

Seminormal rings の判定法と構造

阪大 理学部 吉田 憲一

1. 設定; R を有限次元のノーター整域, A を R の部分環で, 双有理かつ, R を A -加群とみて有限生成とする。従って R は A 上 integral である。この R 及び A に対して, $A_i(R)$, $\mathcal{D}_i(A, R)$ を次の様に帰納的に定義する。ここに $\mathfrak{c}(B/A)$ は B/A の conductor, $\ast$ $0 \leq i \leq d$, $d = \dim A$ とする。

$$(i) \quad A_0(R) = R \quad \mathcal{D}_0(A, R) = \emptyset$$

$$(ii) \quad \mathcal{D}_1(A, R) = \{ Ht_1(A) \ni \mathfrak{p}, \mathfrak{p} \supseteq \mathfrak{c}(A_0(R)/A) \}$$

$$(iii) \quad i \geq 1 \text{ に対して } \mathcal{D}_i(A, R) = \{ Ht_i(A) \ni \mathfrak{p}, \mathfrak{p} \supseteq \mathfrak{c}(A_{i-1}(R)/A) \}$$

$$(iv) \quad A_i(R) = A_{i-1}(R) \cap \bigcap_{\mathfrak{p} \in \mathcal{D}_i(A, R)} A_{\mathfrak{p}}$$

$$(v) \quad \mathcal{D}(A, R) = \bigcup_{i=1}^d \mathcal{D}_i(A, R)$$

$$(vi) \quad R = \bar{A} \text{ のときはとくに } R \text{ を省略する。}$$

この定義の説明をします。 R と A との関係を知るのに $\mathfrak{c}(R/A)$ だけでは充分と言えません。たとえば次の例を見て

つていい。

例; $R = k[x, y] \supset A = \{ k[x, y] \ni f(x, y); f(t, 0) = f(0, t), t \text{ は変数, } f(0, 0) = f(1, 0) \}$ とすれば R/A は双有理か, integral な拡大となつています。このとき $\mathfrak{z}(R/A) = xyR$ で xyR は A の高さか1の素イデアルになっています。ところで A の極大イデアル $(x(x-1), y)R$ はこのままでは $\mathfrak{z}(R/A)$ には表われませんが, $R \supset A$ の関係では大切な素イデアルです。よって $A_1(R) = R \cap A_{xyR}$ とすれば, $\mathfrak{z}(A_1(R)/A) = (x(x-1), y)R$ として, 私達は 極大イデアル $(x(x-1), y)R$ を得た事が出来るわけです。実際 $A_1(R) = R \cap \bigcap A_{\mathfrak{p}}$, $\mathfrak{p} \in \mathcal{D}_1(A, R)$ として次の補題により, $\mathfrak{z}(A_1(R)/A)$ はもはや高さ1の素イデアルには含まれない。

補題; $A \subset B \subset R$ に対して

$$\mathfrak{p} \in \text{Spec } A \text{ について } A_{\mathfrak{p}} \supseteq B \Leftrightarrow \mathfrak{p} \notin \mathfrak{z}(B/A)$$

2. 定義から出てくる性質.

命題 1. (i) $\mathcal{D}_1(A, R)$ の各元は $\mathfrak{z}(A_{1-i}(R)/A)$ の極小素因子である。従つて $\mathcal{D}_1(A, R)$ は有限集合。

$$(ii) \quad A_1(R) = A$$

$$(iii) \quad \text{従つて } A = R \cap \bigcap A_{\mathfrak{p}}, \quad \mathfrak{p} \in \mathcal{D}(A, R)$$

$$(iv) \quad \mathcal{D}_1(A, R) \subseteq \mathcal{D}_1(A)$$

証明. (i) $\mathcal{D}_i(A, R) \ni \mathfrak{p}$, $\text{ht} \mathfrak{p} = i$ で定義より $\mathfrak{p} \supseteq \mathfrak{a}(A_{i-1}(R)/A)$. 今 $\mathfrak{p} \subsetneq \mathfrak{q}$ で $\mathfrak{p} \supseteq \mathfrak{a}(A_{i-1}(R)/A)$ とすれば $j = \text{ht} \mathfrak{p} < i$ 故 $A_{j-1}(R) \supseteq A_{i-1}(R)$, 従って $\mathfrak{p} \supseteq \mathfrak{a}(A_{j-1}(R)/A)$ を得るから, $\mathfrak{p} \in \mathcal{D}_j(A, R) \quad \therefore \quad A_{\mathfrak{p}} \supseteq A_j(R) \supseteq A_{i-1}(R)$, これは先の補題から $\mathfrak{p} \not\supseteq \mathfrak{a}(A_{i-1}(R)/A)$ となり, $\mathfrak{p} \supseteq \mathfrak{a}(A_{i-1}(R)/R)$ といふ事に反する。

よって $\mathcal{D}_i(A, R)$ の各元は $\mathfrak{a}(A_{i-1}(R)/A)$ の極小素因子である。

(ii) $\mathfrak{a}(A_d(R)/A)$ はもはやどの素イデアルにも含まれないから, $\mathfrak{a}(A_d(R)/A) = (1)$, $\therefore A = A_d(R)$.

(iv) $\mathcal{D}_i(A, R) \ni \mathfrak{p}$, $\mathfrak{p} \supseteq \mathfrak{a}(R/A) \supseteq \mathfrak{a}(\bar{A}/A)$ 故 $\mathfrak{p} \in \mathcal{D}_i(A)$ を得る。従って $A_i(R) \subseteq A_i$ である。

これを順次くりかえして $\mathcal{D}_i(A, R) \subseteq \mathcal{D}_i(A)$ を得る。

特に $\mathcal{D}(A)$ について考えると,

命題2. $\mathcal{D}(A) = \{ \text{Spec } A \ni \mathfrak{p}, \text{ht} \mathfrak{p} = 1 \text{ のときは } \mathfrak{p} \supseteq \mathfrak{a}(\bar{A}/A), \text{ht} \mathfrak{p} > 1 \text{ のときは } \text{depth } A_{\mathfrak{p}} = 1 \}$

とくに A が normal ring であるための必要十分条件は $\mathcal{D}(A) = \emptyset$. これは Serre' criterion に他ならない。

命題2を示すために次の命題をよえよう。

命題 3. $\text{Spec } A$ の $\mathfrak{p}$, $\text{ht } \mathfrak{p} > 1$ なる素イデアル $\mathfrak{p}$ について次はすべて同値である。

$$(i) \quad \mathfrak{p} \in \mathcal{D}(A)$$

(ii) $\mathfrak{p} \ni a \neq 0$ であれば, $\mathfrak{p}$ は aA の (embedded) prime divisor.

(iii) $\mathbb{Q}(A) \ni \alpha \neq 0$, $\mathfrak{p}$ は $\mathcal{O}_\alpha = \{A \ni a, a\alpha \in A\}$ の prime divisor. $\mathbb{Q}(A)$ は A の 商体.

(iv) $\mathbb{Q}(A) \ni \alpha \neq 0$, $\mathfrak{p}$ は $\mathcal{O}_\alpha$ の minimal prime divisor.

(v) $\mathbb{Q}(A) \ni \alpha \neq 0$, $\mathcal{O}_\alpha$ は $\mathfrak{p}$ に属する primary ideal.

(vi) $A \subset {}^s B \subset \bar{A}$, 中間環 B が存在して, $\mathfrak{p}$ は $\mathfrak{s}(B/A)$ の prime divisor.

(vii) $A \subset {}^s B \subset \bar{A}$, $\mathfrak{p}$ は $\mathfrak{s}(B/A)$ の minimal prime divisor.

(viii) $A \subset {}^s B \subset \bar{A}$, $\mathfrak{p}$ は $\mathfrak{s}(B/A)$ を prime ideal に持つ.

(ix) $\text{depth } A_{\mathfrak{p}} = 1$.

証明. (i) $\Rightarrow$ (vii), (vii) $\Rightarrow$ (vi) は明らか.

(vi) $\Rightarrow$ (viii) を示す. $\mathfrak{s}(B/A) = \mathcal{Q} \cap \mathcal{Q}_1 \cap \cdots \cap \mathcal{Q}_r$, $\sqrt{\mathfrak{s}} = \mathfrak{p}$ とする. $C = A + (\mathcal{Q}_1 \cap \cdots \cap \mathcal{Q}_r)B$ とおくと, C は B/A の中間環で $\mathfrak{s}(C/A)$ は $\mathfrak{p}$ に属する primary ideal である事が簡単にわかる.

(viii) $\Rightarrow$ (ix) を示す. B を $\bar{A}/A$ の中間環で, $\mathfrak{s}(B/A)$ が

$\mathfrak{f}$ に属する primary ideal なる $\mathfrak{p}$ の $\mathfrak{f}$ とする。今 $\text{depth } A_{\mathfrak{f}} \geq 2$ とすれば、 $\exists a, b \in \mathfrak{f}$, a, b は $A_{\mathfrak{f}}$ -reg, $\mathfrak{f}$ であるから
 $a, b \in \mathfrak{f}(B/A)$ となる。

$B \ni \alpha$ を $\mathfrak{f}$ と $\mathfrak{f} \subset \mathfrak{f}$, $a, b \in \mathfrak{f}(B/A)$ となるので、
 $a\alpha = c, b\alpha = d \in A$. $\therefore \alpha = \frac{c}{a} = \frac{d}{b}$ から我々は
 $ad = bc$ を得るが、 a, b は $A_{\mathfrak{f}}$ -reg 故 $d \in bA_{\mathfrak{f}}$
 $\therefore \alpha \in A_{\mathfrak{f}}$ ようして $B \subseteq A_{\mathfrak{f}}$ を得るが、これは
 $\mathfrak{f} \supseteq \mathfrak{f}(B/A)$ に反する。

(ix) $\Rightarrow$ (iii) を示す。 $\mathfrak{f} \ni a \neq 0$, $\text{今 } aA_{\mathfrak{f}} = \mathfrak{f}_1 \cap \dots \cap \mathfrak{f}_n$,
 $\sqrt{\mathfrak{f}_i} \subseteq \mathfrak{f}A_{\mathfrak{f}}$ とすれば、 $\exists b \in \mathfrak{f}A_{\mathfrak{f}}$, $b \notin \sqrt{\mathfrak{f}_i}$ である。
 このとき a, b は $A_{\mathfrak{f}}$ -reg となるから、 $\text{depth } A_{\mathfrak{f}} \geq 2$ 。

(ii) $\Rightarrow$ (v) を示す。 $\mathfrak{f} \ni a \neq 0$. $aA = \mathfrak{f} \cap \mathfrak{f}_1 \cap \dots \cap \mathfrak{f}_n$,
 $\sqrt{\mathfrak{f}} = \mathfrak{f}$, であるが、 $\exists b \in \mathfrak{f}_1 \cap \dots \cap \mathfrak{f}_n$, $b \notin \mathfrak{f}$, $\gamma = \mathfrak{f}$ $\alpha = \frac{b}{a}$
 とおくと、 $\mathfrak{p}_{\alpha}$ が $\mathfrak{f}$ に γ となる primary ideal である事が簡単にわかった。

(v) $\Rightarrow$ (iv), (iv) $\Rightarrow$ (iii) は明らか。

最後に (iii) $\Rightarrow$ (i) を示せばよい。(iii) $\Rightarrow$ (i) を示す。

(iii) において、 $\mathfrak{f}$ となる $\alpha \in \bar{A}$ となる事を見よう。 $\alpha \notin \bar{A}$
 とする。 $I_{\alpha} = \{ \bar{A} \ni x, x\alpha \in \bar{A} \} = Q_1 \cap \dots \cap Q_n$,
 $\sqrt{Q_i} = \mathfrak{p}_i$ とおく。このとき $\mathfrak{p}_{\alpha} \subseteq I_{\alpha} \subseteq Q_i \subseteq \mathfrak{p}_i$ 故
 $\mathfrak{p}_i \cap A = \mathfrak{f}_i$ $\mathfrak{f} \ni \sqrt{a}\alpha$ を得る。

今 $\exists \alpha$ 子, $1 \leq i \leq n$ とすると, $\exists x \in Q_1 \cap \dots \cap Q_n \cap A$,
 $x \notin \mathfrak{f}$ がとれるので $\beta = x\alpha$ とおけば $\beta \in \bar{A}$ で
 $\mathcal{O}_\alpha = \mathcal{O}_\beta$ ($\because x \notin \mathfrak{f}$) よって α のかわりに β をとれ
 ばよい。

今 $P_1 \cap A = \mathfrak{f}$ とする。従って $\exists P \in \text{Ht}_1(\bar{A})$,
 $P \cap A = \mathfrak{f}$ である。よって $\mathfrak{f}(\bar{A}/A) = Q_1 \cap \dots \cap Q_s \cap Q_{s+1} \cap \dots \cap Q_n$
 $\sqrt{\mathfrak{f}} = \mathfrak{f}$ $P_1 \cap A = \dots = P_s \cap A = \mathfrak{f}$, $P_{s+1}, \dots, P_n$ は $\mathfrak{f}$ の以
 外, と "う準素イデアル分解が出来る。 $Q_1 \cap \dots \cap Q_s \cap A = \mathfrak{f}$
 $Q_{s+j} = \mathfrak{f}_{s+j}$ とおく。 $\mathfrak{f}(\bar{A}/A)$ は A のイデアル故 $\mathfrak{f}(\bar{A}/A) = \mathfrak{f} \cap \mathfrak{f}_{s+1} \cap \dots \cap \mathfrak{f}_n$
 今 $\mathfrak{f} \geq \mathfrak{f}_{s+1} \cap \dots \cap \mathfrak{f}_n$ とする。 $Q_1 \cap \dots \cap Q_s \not\subseteq Q_{s+1} \cap \dots \cap Q_n$
 故 $\exists \beta \in Q_{s+1} \cap \dots \cap Q_n$ で $\beta \notin Q_1 \cap \dots \cap Q_s$ が存在する。
 $\beta \in \bar{A}$ で $\mathcal{O}_\beta$ は $\mathfrak{f}$ に属する primary ideal である事が簡
 単にわかる。

今 $\mathfrak{f} \not\subseteq \mathfrak{f}_{s+1} \cap \dots \cap \mathfrak{f}_n$ とすれば $\mathfrak{f}$ は $\mathfrak{f}(\bar{A}/A)$ の prime
 divisor 故, $\exists \beta \in \bar{A}$ $\mathcal{O}_\beta$ は $\mathfrak{f}$ に属する primary ideal
 である。以上により (iii) の α をとくに $\alpha \in \bar{A}$ とす
 る事が出来る。さて (i) をまよす。 $\text{ht } \mathfrak{f} = i$ とする。

$\text{Spec } A \ni \mathfrak{f}$ で $\text{ht } \mathfrak{f} \leq i-1$ とすれば $\mathfrak{f} \not\subseteq \mathcal{O}_\alpha$ 故
 $\alpha \in A_{\mathfrak{f}}$ よって $\alpha \in A_{i-1}$ である。さて今
 $\mathfrak{f} \not\subseteq \mathfrak{f}(A_{i-1}/A)$ とすれば $A_{\mathfrak{f}} \geq A_{i-1}$ であるが, $\alpha \in A_{i-1}$
 で $\alpha \notin A_{\mathfrak{f}}$ であるから, これは矛盾。

系; A を有限次元ネーター整域で, $\bar{A}$ は有限生成 A -加群であれば, 単項イデアルの *embedded prime components* となり得る素イデアルは有限個である。

3. *Seminormalization* 及び *seminormal* について.

Traverso によって導入された *seminormal* の語は大石彰君が詳しく述べておられるのでここでは定義のみとします。

$J(B)$ を B の Jacobson radical とし,

$${}_R^+ A = \{ R \ni \alpha, \alpha \in A_{\mathfrak{p}} + J(R_{\mathfrak{p}}), \forall \mathfrak{p} \in \text{Spec } A \}$$

を A の R の中での *seminormalization* とし, ${}_R^+ A = A$ のとき, A は R の中で *seminormal* であるという。

4. *Seminormal* であるための判定法.

Traverso によって, A が R の中で *seminormal* である必要充分条件は, 勝手な R/A の中間環 B に対して, $\mathfrak{a}(B/A)$ が B の radical ideal (B の素イデアルの共通部分として表わされる) であることがわかってゐるが, 実は次の定理として, *seminormal* の判定法が得られる。

定理 1. A が R の中で *seminormal* であるための必要充分条件は, $\mathfrak{a}(A_2(R)/A)$ が $A_2(R)$ の radical ideal である事。

証明. A が R の中で *seminormal* であれば, $A_2(R)$ は R/A の中間環故, Traverso の結果である。

$\mathfrak{z}(A_{i-1}(R)/A)$ が $A_{i-1}(R)$ の radical ideal として, ${}^+_R A = A$ である事を示す。そのために ${}^+_R A \subseteq A_{i-1}(R)$ と仮定して, ${}^+_R A \subseteq A_{i-1}(R)$ を示そう。そのためには $A_{i-1}(R) = A_{i-1}(R) \cap \bigcap A_{\mathfrak{g}}$, $\mathfrak{g} \in \mathcal{D}_{i-1}(A, R)$, 故 $\mathfrak{g} \in \mathcal{D}_{i-1}(A, R)$ に対して ${}^+_R A \subseteq A_{\mathfrak{g}}$ である事を示せば良い。

$\mathfrak{g}$ は $\mathfrak{z}(A_{i-1}(R)/A)$ の minimal prime divisor で $\mathfrak{z}(A_{i-1}(R)/A)$ は $A_{i-1}(R)$ の radical ideal であるから我々は

$$J(A_{i-1}(R)_{\mathfrak{g}}) = J(A_{\mathfrak{g}}) = \mathfrak{g}A_{\mathfrak{g}} \quad \text{を得る。}$$

さて $\forall \alpha \in {}^+_R A$ をとると, 定義より $\alpha \in A_{\mathfrak{g}} + J(R_{\mathfrak{g}})$ だから $\alpha = a + \beta$, $a \in A_{\mathfrak{g}}$, $\beta \in J(R_{\mathfrak{g}})$ と書ける。

さて $\alpha \in A_{i-1}(R)_{\mathfrak{g}}$ で $A_{\mathfrak{g}} \subseteq A_{i-1}(R)_{\mathfrak{g}}$ 故 $\beta \in J(R_{\mathfrak{g}}) \cap A_{i-1}(R)_{\mathfrak{g}} = J(A_{i-1}(R)_{\mathfrak{g}}) = \mathfrak{g}A_{\mathfrak{g}} \subseteq A_{\mathfrak{g}} \quad \therefore \alpha \in A_{\mathfrak{g}}$

以上によって ${}^+_R A \subseteq A_{i-1}(R) = A$ を得る。

Traverso の論文で述べられている glueing を次の様に定義しよう。この際 "柳屋さんの考えておられる glueing" とまぎらわしいので, relatively glueing と呼ぼう。というのは, 始めから R/A が integral として, R/A の中間環として glueing したものを手えるからです。

定義; $\text{Spec } A \ni \mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_t$, $\mathfrak{p}_i$ 上の R の prime ideals のすべてを $P_{i1}, \dots, P_{ie_i}$, $e_i \geq 1$, とする。素イデアル $\mathfrak{p}$ の residue field を $k(\mathfrak{p})$, $\pi \in R$ の residue class を $f(\mathfrak{p})$ 等

とかくとき,

$$G(\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_t, A) = \{ R \supset f, f(\mathfrak{p}_1) = \dots = f(\mathfrak{p}_1) \in \mathfrak{h}(\mathfrak{p}_1), \dots, f(\mathfrak{p}_1) = \dots = f(\mathfrak{p}_{e_t}) \in \mathfrak{h}(\mathfrak{p}_t) \} \quad \text{と定義する。}$$

このとき *Traverso* の結果は次の形で表わされる。

定理 2. $D(A, R) = \{ \mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_t \}$ とすれば,

$${}^+_R A = A \iff A = G(\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_t, A)$$

証明. $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_t$ を A の素イデアルとして, $B = G(\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_t, A)$

とかくとき, B は R の中で *seminormal* である事を見よう。

B の R の中での *seminormalization* は *Traverso* によって次の様に特徴付けられる。

P を B の素イデアルとして, P 上の ${}^+_R B$ の素イデアルは唯一つ, それを P' とすれば $\mathfrak{h}(P) = \mathfrak{h}(P')$ である。 ${}^+_R B$ はこの性質を持つ最大の B/B の中間環である。

$\mathfrak{p}_i$ 上の R の素イデアルを $Q_{i1}, \dots, Q_{ie_i}$, $e_i \geq 1$, とすれば明らかに $Q_{i1} \cap B = \dots = Q_{ie_i} \cap B$ である。これを Q_i とおくと, $\mathfrak{h}(\mathfrak{p}_i) = \mathfrak{h}(Q_i)$ が成り立つ。 ${}^+_R B$ の性質から, ${}^+_R B$ には, Q_i 上の素イデアルはただ一つで, それを Q'_i とすれば $\mathfrak{h}(Q_i) = \mathfrak{h}(Q'_i)$ であるから, ${}^+_R B \subseteq G(\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_t, A) \subseteq B$, よって $B = {}^+_R B$ を得る。従って $A = G(\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_t, A)$ ならば ${}^+_R A = A$ である。

逆をみよう。 $G(\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_t, A) \supseteq A$ は明らか。

$B = G(\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_u, A)$ とおく。 $A = B$ を見るためには、 $A_n(R) = A$ だから、 $A_{i-1}(R) \supseteq B$ ならば $A_i(R) \supseteq B$ である事を示せれば良い。 今のためには $\mathfrak{p} \in \mathcal{D}_{i-1}(A, R)$ に対して、 $A_{\mathfrak{p}} \supseteq B$ を示せれば良い。 $\alpha \in B$ の元として、 $\mathcal{O}_\alpha = \{A \ni a, a\alpha \in A\}$ とする。 $\alpha \in A_{i-1}(R)$ と仮定したのて、 $\mathfrak{p}$ は A の素イデアルで、 $\text{ht } \mathfrak{p} \leq i-2$ ならば $\mathfrak{p} \not\subseteq \mathcal{O}_\alpha$ 。 よって $\mathcal{O}_\alpha \neq (1)$ とすれば $\mathcal{O}_\alpha$ の prime divisor はすべて $i-1$ 以上の高さをもち、 $\mathfrak{p} \in \mathcal{D}(A) = \{\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_t\}$ 故 $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_1$ としよう。 このとき、 $B = G(\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_t, A) \ni \alpha$ 故、 $\alpha(\mathfrak{p}_1) = \dots = \alpha(\mathfrak{p}_t) \in \mathcal{K}(\mathfrak{p}_1)$ 、従って $\exists \in A_{\mathfrak{p}_1}$ があって、 $\alpha - \exists \in \mathcal{J}(R_{\mathfrak{p}_1})$ 、よって $\alpha \in A_{\mathfrak{p}_1} + \mathcal{J}(R_{\mathfrak{p}_1})$ である。 $\mathfrak{p}$ は A の素イデアルで $\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{p}_1$ とすれば、 $\text{ht } \mathfrak{p} \leq i-2$ だから $\mathcal{O}_\alpha \not\subseteq \mathfrak{p}$ 、よって $\alpha \in A_{\mathfrak{p}} \subseteq A_{\mathfrak{p}} + \mathcal{J}(R_{\mathfrak{p}})$ 。 従って、 $\alpha \in {}^+_{{R_{\mathfrak{p}_1}}} A_{\mathfrak{p}_1} = A_{\mathfrak{p}_1} = A_{\mathfrak{p}}$ 、よって $B \subseteq A_i(R)$ を得る。

$A = G(\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_t, A)$ において、 $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_t$ のどの一つもはじく事が出来ない。 これを次の命題としてみよう。

命題 4. $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_u$ を A の素イデアルで $B = G(\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_u, A)$ とすれば、 $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_u$ 上の B の素イデアルはそれぞれ唯一存在して、これを $\mathcal{Q}_1, \dots, \mathcal{Q}_u$ とすれば $\mathcal{D}(B, R) \subseteq \{\mathcal{Q}_1, \dots, \mathcal{Q}_u\}$ 。

証明. 今 $\mathfrak{p}_1$ 上の R の素イデアルがただ1つで、これを $\mathcal{Q}$ として、 $\mathcal{K}(\mathfrak{p}_1) = \mathcal{K}(\mathcal{Q})$ であれば relatively gluing の定義

よって $B = G(\mathfrak{g}_2, \dots, \mathfrak{g}_u, A)$ である。そこで $\mathfrak{g}_1, \dots, \mathfrak{g}_u$ に対して, R の $\mathfrak{g}_1, \dots, \mathfrak{g}_u$ 上の素イデアルは2つ以上存在するか, そうでないときには *residue fields* が一致し存在してよい。 *relatively glueing* の定義から $\mathfrak{g}_i$ 上の B の素イデアルは唯一つ存在するが, それを Q_i とおく。

$Q_1, \dots, Q_u$ をならびかえて, 新しい *index* をつけよう。
 $\{Q_1, \dots, Q_u\} = \{Q_{i,j} \mid 1 \leq i \leq d, 1 \leq j \leq e_i, \text{ ht } Q_{i,j} = i\}$ とする。

今 $B_{(i)} = G(\mathfrak{g}_{k,l} \mid k \geq i, A)$ とおくと, 明らかに $B_{(i)} = G(Q_{k,l} \mid k \geq i, B)$ である。このとき, $B_{(i)} = B_i(R)$ である事をしに肉する帰納法で示す。

$B_{(i-1)} = B_{i-1}(R)$ と仮定して, $B_{(i)} = B_i(R)$ を示す。

$B_{i-1}(R) = B_{(i-1)} = G(Q_{k,l} \mid k \geq i-1, A)$ で $B = G(Q_{k,l}, A)$

故 $\bigcap_{n=2}^d Q_{n,l} \subseteq \alpha(B_{i-1}(R)/B)$, 従って $D_i(B, R) \subseteq \{Q_{i,j}\}$ である。今 $D_i(B, R) = \{Q_{i,f_1}, \dots, Q_{i,f_{e_i}}\}, f_i \leq e_i$ とする。

したがって $B_i(R) = B_{i-1}(R) \cap \bigcap_{j=1}^{f_i} B_{Q_{i,j}}$ である。

α を $B_{Q_{i,j}} \cap R$ の元とする。 $\mathfrak{g}_{i,j}$ 上の R の素イデアルを $P_1, \dots, P_n$ とすれば, $P_1, \dots, P_n$ は $Q_{i,j}$ 上の R の素イデアルでもある。

さて $\alpha \in B_{Q_{i,j}}$ 故 $\alpha = \frac{b}{a}$, $a, b \in B$ とかけると,

$a(P_1) = \dots = a(P_n) \neq 0$, $b(P_1) = \dots = b(P_n)$ で a と b は $\mathfrak{g}_{i,j}$ の元である。よって $\alpha(P_1) = \dots = \alpha(P_n) \in \mathfrak{g}_{i,j}$ 。

従って $B_i(R) = B_{i-1}(R) \cap \bigcap_{j=1}^{f_i} B_{Q_{i,j}} \subseteq B_{(i)}$ がわかった。

逆に, $\alpha \in B_{i,i}$ の元として $\alpha \in B_i(R)$ をみよう。

$B_i(R) \subseteq B_{i-1}(R)$ 故 $\alpha \in B_{i-1}(R) = \bigcap_{i-1 \leq j \leq i} B_{i,j}$ 。一方 $B_{i,i}$ の定義から $\alpha \in B_{i,i} + J(R_{i,i})$ 故 $\alpha \in {}^+_{R_{i,i}} B_{i,i}$ であるが, B は R/A の relatively glueing であるから, B は R 中で seminormal, よって $B_{i,i}$ も seminormal だから, $\alpha \in B_{i,i}$ を得る。よって $\alpha \in B_i(R)$, $\therefore B_i(R) = B_{i,i}$

よって証明の途中で我々は $\mathcal{D}_i(B, R) \subseteq \{Q_{i,1}, \dots, Q_{i,c_i}\}$ を得ていたのだから, $\mathcal{D}(B, R) \subseteq \{Q_1, \dots, Q_n\}$ である。

今 $\mathcal{D}(A, R) = \{\beta_1, \dots, \beta_n\}$ として $A = G(\beta_2, \dots, \beta_n, A)$ として得られるならば, 今の命題から $\mathcal{D}(A, R) \subseteq \{\beta_2, \dots, \beta_n\}$ となり矛盾。