

同変双対性定理 と 群 $J_G(*)$

大阪大理 川久保勝夫

§1. 同変双対性定理.

定義1. G : 位相群, $X, Y: G$ -space. それぞれの不働点集合 X^G, Y^G に reference points x_0, y_0 が定められているとする。その時 X と Y が "同じ同変 S 型" であるとは, 2つの表現空間 V, W が存在して $S(V \oplus \mathbb{R}) \wedge X$ と $S(W \oplus \mathbb{R}) \wedge Y$ が同じ G -ホモトピー型をもつ時に言う。ここで $S(\dots)$ は単位球面, $\mathbb{R}$ は 1次元実ベクトル空間で G の作用は自明なものとする。

定義2. X : compact G -space. V : G -表現空間で $S(V) \supset X$ の時, $S(V \oplus \mathbb{R}) - X$ を X の equivariant dual という。

定義3. $X^\#$ が X の equivariant S -dual である

とは $X^\#$ と X の equivariant dual が 同変 S 型をもつ時に言う。

同変ホモトピー論的見地での同変 S 型の考察は 村山氏に譲り, ここでは 次の Atiyah の定理の同変化を報告する。

定理4. X : compact G -manifold with boundary Y . V : G -表現空間, $X \subset V$: G -embedding.

ν をその normal bundle. その時 $T(\nu)$ は X/Y の equivariant S -dual である。ことに $T(\nu)$ は ν の Thom complex を表わす。

定理5. X : closed G -manifold. $\xi \rightarrow X$: G -vector bundle. $\nu \rightarrow X$: G -vector bundle で $\nu \oplus T(X) \oplus \xi$: trivial とする。但し $T(X)$ は X の tangent bundle を示す。その時 $T(\nu)$ は $T(\xi)$ の equivariant S -dual である。

(証明の idea) Atiyah の Thom complex における証明のほんの一部は ホモトピー論的にやっとして equivariant に 平行にゆかないので そこを explicit

に equivariant deformation retract や equivariant homotopy equivalence の写像を作って証明します。

§2. 群 $J_G(*)$ の決定.

類似の群 $JO(G)$ が Atiyah - Tall により定義され Snaitch, Lee - Wasserman 等により研究されているが, 彼等の定義は Adams operation を引, かかるといって定義されておる幾何学的見地からは余り いさぎよいと言えない。我々は次のように定義する。

定義6. G : コンパクト位相群, V, W : G -表現空間. その時 V と W が J -equivalent であるとは G -表現空間 U が存在して $S(V \oplus U)$ と $S(W \oplus U)$ が 同じ G -ホモトピー型をもつ時に言う。ここで $S(\dots)$ は 単位球面を示す。

表現環 $RO(G)$ の部分群 $T_G(*)$ を次で定義する

$$T_G(*) = \{ V - W \mid V \text{ と } W \text{ は } J\text{-equivalent} \}.$$

定義7. $J_G(*) = RO(G) / T_G(*)$.

n を 2 以上の整数, $n = 2^k \cdot p_1^{r(1)} \cdots p_t^{r(t)}$ を素因数分解とする. Z_n は位数 n の巡回群 Z/nZ を表わす. その時 群 $J'_{Z_n}(*)$ を次のように定義する.

定義 8. Case 1. $k \geq 2$.

$$J'_{Z_n}(*) = Z \oplus Z_{2^{k-2}} \oplus \bigoplus_{i=1}^t Z_{(p_i^{r(i)} - p_i^{r(i)-1})}$$

Case 2. $k = 0$ or 1 .

$$J'_{Z_n}(*) = Z \oplus \left\{ \bigoplus_{i=1}^t Z_{(p_i^{r(i)} - p_i^{r(i)-1})} \right\} / Z_2$$

ここで Z_2 の $\bigoplus_{i=1}^t Z_{(p_i^{r(i)} - p_i^{r(i)-1})}$ への入射は

$$1 \longmapsto \bigoplus_{i=1}^t \frac{p_i^{r(i)} - p_i^{r(i)-1}}{2}$$

G をコンパクト 可換位相群. F_0 を G の subgroup H で $G/H \cong S^1$ となるもの全体からなる family. F_1 を G の subgroup H で G/H : 有限巡回群となるもの全体からなる family とする. その時我々は, 次の構造定理を得る.

定理9. $J_G(*) \cong Z \oplus Z(F_0) \oplus \bigoplus_{H \in F_1} J'_{G/H}(*)$

ここで $Z(F_0)$ は F_0 により生成される 自由可換群を表わす。

系10. $V, W: G$ -表現空間. その時 V と W が J -equivalent であることと $S(V)$ と $S(W)$ が 1 同値 G -ホモトピー-型をもつことと同値である。

注意11. 系10 は *stable* と *unstable* の間に差がないことを意味し 全くの予想外である。