(e_{\kappa\ell} x_1)(e_{\kappa\ell} x_1)^*$

$$= \sum_{\ell} z_{\ell\nu} z_{\ell\nu}^* e_{\kappa\kappa} \quad \text{で } Z \text{ と } Z_{e_{\kappa\kappa}} \text{ は同型だから } z = \sum_{\ell} z_{\ell\nu} z_{\ell\nu}^* \in Z$$

が存在する. 任意な $\varepsilon > 0$ と有限集合 $J \subset I$ に対して $\sum_{\alpha \in J} z_{\ell\nu} z_{\ell\nu}^*$ の $[\varepsilon, \infty)$ に対応するスペクトル射影を e_J とすれば, $e_J \in Z$,

$$\|\sum_{\alpha \in J} z_{\ell\nu} e_{\kappa\nu} (1 - e_J)\| \leq \varepsilon$$

かつ $J \rightarrow I$ のとき $e_J \downarrow 0$. したがって

$$\begin{aligned}
&| (e_{\ell\kappa} f(\sum_{\nu} z_{\ell\nu} e_{\kappa\nu}, x_2, \dots, x_n) \xi | \eta) - \sum_{\nu} (e_{\ell\kappa} f(z_{\ell\nu} e_{\kappa\nu}, x_2, \dots, x_n) \xi | \eta) | \\
&\leq | (e_{\ell\kappa} f(\sum_{\nu \in I \setminus J} z_{\ell\nu} e_{\kappa\nu}, x_2, \dots, x_n) \xi | \eta) | \\
&\leq (\varepsilon \|\eta\| + \|x_1\| \|e_J \eta\|) \|f\| \|x_2\| \cdots \|x_n\| \|\xi\|.
\end{aligned}$$

これから直ちに (1) 式 = (2) 式.

証明終り.

定理 3.2. M が I 型 von Neumann 代数ならば, $H^n(M, M) = 0$, $n \geq 1$.

証明. $f \in Z^n(M, M)$ とする. このとき $f \in B^n(M, M)$ を示せばよい. 定理 2.3 により $f \in NZ^n(M, M)$ と仮定できるから,

M は $I_{\mathbb{N}}$ ($\mathbb{N} = 1, 2, \dots, \infty$) 型の場合についてだけ考えればよい.

この場合には補助定理 3.1 のような行列単位 $\{e_{ik} : i, k \in \mathbb{N}\}$

が存在して, その結果を用いると $h(x_1, x_2, \dots, x_n) =$

$\sum_i e_{ik} f(e_{ki} x_1, x_2, \dots, x_n)$ が定義できる. ここで

$$g(x_2, \dots, x_n) = h(1, x_2, \dots, x_n)$$

とすれば,

$$(\delta g)(x_1, \dots, x_n) = x_1 g(x_2, \dots, x_n)$$

$$+ \sum_{j=2}^n (-1)^j g(x_1, \dots, x_{j-1}, x_j x_{j+1}, x_{j+2}, \dots, x_n)$$

$$+ (-1)^n g(x_1, \dots, x_{n-1}) x_n$$

$$= \sum_i \{ x_1 e_{ik} f(e_{ki}, x_2, \dots, x_n) - e_{ik} f(e_{ki}, x_1 x_2, x_3, \dots, x_n) \}$$

$$+ \dots + (-1)^{n-1} e_{ik} f(e_{ki}, x_1, \dots, x_{n-2}, x_{n-1} x_n)$$

$$+ (-1)^n e_{ik} f(e_{ki}, x_1, \dots, x_{n-1}) x_n \}$$

$$= \sum_i \{ x_1 e_{ik} f(e_{ki}, x_2, \dots, x_n) - e_{ik} (\delta f)(e_{ki}, x_1, \dots, x_n) \}$$

$$+ e_{ik} f(x_1, \dots, x_n) - e_{ik} f(e_{ki} x_1, x_2, \dots, x_n) \}$$

$$= x_1 h(1, x_2, \dots, x_n) + f(x_1, \dots, x_n) - h(x_1, \dots, x_n)$$

$$= f(x_1, \dots, x_n).$$

したがって, $\tau, f \in B^n(M, M)$.

§4. $B(\mathcal{H})$ での Cobounding.

定理 4.1. A を単位 C^* -代数, π を A の忠実な表現とする.

$f \in Z^n(\pi(A), \overline{\pi(A)})$ に対し, $g|_{\pi(A)} - f \in B^n(\pi(A), \overline{\pi(A)})$ を満たすような $g \in Z^n(\overline{\pi(A)}, \overline{\pi(A)})$ が存在する. ここで $\overline{\pi(A)}$ は $\pi(A)$ の弱閉包である.

証明. π を A の universal な表現とすれば, A^{**} の中心に或る射影 e が存在して $\pi(A)$ と $\overline{\pi(A)}$ はそれぞれ $\pi(A)e$ と $\overline{\pi(A)}e = (A^{**})e$ で同一視できるから, これから $\pi(x)$ と $\pi(x)e$ とを同一視する. $\pi(A)$ から $\pi(A)e$ への同型写像 p を使, て導かれる cochain $(C^n(A, \mathcal{M}))$ の元 π は n -cochain という) の間の同型写像を p_* とすれば, 例えは

$$(p_* f)(y_1, \dots, y_n) = f(p(y_1), \dots, p(y_n)), \quad y_i \in \pi(A)$$

などと表わせる. この $p_* f$ を f_1 とおけば, $f_1 \in Z^n(\pi(A), (A^{**})e)$.

f_1 の有界性と π が universal であることから, 写像 $x \mapsto f(x, x_2, \dots, x_n)$ は $\pi(A)$ から A^{**} への σ -弱位相で連続的な拡張 f_{11} を持つ. 以下順次各 argument の定義域を $\pi(A)$ から A^{**} へ拡張して $f_{12}, \dots, f_{1n}$ を得る. $f_{1n} \in C^n((A^{**})e, (A^{**})e)$ かつ $\|f_{1n}\| = \|f_1\|$. f_{1n} を $\bar{f}_1$ とする. $f_1 \in Z^n(\pi(A), (A^{**})e)$ であるから, $x_0 \in A^{**}; x_1, \dots, x_n \in \pi(A)$ に対して

$$\begin{aligned} (\delta f_{11})(x_0, x_1, \dots, x_n) &= x_0 f_{11}(x_1, \dots, x_n) \\ &\quad + \sum_{j=1}^n (-1)^j f_{11}(x_0, \dots, x_{j-2}, x_{j-1} x_j, x_{j+1}, \dots, x_n) \end{aligned}$$

$$+ (-1)^{n+1} f_{11}(x_0, \dots, x_{n-1}) x_n,$$

となるが, $\pi(A)$ は A^{**} で σ -弱位相で稠密であるから x_0 を $\pi(A)$ の元で近似して $\delta f_{11} = 0$ を得る. 以下順次各 argument 毎に同様の考え方を適用して $\delta \bar{f}_1 = \delta f_{11} = 0$ を得る. つまり $\bar{f}_1 \in NZ^n(A^{**}, (A^{**})_e)$ であるから, 定理 2.3 により

$$\bar{g}_1 \equiv \bar{f}_1 - \delta \bar{h} \in NZ^n(A^{**}, (A^{**})_e)$$

となる $\bar{h} \in C^{n-1}(A^{**}, (A^{**})_e)$ が存在する. $g \equiv \bar{g}_1|_{(A^{**})_e}$ かつ $h \equiv p_*(\bar{h}|_{\pi(A)})$ とすれば $h \in C^{n-1}(\pi(A)_e, (A^{**})_e)$ であり
も

$$\begin{aligned} f - \delta h &= f - \delta p_*(h|_{\pi(A)}) = p_*(f_1 - \delta(h|_{\pi(A)})) \\ &= p_*((\bar{f}_1 - \delta \bar{h})|_{\pi(A)}) = \bar{g}_1|_{\pi(A)_e} = g|_{\pi(A)_e}. \end{aligned}$$

補助定理 4.2. M を Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上に作用する von Neumann 代数, Z を M' の極大可換な $*$ -部分代数, N を M と Z から生成される C^* -代数とする. $f \in NC^n(M, M)$ に対し, 一意な拡張 $\bar{f} \in NC^n(N, N)$ が存在して, 写像 $f \mapsto \bar{f}$ は線形かつ等距離で $\delta f = \delta \bar{f}$ を満たしている. 特に $f \in NZ^n(M, M)$ ならば $\bar{f} \in NZ^n(N, N)$ である.

証明. Z の射影全体の集合を Z^+ とする.

$$N_0 \equiv \left\{ \sum_{j=1}^n e_j x_j : e_j \in Z^+, x_j \in M \right\}$$

とすれば, N_0 は N の稠密な $\ast$ -部分代数である. $y_k \in N_0$

($k=1, \dots, n$) は

$$y_k = \sum_{j=1}^{m_k} e_{j_k}^{(k)} x_{j_k}^{(k)}, \quad e_{j_k}^{(k)} \in \mathbb{Z}^p, \quad x_{j_k}^{(k)} \in M$$

なる形をしてゐる. $f \in N(C^n(M, M))$ に対して

$$f_0(y_1, \dots, y_n) = \sum_{j_1=1}^{m_1} \dots \sum_{j_n=1}^{m_n} e_{j_1}^{(1)} e_{j_2}^{(2)} \dots e_{j_n}^{(n)} f(x_{j_1}^{(1)}, x_{j_2}^{(2)}, \dots, x_{j_n}^{(n)})$$

とすれば, f_0 は well defined であつてしかも $\underbrace{N_0 \times \dots \times N_0}_n \rightarrow N_0$

なる n 重線形写像になつてゐることになる. 実際

に, 或る k で $y_k = 0$ とすると, M の中心の元 z_{ij} , $1 \leq i, j \leq j_k$

が存在して

$$\sum_{j=1}^{m_k} z_{ij} e_{j_k}^{(k)} = e_i^{(k)}, \quad \sum_{j=1}^{m_k} x_j^{(k)} z_{ij} = 0$$

となるから,

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^{m_k} e_{j_k}^{(k)} f(x_{j_1}^{(1)}, \dots, x_{j_k}^{(k)}, \dots, x_{j_n}^{(n)}) \\ &= \sum_{j=1}^{m_k} \sum_{l=1}^{m_k} z_{jl} e_l^{(k)} f(x_{j_1}^{(1)}, \dots, x_{j_k}^{(k)}, \dots, x_{j_n}^{(n)}) \\ &= \sum_{j=1}^{m_k} e_l^{(k)} f(x_{j_1}^{(1)}, \dots, \sum_{l=1}^{m_k} x_j^{(k)} z_{jl}, \dots, x_{j_n}^{(n)}) = 0, \end{aligned}$$

したがつて $f_0(y_1, \dots, y_n) = 0$. 次に $\|f_0\| = \|f\|$ を示す. そ

のたふに $\{e_{j_k}^{(k)} : j=1, \dots, m_k, k=1, \dots, n\}$ の細分解を $\{p_1, \dots, p_m\}$

$\subset \mathbb{Z}^p$ とする. 各 y_k は

$$y_k = \sum_{j=1}^m p_j w_j^{(k)}, \quad w_j^{(k)} \in M$$

と表わせらるから, f_j の M' での中心の台 $S(p_j)$ を使つて

$$f_0(y_1, \dots, y_n) = \sum_{j=1}^m p_j f(S(p_j) w_j^{(1)}, \dots, S(p_j) w_j^{(n)}),$$

したがつて

$$\begin{aligned}
\|f_0(y_1, \dots, y_n)\| &= \max_{1 \leq j \leq m} \|p_j f(s(p_j)w_j^{(1)}, \dots, s(p_j)w_j^{(n)})\| \\
&\leq \max_{1 \leq j \leq m} \|f\| \|s(p_j)w_j^{(1)}\| \cdots \|s(p_j)w_j^{(n)}\| \\
&= \max_{1 \leq j \leq m} \|f\| \|p_j w_j^{(1)}\| \cdots \|p_j w_j^{(n)}\| \\
&= \max_{1 \leq j \leq m} \|f\| \|p_j y_1\| \cdots \|p_j y_n\| \\
&\leq \|f\| \|y_1\| \cdots \|y_n\|
\end{aligned}$$

となる. f_0 の作り方より $\|f\| \leq \|f_0\|$ は明らかであるから, $\|f_0\| = \|f\|$ となる. N_0 が N で稠密なことから f_0 の拡張 $\bar{f}$ が存在して $\bar{f} \in C^*(N, N)$ かつ $\|f\| = \|\bar{f}\|$ である. f の N への任意な拡張を g とすれば N_0 上で $g = \bar{f}$ となるから拡張は一意的である. N の中心は $\mathbb{Z}$ であるから $\bar{f}$ の決めたことから $\bar{f} \in NC^*(N, N)$ である. 最後は $\delta \bar{f} = \overline{\delta f}$ を示そう. N_0 の元に対し $\delta \bar{f} = \overline{\delta f}$ は直接計算により確かめられるので, $\delta \bar{f}$ と $\overline{\delta f}$ の連続性を使えば, $\delta \bar{f} = \overline{\delta f}$ が示せる.

定理 4.3. M を Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上で作用する von Neumann 代数とする. $f \in Z^*(M, M)$ に対し $f = \delta g$ なる $g \in C^{**}(M, B(\mathcal{H}))$ が存在する.

証明. 定理 2.3 に依り, $f \in Z^*(M, M)$ に対して或る $g_0 \in C^{**}(M, M)$ が存在して $f - \delta g_0 \in NZ^*(M, M)$. $f_1 \equiv f - \delta g_0$ とおく. N を M' の極大可換な $*$ -部分代数と M により生成

される C^* -代数とすると, 補助定理 4.2 により f_1 の一意な拡張 $\bar{f}_1 \in NZ(N, N)$ が存在する. 定理 4.1 により, 或る $f_2 \in Z^n(\bar{N}, \bar{N})$ が存在して

$$\bar{f}_1 - f_2|_N \in B^n(N, \bar{N}).$$

すなわち, 或る $g_1 \in C^{n-1}(N, \bar{N})$ が存在して

$$\bar{f}_1 - \delta g_1 = f_2|_N.$$

$N' = M \cap Z' = Z$ であるから $\bar{N}$ は I 型である. 定理 3.2 により,

f_2 に対し $g_2 \in C^{n-1}(\bar{N}, \bar{N})$ が存在して $f_2 = \delta g_2$. ここで

$g_3 \equiv g_2|_M$ とすると, $g_3 \in C^{n-1}(M, \bar{N})$ かつ $\delta g_3 = f_2|_M$.

$g_4 \equiv g_1|_M$ とすると, $g_4 \in C^{n-1}(M, \bar{N})$. $f_1 = \bar{f}_1|_M$ である

から $f_1 \in Z^n(M, N) \subset Z^n(M, \bar{N})$ かつ $f_1 - \delta g_4 = \delta g_3$.

ところで

$$f - \delta g_0 = f_1 = \delta(g_3 + g_4)$$

でしかも $g \in C^{n-1}(M, N) \subset C^{n-1}(M, \bar{N})$ であるから,

$$f = \delta(g_0 + g_3 + g_4)$$

かつ $g_0 + g_3 + g_4 \in C^{n-1}(M, \bar{N})$. $g = g_0 + g_3 + g_4$ とすればよい.

§ 5. Hyperfinite な場合.

定理 5.1. M を hyperfinite な von Neumann 代数とすると,

$$H^n(M, M) = 0, \quad n \geq 1.$$

証明. M が standard な場合を考えればよい. このとき M' も hyperfinite であるから, $B(\mathcal{H})$ から $M \hookrightarrow A$ の projection ε が存在して $\varepsilon(yxz) = y\varepsilon(x)z$, $y, z \in M$ とする. $f \in Z^n(M, M)$ に対し, 定理 4.3 を使うと, $f = \delta h$ なる $h \in C^{n-1}(M, B(\mathcal{H}))$ が存在する. $g \equiv \varepsilon \circ h$ とすると, $g \in C^{n-1}(M, M)$ かつ $x_1, \dots, x_n \in M$ に対し

$$\begin{aligned} (\delta g)(x_1, \dots, x_n) &= x_1 g(x_2, \dots, x_n) + \sum_{j=1}^{n-1} (-1)^j g(x_1, \dots, x_{j-1}, x_j x_{j+1}, x_{j+2}, \dots, x_n) \\ &\quad + (-1)^n g(x_1, \dots, x_{n-1}) x_n \\ &= (\varepsilon \circ \delta h)(x_1, \dots, x_n) \\ &= \varepsilon(f(x_1, \dots, x_n)) = f(x_1, \dots, x_n). \end{aligned}$$

定理 5.2. A を単位 C^* -代数, $\mathcal{M}$ を A -両側双対加群, G を A の unitary から成る amenable 群とする. もし A が G に依り生成されるならば, $H^n(A, \mathcal{M}) = 0$, $n \geq 1$.

証明. 定理 2.3 と同様にするればよい.

この定理から直ちに次の系が導かれる.

系. A を abelian 又は u.h.f. な単位 C^* -代数とし, $\mathcal{M}$ を A -両側双対加群とすれば, $H^n(A, \mathcal{M}) = 0$, $n \geq 1$.

§6. Normal cohomology.

A を Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上の C^* -代数とし, $\mathcal{M}$ を A -双対両側加群とする. 以下両側加群のみを考えるので "両側" を省略して A -双対加群 $\mathcal{M}$ とし, A から $\mathcal{M} \wedge \mathcal{M}$ の写像 $x \mapsto xm$ と $x \mapsto mx$ が σ -弱位相-弱*位相で連続な場合には A -双対 normal 加群 といふ. $C^n(A, \mathcal{M})$ の元 f のうち σ -弱位相-弱*位相で連続なもの全体の集合を $C_w^n(A, \mathcal{M})$, $n \geq 1$ とし $C_w^0(A, \mathcal{M}) = \mathcal{M}$ と規約すれば, $\delta C_w^n(A, \mathcal{M}) \subset C_w^{n+1}(A, \mathcal{M})$ となる. このとき

$$B_w^n(A, \mathcal{M}) \equiv \{ \delta f : f \in C_w^{n-1}(A, \mathcal{M}) \}$$

$$Z_w^n(A, \mathcal{M}) \equiv \{ f \in C_w^n(A, \mathcal{M}) : \delta f = 0 \}$$

$$H_w^n(A, \mathcal{M}) \equiv Z_w^n(A, \mathcal{M}) / B_w^n(A, \mathcal{M})$$

とする. $H_w^n(A, \mathcal{M})$ は n 次元 normal cohomology 群 とおかれる.

これから Johnson, Kadison and Ringrose に依る

Cohomology of operator algebras, III.

Reduction to normal cohomology

Bull. Soc. math. France, 100 (1972), 73-96.

の結果を列挙しよう.

先ず定理 4.1 と同じように

定理 6.1. $A_1, \dots, A_n$ をそれぞれ Hilbert 空間 $\mathcal{H}_1, \dots, \mathcal{H}_n$ 上の単位 C^* -代数とし, $\mathcal{M}$ を或る Banach 空間 $\mathcal{M}_*$ の双対空間とする. もし f が $A_1 \times \dots \times A_n$ から $\mathcal{M}$ への有界な n 重線形写像で σ -弱位相-弱*位相で連続ならば, f のノルムを表すような拡張 $\bar{f}$ が存在して, それは有界な n 重線形写像かつ σ -弱位相-弱*位相で連続になっている.

定理 6.2. von Neumann 代数 M 上で有界かつ完全加法的な線形形式は σ -弱連続である. ここで線形形式 φ が完全加法的であるとは, M の互に直交した射影の任意な集合 $\{e_i : i \in I\}$ に対し $\sum \varphi(e_i) = \varphi(\sum e_i)$ となることである.

A を Banach 代数, $\mathcal{M}$ を A -双対加群としたとき, $C^n(A, \mathcal{M})$ は射影的テンソル積 $A_1 \otimes \dots \otimes A_n \otimes \mathcal{M}_*$ の双対空間と等距離同型で, その対応 $f \leftrightarrow \bar{f}$ は

$$\bar{f}(x_1 \otimes \dots \otimes x_n \otimes m_*) = \langle f(x_1, \dots, x_n), m_* \rangle$$

で与えられる. $f \in C^n(A, \mathcal{M})$ と $x_0 \in A$ に対し $x_0 f$ と $f x_0$ を
次式で定義する;

$$(x_0 f)(x_1, \dots, x_n) \equiv x_0 f(x_1, \dots, x_n)$$

$$(f x_0)(x_1, \dots, x_n) \equiv \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j f(x_0, \dots, x_{j-1}, x_j x_{j+1}, x_{j+2}, \dots, x_n) \\ + (-1)^n f(x_0, \dots, x_{n-1}) x_n.$$

したがって $C^n(A, \mathcal{M})$ は A -双対加群と考えられる. このとき $H^{m+n}(A, \mathcal{M})$ は $H^m(A, C^n(A, \mathcal{M}))$ と同型であることが示される. Banach 代数 A が amenable であるとは, 任意な A -双対加群 $\mathcal{M}$ に対し, $H^1(A, \mathcal{M}) = 0$ となることである. この場合には $H^n(A, \mathcal{M}) = 0$, $n \geq 1$ が導かれる.

A と $\mathcal{M}$ 上の α によりしておく. $f \in C^m(A, \mathcal{M})$ と $x \in A$ に対し $x f$ と $f x$ を

$$(x f)(x_1, \dots, x_n) \equiv f(x_1, \dots, x_n x)$$

$$(f x)(x_1, \dots, x_n) \equiv f(x_1, \dots, x_n) x$$

で定義すれば, $C^m(A, \mathcal{M})$ は A -双対加群になる.

$f \in C^{m+n}(A, \mathcal{M})$ に対し

$$\bar{f}(x_1, \dots, x_m)(x_{m+1}, \dots, x_{m+n}) \equiv f(x_1, \dots, x_{m+n})$$

とすれば, $\bar{f} \in C^m(A, C^n(A, \mathcal{M}))$ とこの線形対応 $f \mapsto \bar{f}$ は等距離同型である. この同型写像は弱*位相で両側連続であるから, A -加群の構造を $C^m(A, C^n(A, \mathcal{M}))$ から $C^{m+n}(A, \mathcal{M})$ へ移すことができる. この場合加群の演算は, $f \in C^{m+n}(A, \mathcal{M})$

に対し

$$\begin{aligned} (\alpha f)(x_1, \dots, x_{m+n}) &= (\overline{(\alpha f)})(x_1, \dots, x_m)(x_{m+1}, \dots, x_{m+n}) \\ &= \overline{f}(x_1, \dots, x_m \alpha)(x_{m+1}, \dots, x_{m+n}) \\ &= f(x_1, \dots, x_{m-1}, x_m \alpha, x_{m+1}, \dots, x_{m+n}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (f\alpha)(x_1, \dots, x_{m+n}) &= ((\overline{f\alpha})(x_1, \dots, x_m))(x_{m+1}, \dots, x_{m+n}) \\ &= (\overline{f}(x_1, \dots, x_m) \alpha)(x_{m+1}, \dots, x_{m+n}) \\ &= \overline{f}(x_1, \dots, x_m)(\alpha x_{m+1}, \dots, x_{m+n}) \\ &\quad + \sum_{j=1}^{n-1} (-1)^j \overline{f}(x_1, \dots, x_m)(\alpha, x_{m+1}, \dots, x_{m+j-1}, x_{m+j} \alpha_{m+j+1}, \\ &\quad \quad \quad x_{m+j+2}, \dots, x_{m+n}) \\ &\quad + (-1)^n \overline{f}(x_1, \dots, x_m)(\alpha, x_{m+1}, \dots, x_{m+n-1}) x_{m+n} \\ &= \overline{f}(x_1, \dots, x_m, \alpha x_{m+1}, x_{m+2}, \dots, x_{m+n}) \\ &\quad + \sum_{j=1}^{n-1} (-1)^j \overline{f}(x_1, \dots, x_m, \alpha, x_{m+1}, \dots, x_{m+j-1}, x_{m+j} \alpha_{m+j+1}, x_{m+j+2}, \\ &\quad \quad \quad \dots, x_{m+n}) \\ &\quad + (-1)^n \overline{f}(x_1, \dots, x_{m+n-1}) x_{m+n}. \end{aligned}$$

上に導入した amenable な部分代数と上の議論を使って、定理 2.3 を次のように一般化できる。

定理 6.3. A を Banach 代数, B を A の amenable な内部分代数, $\mathcal{M}$ を A -双対加群とする. $f \in Z^n(A, \mathcal{M})$, $n \geq 1$ ならば, $g \in C^{n-1}(A, \mathcal{M})$ が存在して, $f - \delta g$ はどこかの

argument が B の元であるときには 0 となるような n -cocycle である。

定理 6.4. A を Hilbert 空間 H 上の単位 C^* -代数とし, $\mathcal{M}$ を A -双対 normal 加群とすると, $H_n^*(A, \mathcal{M})$ と $H^n(A, \mathcal{M})$ と $H^n(\bar{A}, \mathcal{M})$ は互に同型である。

系. M を von Neumann 代数とする。

- (i) M は amenable な C^* -部分代数の σ -弱閉包。
- (ii) M は M の unitary 全体の作る群の amenable な部分群から生成される $*$ -代数の σ -弱閉包。
- (iii) M は hyperfinite または I 型。

上の三条件のどれか二つが成り立てば, 任意な M -双対 normal 加群 $\mathcal{M}$ に対し $H^n(M, \mathcal{M}) = 0$, $n \geq 1$ 。

この系の前は定理 3.2 と定理 5.1 の一般化に成っていることに注意しよう。