



新量子力學の發展 (5)

コペンハーゲンに於て ペ・ヨルダン

(Die Naturwissenschaften 誌 1927 第 31 號所載)

6. シュレディンゲルの理論

先づ唯一つの電子が電磁場に在る場合の力學を考へるならば、Schrödinger の理論は de Broglie の思想を正しく遂行完成したものに外ならない。前に申し述べた de Broglie の方程式は力が作用しない直線運動にある粒子に對する振動數(ミ位相速度)を決定した、此の際波動の振幅は全空間に於て同じ大きさであるを假定した。然しながら加速度を有し曲線運動をなす粒子に對しては事柄は更に複雑なものであつて、de Broglie の方程式は適宜に一般化されねばならない。此の事を成し遂げたのが Schrödinger であるが、彼は、de Broglie 波動の振幅(場所の函數として)を其の振動數が依つて以て一般的に決定される一つの微分方程式を與えた。此の微分方程式を説明するに際し、又其のマトリックス理論との關係を述べるに當り、前と同様に簡單な場合、即ち、唯一つの自由度を有するシステム、從つて一元的運動をする質點の場合に就いて言はう。そうすると、此の質點は或る一つのエネルギー函數

$$H = \frac{1}{2m} p^2 + U(q),$$

を有する、茲に p は、前と同様、力積 $m\dot{q}$ を意味する、 $U(q)$ は(時間を明らかに含んでゐないもの假定するものであるが) その質點のポテンシャルエネルギーである。此の粒子力學的關係を波動力學に移す爲めに、エネ

ルギー函数の中に於て力積 p を微分オペラトル $\frac{h}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial q}$ に依つて置き換え次の振動の方程式を作る、即ち

$$\left\{ \frac{1}{2m} \left(\frac{h}{2\pi i} \right)^2 \frac{\partial^2}{\partial q^2} + U(q) - W \right\} \varphi(q) = 0.$$

此の式の中で $\varphi(q)$ は Schrödinger 波の振幅であり、 W はある常数である。此の微分方程式の解 $\varphi(q)$ を求むるのであるが、その $\varphi(q)$ が吾人の考へてゐる一元的全空間即ち q 軸のどこに於ても、到る所一義的であり且つ有限であるやうなそう言ふ $\varphi(q)$ を求める。此の要求は、よく知られてゐる數學的法則に依れば、一般にパラメタ W のどのやうな値に對しても満足されること云ふわけのものではない。此の要求が充たされるやうな特別な W の値は、數學者によつて上の微分方程式の「固有値」(Eigenwert) と名付けられてゐる所のものである。此の固有値が皆な離ればなれに (diskret) に分布されてゐると言ふ場合も起り得る、又或る範圍に渡つてその中のすべての實数が固有値であると言ふ様な場合も起り得る、最後に又離ればなれに不連続的な固有値が存在すること同時に連續的に相續いた固有値が存在すると言ふやうな場合も起り得る。Schrödinger に従へば、此の固有値が取りもなをさずシステムの色々な定常状態に於けるエネルギーの嚴密な量子論的の値である、即ち、調和振動器見たやうに、粒子力學的の意味で單に週期的運動のみしかなす事が出来なくて、従つて、ただ不連續な離ればなれな量子的状態のみしかもつ事の出来ないシステムの場合には、すべての固有値も又みな離ればなれに不連續的に分布されてゐる。此れに反して、例へば、水素原子に屬する様な微分方程式は一方に於て無限に澤山な不連續的な數、即ち

$$W_n = -c \frac{R h}{n^2} \quad (n=1, 2, \dots), \quad (\text{茲に } R = \text{Rydberg 常數})$$

が微分方程式の固有値であり、他方に於ては、 W が零よりも大きいやうなすべての數が又微分方程式の固有値である。此の不連續的な離ればなれの固有値は粒子力學論で言ふ楕圓軌道に相等し、Balmer の公式と一致する、ところが、 $W > 0$ の方の連續的に分布された固有値は、そのエネルギーが量子られて居ない様な雙曲線軌道に相等する。「上に示した様な方

法で水素原子によつて正しいエネルギー項 (Energie-term) が得られる」
 言ふ Schrödinger の発見は、常に物理學的に言つて根本につき進んだやり
 方と考へられるのみならず、數學的に言つても最も巨いなる重要さが存す
 るものである。數學者達は、特に Hilbert の指導のもとに於て、永い以前
 から微分方程式の固有値に關連した數學上の諸問題を研鑽してゐた。そし
 て、不連続的な固有値と同時に連續的に分布された固有値が現はれるやう
 な微分方程式が存在せねばならぬと言ふ事はずつと以前から知られてゐた
 のである。然しながら、此の事が起るやうな簡單な微分方程式の唯一つの
 例すら實際に之を與える事は成功しなかつたのである。Schrödinger は實
 にこの第一の例を提供したのである。

扨て Schrödinger の理論からマトリックスを導出する事にかゝらう。此
 の際簡單な爲めに、不連續的な量子状態のみが起るやうなシステムを問題
 とするとしやう。そうすると Schrödinger の微分方程式の色々な固有値は
 何か或る級數列、例へばその大きさの順序で $1, 2, 3, \dots$ と言ふやうなもので
 與える事が出来る。各固有値 W_n には振動方程式のそれに相等する解 $\varphi(q)$
 屬する、之れを W_n に屬する「固有函數」Eigenfunktion と名付ける。扨
 て q 及 p のマトリックスを作る。その要素は

$$q(nm) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_n(q) q \varphi_m^*(q) dq$$

$$\text{及び} \quad p(nm) = \frac{h}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_n(q) \frac{\partial \varphi_m^*(q)}{\partial q} dq$$

なる公式によつて計算される。この式に於て、 φ^* は φ に共軛な複素數で
 ある。Schrödinger, Pauli 及び Eckart は、斯くの如くして作つた此のマト
 リックスは實際ずつと前に説明した理論に従つて量子力學的問題の解とし
 て得られた所のマトリックスと全く一致すると言ふ事を證明した。

勿論、此の數學的主張の證明は茲で述べる限りでない。その證明の核心
 とも言ふべきものは、既に Born 及び Wiener によつて指摘され、量子力
 學に利用されるに到つた次の事實である。即ち：オペラトル $\frac{h}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial q}$

及オペラトル q (即ち, q を以て相乗する事)に對してはマトリックス pq に對すると同じ交換規則があてはまる: 即ち,

$$\frac{h}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial q} q - q \frac{h}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial q} = \frac{h}{2\pi i}.$$

もつと詳しく説明するならば, 若し q をアルグメントとするやうな何かある函數 $f(q)$ に q 手術(以下 Operation と言ふ言葉は外科醫者の術語にならつて手術を譯しやう, 吾々の文章では醫學上の事實と混同するおそれは全然ないから)を施をこす, 即ち q を乗じ, それからその結果に $\frac{\partial}{\partial q}$ 手術を施し(即ち q について微分する)その結果から, $f(q)$ に $\frac{\partial}{\partial q}$ 手術をなし次に q 手術を施した時に得られる結果を引くならば, 吾人はかくして再び函數 $f(q)$ を得る. この事は $f(q)$ に直接 1 手術を施こして(即ち數 1 をかける事)得られる結果と全く同じものである. (勿論上の式にはさの式にも $\frac{h}{2\pi i}$ なる因子が付け加はつて來る事は忘れてはならない).

斯くの如き手術因子を以て計算すると言ふ事が量子力學的問題に對する最も自然的な數學的な方法であると言ふ事を最初に知つて居たのは Born 及び Wiener であつた. 二つの手術因子を相乗すると言ふ事は, 丁度此の二つの手術因子を次ぎ繼ぎに應用して得られる結果と同じ結果を與えるやうな手術因子を作ると言ふ事である. 此の手術因子の乗積法は, 量子力學的量の象徴的乗積法と全く同じい法則に従ふ. 尚ほ q 及び $\frac{\partial}{\partial q}$ から加法や乗法に依つて作られる手術因子の他になほ積分の助けによりても手術因子を作る事が出来る. 即ち, $g(x,y)$ を二つの變數 x 及び y の或る函數とするならば,

$$F(x) = \int dy \cdot g(x,y) f(y)$$

なる方程式に依つて, 何か或る函數 f に, それに對應さすべき函數 F を附連して定義する事が出来る; 而もその函數 F に關しては, それが

$$I = \int dy \cdot g(x,y)$$

なる手術因子に依つて函數 f から誘出されると言ふのである. 此の際, $g(x,y)$ は, 之れを, 此の手術因子の「生産函數」(erzeugende Funktion)と名づける. 手術因子を以て計算すると言ふ事はずつと以前に數學者達に

依つて導出されてゐたのであるが、然し、此の最近になつては數學者達の方面から指導された所は比較的少ない。如何になれば、すべての收歛の困難や其他に關して、此の手術因子を以て文字通りに計算する事を數學的に嚴密に基礎づける言ふ事は屢々非常に困難な事柄であるからである。然しながら、量子力学に對しては、此の手術因子の方法は、重要な一般的な法則の自然的な表現を與えるもので、此の方法が正確に數學的に正しいか否うか言ふ事に關して幾重にも起つて來る不完全はしばらく之れを大目に見て置かねばならない。此れ等の問題が數學者達の方面からも旺んに追突議論される言ふ事は今後非常に望ましい事である。

Schrödinger の理論のマトリックス理論に於ける上に論じた關係は、澤山の自由度を有するやうなシステムの場合にも又あらはれて來る。例へば三つの自由度を有するシステム即ち一つの質點の量子論的力学は三次元の空間に於ける波動のシステムから誘出する事が出来る。然しながら更に進んで、もつと澤山の自由度を有するシステムに行くも、最早や Schrödinger のやり方では三次元の空間に於ける相應した波動システムを得る事は出来なくて、Schrödinger の波は、そのシステムが有する自由度の数と同じだけの次元を有する抽象的な空間内に擴がつて來る。即ち、例へば二つの質點系の場合には六次元の空間、三つの質點の場合には九次元の空間となる。以下かくの如しである。此の點に Schrödinger の理論が本質點に de Broglie-Einstein の計畫と異なる所があるのを見る事が出来る。Einstein に據れば、一つの閉ぢられた箱の中にある理想瓦斯は、此の三次元の箱の中で振動する波動系として考へられる事、丁度光量子瓦斯が、三次元の電磁空洞内に於ける波動系と考へられると同じである。然しながら、Schrödinger に従つて、理想瓦斯の量子力学の性質が因つて決定される所の波動系は、普通の空間内に振動するのではなくて瓦斯原子の抽象的な「坐標空間」(Koordinatenraum) 内に振動する。だから此の空間は、若し 10^{24} 個の原子が存在するならば、 $3 \cdot 10^4$ の次元を有する事になる。

Schrödinger の理論が得た根本的な重要な進歩の一つは「量子られる事」の問題に於てである。即ち、Schrödinger の波動振幅が全坐標空間(勿論無限

遠近も含む)に於て一義的で且つ有限であるべきと言ふ要求——此の要求は、作業變數が整數であると言ふ在來の要求よりも、吾人の物理學的悟性に於ては遙かに明白な要求であるが——此の要求から如何にして不連續な個々別々な量子狀態が誘出する事が出来るかは、實際、たつた今述べた所である。

此の Schrödinger の結果の驚嘆すべき實際的の意味は結局次の事に存する。即ち、彼の結果は量子力學の數學的問題を數式立てゝ、此の問題をよく知られたそして非常に發展してゐる數學的方法を以て企てる事を可能ならしめた。新量子力學が水素原子の場合に實際 Balmer の公式を正しい方法で與へると言ふ事はすでに Schrödinger 以前に Pauli 及び Dirac に依つて示された所である。然しながら實際應用された方法を以てしても水素原子の場合に推移の確率 (Übergangswahrscheinlichkeiten) (マトリックスの要素)を計算しやうなごゝは全く望みない事のやうに見えた。茲で Schrödinger の方法は救け船である。即ち、始めのマトリックスの理論では量子力學の數學的問題を無限に澤山の未知數に對する無限に澤山の方程式の助けによつて數式立て、又「q-數」の理論は解折數學的に幾分御し易くした事は云へなほ事かわつた新奇な點に於て尙ほ取扱ひに困難がこもなつたのであるが、Schrödinger は量子力學の數學的問題を二次のリネアールな偏微方程式に歸して仕舞つた。而も此の方程式は、重要な場合に於ては直ちに二三の普通の二次のリネアールな偏微分方程式にわかれて來るのである。かくの如くして問題は百年も、もつこ前からあらゆる方向に數學者達によつて研究され追究され來つた數學上の問題となつた。而も多くの場合に於ては此の重要な特種な數學的問題に對して得た微分方程式は、數學に於ける最もよく知られてゐる古典的な微分程式に屬して居り、よく知られてゐる數學上の函數——即ち Kugelfunktionen とか Hermite の函數だとか Laguerre の函數とか云ふやうな——を直接應用する事によつてこれを解くことが出来ると言ふ事すらわかつたのである。Schrödinger 自身が水素原子の固有函數を完全に計算して全原子物理學に於ける最も重要な量子力學的な特種な問題をあますところなく解決した。他方に於て、Schrödinger の研

究は、量子力学のアペリオディシユな過程——即ち水素や他の原子の場合に於ける雙曲線軌道や電子の衝突による原子の興奮など——への應用併びに Heisenberg の理論を、後でのべるやうに根本的に深め擴張する事に對して必要不可欠の見地を與えた。

Schrödinger に據れば、擾亂論 (Störungstheorie) を彼の理論の繩張内で展開する事が出来る。それは原則としてはマトリックス力学に於ける擾亂論と全く同じものである。他方またそれは Lord Rayleigh によつて與えられたやり方を一般化したものと考えられた。Rayleigh のやり方に従えば例へば一様にはなつてゐないがたゞ極く一寸だけ一様性からはなれてゐるやうな振動弦を取扱ふ。此のものも又今日の量子力学が到達した數學的方法を極度に用ひた一例を示すものであるが此の際には普通ならば何等關係なくあらはれて来る數學的法則が單に同一の事實のちがつた表し方として示される。かくの如くして Kramers 及び Heisenberg の分散公式も又 Schrödinger のやり方で勿論なしとける事が出来る。

特に注意に値するのは Schrödinger の函數と電磁場の強さとの關係の問題である。前に述べた澤山の次元の空間を考へる必要をさける爲めに、特に一つの電子を有する量子力学の問題に就いて論ずるならば、先づ第一の問題は三次元の空間に擴がつて行く Schrödinger の函數と電磁場とは如何なる相互作用にあるかと言ふ事である。此の相互作用の正確な智識は、突然の光の放射や、光の原子による散亂など、關連する精細な問題に必要なものである。(例へば、方向エントアルツングなどの場合に於ける共鳴輻射の偏極など)。Dirac はすでに「q-數」の方法によつて分散角度による Compton の分散線の強さを正確に計算する事に成功した。そして其の議論は Cordon に依つて Schrödinger の方法に據つて論ぜられた。即ち、Cordon は Schrödinger の函數と電磁場の間の相互作用に關して一定した前提を作り、純粹に波動力學的に Dirac の結果と同じ結果を得たのである。Cordon の論は最近 Schrödinger に依つて論ぜられてゐる。然しながら此の方面の問題には、前にのべた根本的な難點即ち、光量子に屬する波は普通の三次元の空間を傳播するのに、電子に屬する波は澤山の次元を有する空間を傳

幡する言ふ事は全く考えずするも、なほ多くの疑問が残されてゐるのである。

茲で一す一言挿んで置きたいが、此れ等の難點を考へるに際しては、なほ次の様な事情も考察せねばならない。即ち、それは、普通の古典的光の波動論は全然秩序立てられてゐない言ふ事である。而も此の古典的波動論はすべての實驗的に研究された干涉的現象を實驗と完全に調和せしめてゐる。然しながら、此の事は、吾々の光學的實驗に於ては常に或る場所に於ける光の強さの時間的平均を問題としてゐる言ふ事に存するものである。若し(此の事は今まで成功しなかつた事であるが)光の強さの出入りを實驗的に追究する事が出来たであらうならば、實驗と理論とは非常にかけはなれてゐたであらう。然しながら、Einstein が之れを認めた様に、此の強さの出入りに關しては純粹に熱力學的に二三の結論を言ふ事が出来る。今次の様な事を考へる。暗黒輻射に依つて満されてゐるやうな一つの空洞をこり、それから極く小さな一體積 V を切り離して、極くせまい振動數の領域 ν 及び $\nu + d\nu$ の間の輻射のみが何ら障害を受ける事なくして大小の體積間を出入りする事が出来るやうにする。大きな體積の部分から小體積内に突入して来る、此の振動數領域内の光波間にはそうする極く除々なゆれ(震動Schwebungen)が起るであらう。此のゆれを步調を一にして體積の部分 V は $d\nu$ なる振動數領域の輻射のエネルギーを吸ふたり吐いたりする。 V なる體積内に於ける此のエネルギーの搖動自乗(Schwankungsquadrat)の平均はEinstein に據れば、Plauck の輻射法則を基として純粹に熱力學的に計算する事が出来る。即ち其の結果は、

$$\overline{\Delta^2} = h\nu \cdot E + \frac{C^2}{8\pi\nu^2} \cdot \frac{E^2}{V}$$

となる。茲に $E d\nu$ は V 内に於ける振動數領域 $d\nu$ の輻射エネルギーである。他方又熱力學の概念を應用する事なくして振動數領域 $d\nu$ 内に於ける波の干涉を追究する事が出来る。故に全く獨立に此の搖動の自乗を計算する事が出来る。斯くして、Lorentz が示した様に、Einstein の結果とは異なつた結果を得る。即ち、

$$\overline{\Delta^2} = \frac{C^2}{8\pi\nu^2} \frac{E^2}{V}.$$

更に全く見方をかえて光量子瓦斯の概念を利用すれば、揺動自乗は古典瓦斯論に於いて密度の揺動が計算されるやりかたで計算する事が出来るが其の結果は

$$\overline{\Delta^2} = h\nu E$$

である。揺動自乗の Einsein の公式は明らかに謎のやうな輻射の二重の性質を示してゐる。即ち、實際の揺動自乗は波動論的に計算した値と微粒子論的に計算した値との和になつてゐる。輻射エネルギー E が大きな場合 (Rayleigh-Jeans の法則があてはまる範圍に於ては) には實際的には「波動論的」な部分のみが考へに入つて来る。此の場合には古典的光線が實際的には完全にあてはまる。此れに反して輻射密度が非常に小さな場合 (即ち Wien の法則があてはまる場合) には實際的にはたゞ「微粒子的」部分のみが残る。そして此の場合には輻射は極端な光量子瓦斯となる。

若し Rayleigh-Jeans の輻射法則が Planck の輻射法則のかわりにあてはまるであらうならば、熱力學的計算と純粹光學的(干涉現象をもごゝする)計算との間の矛盾はなくなつて仕舞ふであらう、故に、實際の揺動自乗と Lorentz に據つて計算したのとの錯互は、丁度、Planck の法則自身が、空洞内の固有振動が量子られてゐる事に基礎をおいてゐるのと同じ關係にあるにちがいない。此の「量子られてゐる事」を量子力学の一般的原理から導出すると言ふ事は、今の所、量子力学の今日までの數式立てはただ一つ一つの質點(電子とか原子核だとか)のシステムに關係してゐるのに、電磁空洞に於ては振動する連續體が入つて来ると言ふ事によつてまたけられるのである、

然しながら、文字通りに全く同じ問題は結晶格子の振動の場合にも起つて来る。そして結晶はやはり質點のシステムであるからして、量子力学の法則を結晶に應用する事には何等のさまたけも起らないわけである。Born, Heisenberg 及び Jordan は一つの結晶格子内に於ける振動エネルギーの揺動をマトリックスの理論に據つて計算した。そして其の結果は、此の振動

のマトリックス理論的敘述は實際熱力學に依つて要求される揺動自乗の値を與えると言ふ事であつた。此の事實は明らかに例へば次のやうに見られる。半ば古典的理論に據れば第 n 番目の興奮状態にある調和振動器は nh に比例するエネルギーを有してゐるのに、量子力學は $(n + \frac{1}{2})h$ に比例するエネルギーを與える；故に基礎状態 ($n=0$) に於てもなほ或る「零點エネルギー」(Nullpunktsenergie) を有する。結晶格子の固有振動器は實際一つ一つの調和振動器のやうに振舞ふのであるが、これも又同様に零點エネルギーを有する。そして此の全零點エネルギーは一様に全結晶にひろがつてゐる。扨て結晶の幾つかの固有振動が興奮させられるとそれ等のエネルギーは相互に相干渉し合ふのみならず、又零點エネルギーとも相干渉する。この爲めに全エネルギー揺動は大きくなる。此の増大は輻射密度が大きな場合（振動器が高度に刺戟される場合）には重要なものではない；然し振動器が極く一寸だけ刺戟されて、そのエネルギーが零點エネルギーとの干渉に依つて強度の揺動にあちこちゆれ動かされる場合には、此の増大は唯一の重要さをもつて来る。

〔附言。輻射と物質との相互作用の純粹な量子力學的考へ方に於ては、今此の論文を書いてゐる間に、極く最近あらはれた Dirac の大きな仕事に依つて驚ろくべき進歩をなした。Dirac は、輻射の一つ一つの調和成分を量子られてゐると假定して輻射場を正しい量子力學的に取扱ふと自由放射の疑似古典的取扱の際に生ずる見掛け上の諸難點を非常に満足な方法で解決する事が出来、輻射蒸發 (Strahlungsdämpfung) や線の廣さの數量的理論の根據を供する事が可能なる事を示した。のみならず Dirac のやり方は、Born, Heisenberg 及び Jordan によつてなされた次の議論を正しい完結を供するものである事を茲で注意して置きたい；その議論と言ふのは、輻射の強度揺動に關する困難は量子力學的には、結晶格子に於ける振動エネルギーの場合のそれに對應する困難も全く同じ方法で解決されると言ふのである〕。

此の章の最後に臨みなほ次の事を知らせて置こう。Kaluza 及び Mandel に依つて基礎づけられた、吾人の三次元の空間は一つの四次元の空間内に

横はつてゐる（従つて吾々の四次元の空間時間多様性 Raumzeitmannigfaltigkeit は一つの五次元の高次元内にある）と言ふ觀念は Klein 及び Fock に依つて Schrödinger の理論と密接な關係にもたらされた。實際、若し空間が非常にせまい圓筒表面に似たものではあるが然し此の表面が二次元的のものではなく丁度四次元的なものを考へられるやうなものであると考へるならば、色々な便利を得るのである。此の四次元の空間と言ふのは、三つの方向には無限に或は非常に遠くまで擴がつてゐるが、第四番目の方向には週期的にそれ自身でクルクルまひをする。よく御存知の通り Pauli は電子に四つの量子数が配せられる、即ち四つの自由度が配せられる事を認めた。故に London と共に此の新しい次元の假説と磁電子 (Magnetelektron) の理論の間の關連を求める事は明らかな事である。然しながら此の新次元が如何に用ひられるかに關する決定は尙ほ將來の研究にまたねばならない。

（荒木俊馬譯）

「天界」既刊號の中の**流星**に關する記事

第3號(第1卷)第42—44頁	「獅子座流星群の觀測」	古川 龍城
7 (1) 106.	「太陽系の現勢」中の流星副射點の表	山本 一清
10 (1) 181—183.	「天體の實際觀測を奨む」中の流星觀測法	山本 一清
31 (3) 223—225.	「流星の觀測」	中 村 要
53 (5) 433.	「十一月の流星期來る」(雜報)	
79 (7) 卷頭寫眞	「奉天で寫した大流星」	山本 一清
79 (7) 412—422.	「流星の話」	山本 一清
83 (8) 85.	流星觀測報告	{ 小横孝二郎 古畑 正秋
84 (8) 103—110.	「琴座流星群に就て」	小横孝二郎
85 (8) 192.	流星觀測報告	村地 孝一
85 (8) 198—199.	「琴座流星群來る」	Y