

有限群のバーンサイド環の逆極限について

岡山大学大学院自然科学研究科 杉村 匡郁

Masafumi Sugimura

Graduate School of Natural Science and Technology, Okayama University

1 イントロダクション

G を有限群とする. $S(G)$ で G の部分群全体を表し, $\mathcal{F}$ を G -共役不変で部分群に関して閉じた $S(G)$ の部分集合とする. $\mathfrak{F}$ で objects が $\mathcal{F}$, morphisms が $H, K \in \mathcal{F}$ かつ $g \in G$ に対して $gHg^{-1} \subset K$ を満たすすべての三つ組 $(H, g, K) : H \rightarrow K$ であり任意の $(H, g, K), (K, h, L) \in \text{Mor}(\mathfrak{F})$ に対して $(K, h, L) \circ (H, g, K) = (H, hg, L)$ を満たすカテゴリーを表す. $A(G)$ で G のバーンサイド環を表す. すなわち $A(G)$ は有限 G -集合に関するカテゴリーの Grothendieck 群である. このとき, morphism (H, g, K) に対して準同型写像 $(H, g, K)^* : A(K) \rightarrow A(H)$ が随伴する. 特に $H \leq K$ であれば, $(H, e, K)^*$ は $\text{res}_H^K : A(K) \rightarrow A(H)$ と書かれる. $\alpha = [X] - [Y] \in A(G)$ と $H \in S(G)$ に対して, 整数 $\chi_H(\alpha)$ を $|X^H| - |Y^H|$ で定める. ここで, X, Y は有限 G -集合で, $|X^H|$ は X の H -不動点集合 X^H の要素の個数を表す. $P(G, \mathcal{F}) = \prod_{H \in \mathcal{F}} A(H)$ とし, $L(G, \mathcal{F})$ でカテゴリー $\mathfrak{F}$ に随伴する逆極限

$$\lim_{\leftarrow \mathfrak{F}} A(-) \left(\subset \prod_{H \in \mathcal{F}} A(H) \right)$$

を表す. ここで $\lim_{\leftarrow \mathfrak{F}} A(-)$ は

$$\{(x_H) \in P(G, \mathcal{F}) \mid (P, g, Q)^* x_Q = x_P \text{ for } \forall (P, g, Q) \in \text{Mor}(\mathfrak{F})\}$$

で定められる集合である. 制限準同型写像 $\text{res}_H^G : A(G) \rightarrow A(H)$ は準同型写像 $\text{res}_{\mathcal{F}} : A(G) \rightarrow A(\mathfrak{F})$ を誘導し, $\text{Im}(\text{res}_{\mathcal{F}}) \subset L(G, \mathcal{F})$ がすぐに分かる. そこで, $B(G, \mathcal{F}) = \text{Im}(\text{res}_{\mathcal{F}})$ とし, 完全列

$$L(G, \mathcal{F})/B(G, \mathcal{F}) \hookrightarrow P(G, \mathcal{F})/B(G, \mathcal{F}) \twoheadrightarrow P(G, \mathcal{F})/L(G, \mathcal{F})$$

を観察する. $P(G, \mathcal{F})$ は自由 $\mathbb{Z}$ -加群で, $P(G, \mathcal{F})/L(G, \mathcal{F})$ も自由 $\mathbb{Z}$ -加群であることがわかる. ここで, $\mathbb{Z}$ は有理整数環である. このとき $B(G, \mathcal{F})$ が $L(G, \mathcal{F})$ に一致するかどうかを調べることは興味深い. [1] ではこの問題についていくつかの結果を得ており, 以下に興味深い結果を紹介する. $\mathcal{F}_G = S(G) \setminus \{G\}$ とする.

命題 1.1. p を素数, m を正の整数とし, G を位数 p^m の巡回群とする. このとき, $L(G, \mathcal{F})/B(G, \mathcal{F})$ は加群として $\mathbb{Z}_p^{\oplus m-1}$ に同型である.

命題 1.2. G を有限べき零群とする. このとき, $B(G, \mathcal{F})$ が $L(G, \mathcal{F})$ に一致するための必要十分条件は, G の位数が相異なる素数の積であることである.

上の命題 1.1 ~ 命題 1.2 を動機として, 本論文では p を素数, m と n を正の整数とし, $G = C_{p^m} \times C_{p^n}$ に対して $B(G, \mathcal{F})$ と $L(G, \mathcal{F})$ が一致するかどうかを考察していく. 本論文における主結果は以下の 2 つである.

定理 1.3. p を素数, m を正の整数とする. $G = C_{p^m} \times C_p'$ ならば, $Q(G, \mathcal{F}) \cong Z_p^{p(m-1)+1}$ である.

定理 1.4. p を素数, m を 2 以上の正の整数とする. $G = C_{p^m} \times C_{p^2}'$ ならば, $Q(G, \mathcal{F}) \cong Z_p^{(m-2)(p^2+1)+p^2+p+2}$ である.

2 バーンサイド環の定義

G を有限群とする. 有限 G -集合 X の同値類 $[X]$ を

$$[X] = [Y] \stackrel{\text{定義}}{\iff} |X^H| = |Y^H| \quad (\forall H \geq G)$$

により定義する. このとき, 差 $[X_1] - [X_2]$ を考え,

$$A(G) = \{[X_1] - [X_2] \mid X_1, X_2: \text{有限 } G\text{-集合}\}$$

と定める. ただし,

$$\begin{aligned} [X_1] - [X_2] &= [Y_1] - [Y_2] \stackrel{\text{定義}}{\iff} [X_1 \amalg Y_2] = [Y_1 \amalg X_2] \\ &\iff |X_1^H \amalg Y_2^H| = |Y_1^H \amalg X_2^H| \quad (\forall H \leq G) \end{aligned}$$

とする. さらに, $[X_1] - [X_2], [Y_1] - [Y_2] \in A(G)$ の和と積を

$$\begin{aligned} ([X_1] - [X_2]) + ([Y_1] - [Y_2]) &\stackrel{\text{def}}{=} [X_1 \amalg Y_1] - [X_2 \amalg Y_2] \\ ([X_1] - [X_2])([Y_1] - [Y_2]) &\stackrel{\text{def}}{=} [(X_1 \times Y_1) \amalg (X_2 \times Y_2)] - [(X_1 \times Y_2) \amalg (X_2 \times Y_1)] \end{aligned}$$

と定義する. X, Y が G -集合のとき, $X \times Y$ には

$$g(x, y) = (gx, gy)$$

により, G -作用を定める. この作用を対角作用 (diagonal action) と呼ぶ. 上の積は, この対角作用によるものである. $A(G)$ において $[X] - [\emptyset]$ を $[X]$ で表す, ただし $\emptyset$ は空集合を表す.

定義 1. 上の加法と乗法を持つ環 $A(G)$ をバーンサイド環 (Burnside ring) と呼ぶ.

具体的には, $A(G)$ は $\{[G/H] \mid (H) \subset \mathcal{S}(G)\}$ で生成される自由 $\mathbb{Z}$ -加群である. ただし, (H) は H の共役類を表し, $\mathcal{S}(G)$ は G の部分群全体を表す. また, 任意の有限 G -集合 X は

$$G/H_1 \amalg G/H_2 \amalg \cdots \amalg G/H_m \quad (m = |X/G|)$$

と同型であるので, $A(G)$ は

$$\left\{ \sum_{(H) \subset \mathcal{S}(G)} a_H [G/H] \mid a_H \in \mathbb{Z} \right\}$$

と書くことができる.

3 研究の動機

$\mathcal{F}$ と $\mathcal{F}_G$ を §1 でそれぞれ定めたものとし, $\mathcal{F}_G = S(G) \setminus \{G\}$ とする. $L'(G, \mathcal{F}) = \{x \in P(G, \mathcal{F}) \mid nx \in B(G, \mathcal{F}) \text{ for some } n \in \mathbb{N}\}$ と定める. 次の定理が知られている.

定理 3.1. $L(G, \mathcal{F}) = L'(G, \mathcal{F})$ が成り立つ.

$P(G, \mathcal{F})/B(G, \mathcal{F})$ は

$$P(G, \mathcal{F})/B(G, \mathcal{F}) \cong P(G, \mathcal{F})/L(G, \mathcal{F}) \oplus L(G, \mathcal{F})/B(G, \mathcal{F})$$

と直和分解できる. $L(G, \mathcal{F})$ は $P(G, \mathcal{F})$ の直和因子であるので $P(G, \mathcal{F})/L(G, \mathcal{F})$ は torsion free であり, また上の 3.1 から $L(G, \mathcal{F})/B(G, \mathcal{F})$ は有限群である. ここでは, torsion part である $L(G, \mathcal{F})/B(G, \mathcal{F})$ について考察することに興味があり, $Q(G, \mathcal{F}) = L(G, \mathcal{F})/B(G, \mathcal{F})$ を考察していく. 次の結果が知られている.

命題 3.2 (Y.Hara, M.Morimoto [1]). 4 次の交代群 $G = A_4$ に対して, $Q(G, \mathcal{F}_G) = 0$ が成り立つ. すなわち $B(G, \mathcal{F}) = L(G, \mathcal{F})$ が成り立つ.

定理 3.3 (M.Sugimura). 5 次の交代群 $G = A_5$ に対して, $Q(G, \mathcal{F}_G) = 0$ が成り立つ. すなわち $B(G, \mathcal{F}) = L(G, \mathcal{F})$ が成り立つ.

4 定理 1.4 の証明

C_{p^m}, C'_p をそれぞれ位数 p^m, p の巡回群とし, $G = C_{p^m} \times C'_p$ とする. (C_{p^m} と明確に区別するために C'_p と表記することにする.)

4.1 G の部分群について

a を C_{p^m} の生成元, b を C'_p の生成元とする. このとき, G の位数 p^k ($k = 0, 1, 2, \dots, m-1$) の部分群を以下のように定める.

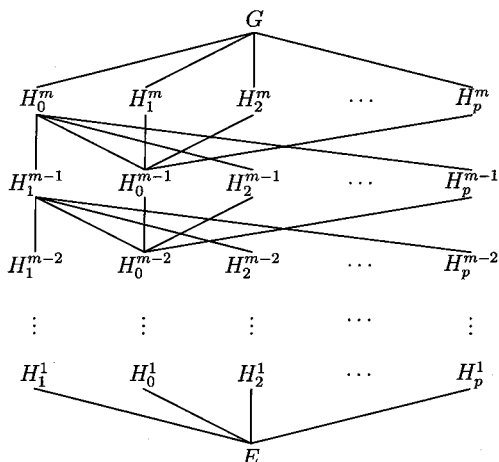
$$(1) \langle (a^{p^{m-k}}, b^l) \rangle \ (l = 0, 1, 2, \dots, p-1)$$

$$(2) \langle (a^{p^{m-k+1}}, e), (e, b) \rangle \cong C_{p^{k-1}} \times C'_p$$

すなわち, G の位数 p^k ($k = 1, 2, \dots, m$) の部分群はそれぞれ $p+1$ 個存在する. この部分群の個数についての命題と必要な補題を紹介する.

補題 4.1. G を位数 n の巡回群とし, 正の整数 m を n の約数とする. このとき, G に位数 m の巡回部分群が唯一つ存在する.

H_i^k ($k = 1, 2, \dots, m, i = 0, 1, \dots, p$) で位数 p^k の i 番目の部分群を表すと, 以下のような G の部分群のなすダイアグラムが完成する.



4.2 $\text{res}_{\mathcal{F}}^G$ の表の作成

$\mathcal{F}_{\max}$ で G の極大部分群の集合を表す. $K \in \mathcal{F}_{\max}$ とすると, $H \in \mathcal{F}$ ($|H| \leq |K|$) に対して,

$$\text{res}_K^G[G/H] = \begin{cases} p[K/H] & (H \subset K) \\ [K/(K \cap H)] & (H \not\subset K) \end{cases}$$

が成り立つ. ここで $N = H_0^{m-1} = \bigcap_{i=0,1,\dots,p-1} H_i^m$ とし,

$$\mathcal{F}_1 = \{H \in S(G) \mid H \neq G, H \supset N\},$$

$$\mathcal{F}_2 = \{H \in S(G) \mid H \not\supset N\}$$

と定め, 集合 $\mathcal{G}$ を

$$\mathcal{G} = \{(K, L) \mid K \in \mathcal{F}_{\max}, L \in S(K)\}$$

と定める. $a_{H,(K,L)}$ を $\text{res}_K^G[G/H]$ の $[K/L]$ の係数とし, 行列

$$M = \left[a_{H,(K,L)} \right]_{H \in S(G), (K,L) \in \mathcal{G}}$$

を求め, M の行に関する基本変形と列の順序の入れ替えを用いて $Q(G)$ の計算を行う. ここで, $\mathcal{G}$ を次のような $\mathcal{G}_1$ と $\mathcal{G}_2$ の disjoint union に分ける.

$$\mathcal{G}_1 = \{(K, L) \in \mathcal{G} \mid L \in \mathcal{F}_1\},$$

$$\mathcal{G}_2 = \{(K, L) \in \mathcal{G} \mid L \in \mathcal{F}_2\}.$$

上の行列 M の行と列の順序は以下のようにとる.

- 行 $H \in S(G)$ の順序は, H の位数が大きいくの順序が先になるようにとる.

- 列 $(K, L) \in \mathcal{G}$ は, $\mathcal{G}_1$ の要素の順序が先で, $\mathcal{G}_2$ の要素の順序があとになるようにする.
- $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2$ の各々については, (K, L) の辞書式順序になるようにする.
- $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2$ の各々において, 同じ $K \in \mathcal{F}_{max}$ をもつ (K, L) に対しては, L の位数が大きいほうの順序が先になるようにする.

上のように順序を定めた行列

$$M = \begin{bmatrix} [a_{H, (K, L)}]_{H \in \mathcal{F}_1, (K, L) \in \mathcal{G}_1} & [a_{H, (K, L)}]_{H \in \mathcal{F}_1, (K, L) \in \mathcal{G}_2} \\ [a_{H, (K, L)}]_{H \in \mathcal{F}_2, (K, L) \in \mathcal{G}_1} & [a_{H, (K, L)}]_{H \in \mathcal{F}_2, (K, L) \in \mathcal{G}_2} \end{bmatrix}$$

を具体的に書いたものを巻末に付録として付けている.

4.3 $Q(G, \mathcal{F})$ の計算

$$M = \begin{bmatrix} M_{(\mathcal{F}_1, \mathcal{G}_1)} & M_{(\mathcal{F}_1, \mathcal{G}_2)} \\ M_{(\mathcal{F}_2, \mathcal{G}_1)} & M_{(\mathcal{F}_2, \mathcal{G}_2)} \end{bmatrix}$$

とする. $M_{(\mathcal{F}_1, \mathcal{G}_2)} = O, M_{(\mathcal{F}_2, \mathcal{G}_1)} = O$ なので, $M_{(\mathcal{F}_1, \mathcal{G}_1)}$ と $M_{(\mathcal{F}_2, \mathcal{G}_2)}$ について基本変形を行って $Q(G, \mathcal{F})$ を求める. $Q(G, \mathcal{F})$ のうち $\mathcal{F}$ を $\mathcal{F}_1$ に制限したものを $Q(G, \mathcal{F}_1)$, $\mathcal{F}_2$ に制限したものを $Q(G, \mathcal{F}_2)$ とする.

まず, $Q(G, \mathcal{F}_1)$ の計算を行う. M の $M_{(\mathcal{F}_1, \mathcal{G}_1)}$ にあたるものが以下の表である.

	H_0^m	H_1^m	H_2^m	...	H_p^m	H_0^m	H_1^m	H_2^m	...	H_p^m
	$[H_0^m/H_0^m]$	$[H_1^m/H_1^m]$	$[H_2^m/H_2^m]$	...	$[H_p^m/H_p^m]$	$[H_0^m/H_0^{m-1}]$	$[H_1^m/H_0^{m-1}]$	$[H_2^m/H_0^{m-1}]$	...	$[H_p^m/H_0^{m-1}]$
$[G/G]$	1	1	1	...	1	0	0	0	...	0
$[G/H_0^m]$	p	0	0	...	0	0	1	1	...	1
$[G/H_1^m]$	0	p	0	...	0	1	0	1	...	1
$[G/H_2^m]$	0	0	p	...	0	1	1	0	...	1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
$[G/H_p^m]$	0	0	0	...	p	1	1	1	...	1
$[G/H_0^{m-1}]$	0	0	0	...	0	p	p	p	...	p

この表の成分を行列 $M_{(\mathcal{F}_1, \mathcal{G}_1)}$ として取り出す. 表の $[G/H_i^k]$ の行に対応する $M_{(\mathcal{F}_1, \mathcal{G}_1)}$

の行ベクトルを v_i^k とする.

$$M_{(\mathcal{F}_1, \mathcal{G}_1)} = \begin{bmatrix} v_G \\ v_0^m \\ v_1^m \\ v_2^m \\ \vdots \\ v_p^m \\ v_0^{m-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ p & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & p & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & p & \cdots & 0 & 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & p & 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & p & p & p & \cdots & p \end{bmatrix}$$

この行列を行に関する基本変形で変形し, 次のような行列 $N_{(\mathcal{F}_1, \mathcal{G}_1)}$ を得る.

$$N_{(\mathcal{F}_1, \mathcal{G}_1)} = \begin{bmatrix} w_G \\ w_0^m \\ w_1^m \\ w_2^m \\ \vdots \\ w_p^m \\ w_0^{m-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -p & 0 & \cdots & -p & 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & -p & \cdots & -p & 1 & 1 & 2 & \cdots & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -p & 2 & 2 & 2 & \cdots & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & p & p & p & \cdots & p \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

以上より,

$$\begin{aligned} B(G, \mathcal{F}_1) &= \langle w_G, w_0^m, w_1^m, w_2^m, \dots, w_p^m, w_0^{m-1} \rangle \\ &= \langle w_G, w_0^m, w_1^m, w_2^m, \dots, w_p^m \rangle \end{aligned}$$

である. ここで,

$$\begin{aligned} w_p^{m'} &= \frac{1}{p} w_p^m \\ &= [0, 0, 0, \dots, 0, 1, 1, 1, \dots, 1] \end{aligned}$$

とすると,

$$w_p^m \in B(G, \mathcal{F}_1) \subset L(G, \mathcal{F}_1) \text{ かつ } w_p^{m'} \in L(G, \mathcal{F}_1)$$

が言えるので,

$$Q(G, \mathcal{F}_1) \cong \mathbb{Z}_p$$

を得る. この結果は次の命題からも得ることができる.

命題 4.2 (Y.Hara, M.Morimoto [1]). p を素数, G を位数 p^2 の elementary アーベル p -群, すなわち $G \cong C_p \times C_p$ とする. このとき, $L(G, \mathcal{F})/B(G, \mathcal{F})$ は加群として $\mathbb{Z}_p$ に同型である.

次に $Q(G, \mathcal{F}_2)$ の計算を行う. $M_{(\mathcal{F}_2, \mathcal{G}_2)}$ のうち $k = 1, 2, \dots, m-1$ に対して $[G/H_1^k]$, $[G/H_2^k]$, $\dots$, $[G/H_p^k]$ の非零である係数の部分を取り出したものが以下の表である.

	H_0^m				H_1^m	H_2^m	...	H_p^m
	$[H_0^m/H_1^k]$	$[H_0^m/H_2^k]$	...	$[H_0^m/H_p^k]$	$[H_1^m/H_0^{k-1}]$	$[H_2^m/H_0^{k-1}]$	...	$[H_p^m/H_0^{k-1}]$
$[G/H_1^k]$	p	0	...	0	1	1	...	1
$[G/H_2^k]$	0	p	...	0	1	1	...	1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
$[G/H_p^k]$	0	0	...	p	1	1	...	1

この表の成分を行列 $M_{(\mathcal{F}_2, \mathcal{G}_2)}^k$ として取り出す. 表の $[G/H_i^k]$ の行に対応する $M_{(\mathcal{F}_2, \mathcal{G}_2)}^k$ の行ベクトルを v_i^k とする.

$$M_{(\mathcal{F}_2, \mathcal{G}_2)}^k = \begin{bmatrix} v_1^k \\ v_2^k \\ \vdots \\ v_p^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p & 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & p & \cdots & 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & p & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

この行列を行に関する基本変形で変形し, 次のような行列 $N_{(\mathcal{F}_2, \mathcal{G}_2)}^k$ を得る.

$$N_{(\mathcal{F}_2, \mathcal{G}_2)}^k = \begin{bmatrix} w_1^k \\ w_2^k \\ \vdots \\ w_p^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p & 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ -p & p & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -p & 0 & \cdots & p & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

これが, $k = 1, 2, \dots, m-1$ に対して成り立つ. よって,

$$B(G, \mathcal{F}_2) = \langle w_1^{m-1}, \dots, w_p^{m-1}, w_0^{m-2}, w_1^{m-2}, \dots, w_p^{m-2}, \dots, w_0^1, w_1^1, \dots, w_p^1, w_E \rangle$$

である. ここで, $k = 1, 2, \dots, m-1$, $i = 2, 3, \dots, p$ に対して

$$w_i^{k'} = \frac{1}{p} w_i^k$$

とすると

$$w_i^k \in B(G, \mathcal{F}_2) \subset L(G, \mathcal{F}_2) \text{ かつ } w_i^{k'} \in L(G, \mathcal{F}_2)$$

が言える. w_0^k ($k = 1, 2, \dots, m-2$), v_i^1 ($i = 1, 2, \dots, p$), w_0^0 の非零成分はすべて p であるので, したがって

$$Q(G, \mathcal{F}_2) \cong \mathbb{Z}_p^{p(m-1)}$$

を得る.

以上により, $Q(G, \mathcal{F}_1)$ と $Q(G, \mathcal{F}_2)$ を計算することができたので,

$$\begin{aligned} Q(G, \mathcal{F}) &\cong Q(G, \mathcal{F}_1) \times Q(G, \mathcal{F}_2) \\ &\cong \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p^{p(m-1)} \\ &\cong \mathbb{Z}_p^{p(m-1)+1} \end{aligned}$$

を得る. これにより, 定理 1.3 が証明された.

5 定理 1.4 の証明

C_{p^m} , C_{p^2} をそれぞれ位数 p^m , p^2 の巡回群とし, $G = C_{p^m} \times C'_{p^2}$ とする. (C_{p^m} と明確に区別するために C'_{p^2} と表記することにする.)

5.1 G の部分群について

a を C_{p^m} の生成元, b を C'_{p^2} の生成元とする. このとき, G の位数 p^k ($k = 0, 1, 2, \dots, m-1$) の部分群を以下のように定める.

(1) 位数 p^{m+1} の部分群

- $\langle (a, e), (e, b^p) \rangle \cong C_{p^m} \times C'_p$
- $\langle (a^p, e), (e, b) \rangle \cong C_{p^{m-1}} \times C'_{p^2}$
- $\langle (a, b^i), (e, b^p) \rangle$ ($i = 1, 2, \dots, p-1$)

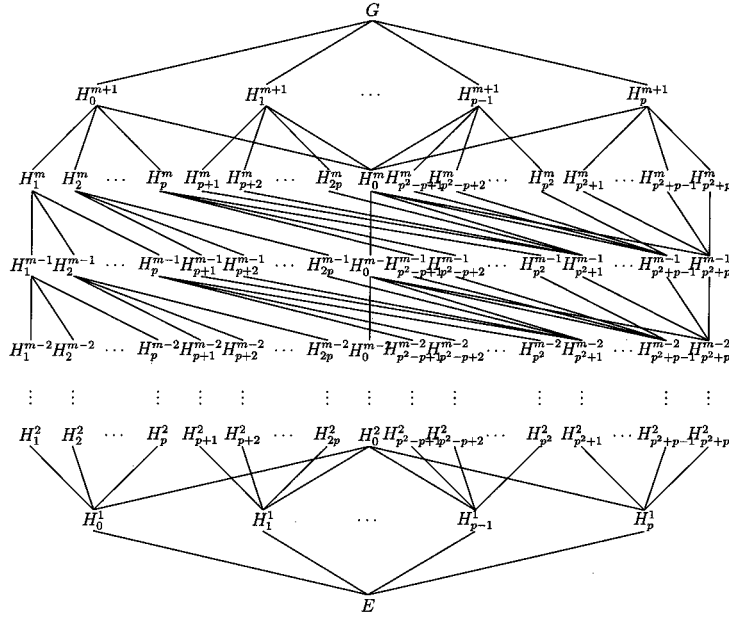
(2) 位数 p の部分群

- $\langle a^{p^{m-1}} \rangle \cong C_p$
- $\langle b^p \rangle \cong C'_p$
- $\langle (a^{p^{m-1}}, b^{ip}) \rangle$ ($i = 1, 2, \dots, p-1$)

(3) 位数 p^k ($k = 2, 3, \dots, m$) の部分群

- $\langle (a^{p^{m-k+2}}, e), (e, b) \rangle \cong C_{p^{k-2}} \times C'_{p^2}$
- $\langle (a^{p^{m-k}}, b^i) \rangle$ ($i = 0, 1, 2, \dots, p^2 - 1$)
- $\langle (a^{p^{m-k+1}}, b^i), (e, b^p) \rangle$ ($i = 0, 1, 2, \dots, p-1$)

各位数の部分群の個数については, $G = C_{p^m} \times C_p$ の場合と同様の方法で m に関する帰納法を用いて証明することが出来る. ここで, H_i^k ($k = 1, 2, \dots, m, i = 0, 1, \dots, p$) で位数 p^k の i 番目の部分群を表す. G の部分群のなすダイアグラムは以下ようになる.



5.2 $Q(G, \mathcal{F})$ の計算

$\text{res}_{\mathcal{F}}^G$ の表とそれから得られる行列 M は省略する. $Q(G, \mathcal{F})$ については, §4 と同様の計算で求めることができ,

$$\begin{aligned} Q(G, \mathcal{F}) &\cong Q(G, \mathcal{F}_1) \times Q(G, \mathcal{F}_2) \\ &\cong \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p^{(m-2)(p^2+1)+p^2+p+1} \\ &\cong \mathbb{Z}_p^{(m-2)(p^2+1)+p^2+p+2} \end{aligned}$$

が得られる. これにより, 定理 1.4 が証明された.

6 具体例

ここで具体例として $G = C_8 \times C_4$ の場合に $Q(G, \mathcal{F})$ を計算する.

C_8, C'_4 をそれぞれ位数 8, 4 の巡回群とし, $G = C_8 \times C'_4$ とする. (C_8 と明確に区別するために C'_4 と表記することにする.)

6.1 G の部分群について

a を C_8 の生成元, b を C'_4 の生成元とする. H_i^k ($k = 1, 2, \dots, m, i = 0, 1, \dots, p$) で位数 p^k の i 番目の部分群を表す. G の部分群のなすダイアグラムは以下ようになる.

$$M_{(\mathcal{F}_1, \mathcal{G}_1)} = \begin{bmatrix} v_G \\ v_0^4 \\ v_1^4 \\ v_2^4 \\ v_0^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\overset{\text{基本変形}}{\rightsquigarrow} N_{(\mathcal{F}_1, \mathcal{G}_1)} = \begin{bmatrix} w_G \\ w_0^4 \\ w_1^4 \\ w_2^4 \\ w_0^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

以上より,

$$B(G, \mathcal{F}_1) = \langle w_G, w_0^4, w_1^4, w_2^4 \rangle$$

である. ここで,

$$\begin{aligned} w_2^{4'} &= \frac{1}{2} w_2^4 \\ &= [0, 0, 0, 1, 1, 1], \end{aligned}$$

とすると,

$$w_2^4 \in B(G, \mathcal{F}_1) \subset L(G, \mathcal{F}_1) \text{ かつ } w_2^{4'} \in L(G, \mathcal{F}_1)$$

が言えるので、

$$Q(G, \mathcal{F}_1) \cong \mathbb{Z}_2$$

を得る. 次に, $M_{(\mathcal{F}_2, \mathcal{G}_2)}$ を行に関する基本変形で変形し, 次のような行列 $N_{(\mathcal{F}_2, \mathcal{G}_2)}$ を得る.

[illegible]

基本變形

$$B(G, \mathcal{F}_2) = \langle w_1^3, w_2^3, w_3^3, w_4^3, w_5^3, w_6^3, w_0^2, w_1^2, w_2^2, w_3^2, w_4^2, w_5^2, w_6^2, w_0^1, w_1^1, w_2^1, w_E \rangle$$
$$w_i^{k'} = \frac{1}{2} w_i^k \text{ for } (k, i) = (3, 2), (3, 4), (3, 6), (2, 4), (2, 6)$$

$w_i^k \in B(G, \mathcal{F}_1) \subset L(G, \mathcal{F}_1)$ か $w_i^{k'} \in L(G, \mathcal{F}_1)$ for above (k, i)

$$Q(G, \mathcal{F}_2) \cong \mathbb{Z}_2^{12}$$

以上により, $Q(G, \mathcal{F}_1)$ と $Q(G, \mathcal{F}_2)$ を計算することができたので,

$$\begin{aligned} &\cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2^{12} \\ &\cong \mathbb{Z}_2^{13} \end{aligned}$$

7 今後の課題

予想 7.1. p を素数, m を 3 以上の正の整数とする. $G = C_{p^m} \times C'_{p^3}$ ならば, $Q(G, \mathcal{F}) \cong \mathbb{Z}_p^{(m-2)(p^3+1)+2p^2+2p+3}$ である.

参考文献

- [1] Y. Hara and M. Morimoto, The inverse limit of the Burnside ring for a family of subgroups of a finite group, accepted by Hokkaido Mathematical Journal.

A 付録

定理 1.3 の証明に使用した $\text{res}_K^G[G/H]$ に関する表を以下に示す.

