

Involution をもつ位相環上の調和解析

九州大学 富田 稔

§1. Generalized Fourier analysis.

I. M. Gelfand はその著書 *Generalized functions* Vol. 4 の中で *involution* をもつ位相環上の正値双線型形式, および正値線型汎関数の概念を導入し, その理論を *Generalized Fourier analysis* と呼ぶ. 超関数論や群の表現論の統一的研究に有効なことを示した. この意味での *Generalized Fourier analysis* はそれ自身作用素環論における大まな未解決の分野を構成しており, ような理論の発展によって非有界正値線型汎関数の基本的性質を論ずる道を開くことが出来る. この小論では上の意味の *Generalized Fourier analysis* を発展させるために Hilbert 空間の上に *observable* および *pseudoobservable* という概念を導入し議論を *observable algebra* の研究に帰着させることが出来る事を示す. *Observable algebra* の構造については近く論文を発表する予定である ([4]).

いま分離連続な乗法をもつ局所凸複素線型位相環 $\mathcal{A}$ で, その中に *involution* $a \rightarrow a^*$ が定義されているものを考え, これを位相 $*$ -代数と呼ぶ. $\mathcal{A}$ から適当な Hilbert

空間 $\mathcal{H}$ 上の作用素環 $\mathcal{A}$ の連続 $*$ -準同型写像 π を $\mathcal{A}$ から $\mathcal{H}$ への作用素表現と呼び、また $\mathcal{A}$ から $\mathcal{H}$ への連続線型写像 λ で条件

$$\lambda(ab) = \pi(a)\lambda(b) \quad (1)$$

をみたすものを $(\pi$ に関する) $\mathcal{A}$ の *vector 表現* と呼ぶ。

$\mathcal{A}$ の *vector 表現* λ に対し、それから誘導される正値双線型型式 φ :

$$\varphi(a, b) = (\lambda(a), \lambda(b)) \quad (2)$$

を考えれば、これは次の式をみたしている。

$$1. \quad \varphi(a, a) \geq 0, \quad (3)$$

$$2. \quad \varphi(a, b) \text{ は } a, b \text{ について } \textit{quasilinear} \quad (4)$$

$$3. \quad \varphi(ab, c) = \varphi(b, a^*c), \quad (5)$$

$$4. \quad \varphi(ab, ab) \leq \|\pi(a)\|^2 \varphi(b, b). \quad (6)$$

$\mathcal{A} \times \mathcal{A}$ 上の汎関数 φ で上の4つの条件をみたすものを $\mathcal{A}$ の元に関する *表現可能型式* といい。

いま φ を $\mathcal{A}$ の連続な正値双線型型式とし、適当な Hilbert 空間 $L^2(\varphi)$ およびある $\mathcal{A}$ から $L^2(\varphi)$ への連続な線型写像 λ で条件 (2) を満足するものを構成する。このとき φ が表現可能であるための必要十分条件は λ が $L^2(\varphi)$ 上の適当な作用素表現 π_φ に対する *vector 表現* になっている事である。

$\mathcal{A}$ 上の線型汎関数 P で条件

$$p(a^* a) \geq 0 \quad (7)$$

$$f. \quad p(a^*) = \overline{p(a)} \quad (8)$$

をみたすものは正值であるという。

p から誘導される $\mathcal{A} \times \mathcal{A}$ 上の正值双線型型式 p° を

$$p^\circ(a, b) = p(b^* a) \quad (9)$$

で定義するとき, p° が (π に関して) 表現可能であれば p は (π に関して) 表現可能であるという。

§1. 位相*-代数の特異拡大と Hilbert 空間上の observable.

位相*-代数 $\mathcal{A}$ からある Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上の作用素表現を π とするとき, これから $\mathcal{A}$ を拡大したある位相*-代数 $T(\mathcal{A}, \pi)$ を構成し, これを $\mathcal{A}$ の (π に関する) 特異拡大と呼ぶ. $T(\mathcal{A}, \pi)$ は位相空間としての積空間 $\mathcal{A} \times \mathcal{H} \times \mathcal{H}$ の中に次のような*-代数としての演算を持っているものである. α を scalar, $A = (a, x, y)$, $B = (b, u, v)$ を $T(\mathcal{A}, \pi)$ の要素とすれば αA , $A+B$, A^* , AB は次のように定義される。

$$\alpha A = (\alpha a, \alpha x, \overline{\alpha} y), \quad A+B = (a+b, x+u, y+v),$$

$$A^* = (a^*, y, x), \quad AB = (ab, \pi(a)u, \pi(b)^* y),$$

次の定理は容易に証明することが出来る。

定理 1.1. $\mathcal{A}$ を位相*-代数, π を $\mathcal{A}$ のある Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上の作用素表現とすれば, $T(\mathcal{A}, \pi)$ は位相*-代数

で次のような作用素表現 π 。および vector 表現 λ をもつ、

$A \in T(\mathcal{A}, \pi)$ に対して $A = (a, x, y)$ ならば

$$\pi(A) = \pi(a), \quad \lambda(A) = x.$$

$\mathcal{A}$ が等長な involution をもつ Banach*-代数であれば

$T(\mathcal{A}, \pi)$ の要素 $A = (a, x, y)$ の norm を

$$\|A\| = (\|a\|^2 + \|x\|^2 + \|y\|^2)^{\frac{1}{2}}$$

によって定義すれば次の定理 1.2 が成立する。

定理 1.2. 定理 1.1 における $\mathcal{A}$ が等長な involution をもつ Banach*-代数であれば、 $T(\mathcal{A}, \pi)$ はやはり等長な involution をもつ Banach*-代数である。

特別な場合として Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上の連続線型作用素全体の作る C^* -代数を $P(\mathcal{H})$ として、 $\mathcal{H}$ 上への自然表現に関する $P(\mathcal{H})$ の特異拡大を $T(\mathcal{H})$ であらわす。 $T(\mathcal{H})$ の要素を observable と呼べば observable A は $P(\mathcal{H})$ の要素 $\pi(A)$ 、および $\mathcal{H}$ の 2 要素 $\lambda(A)$, $\lambda(A^*)$ の三重対

$$A = (\pi(A), \lambda(A), \lambda(A^*))$$

として表わされ、その norm は次式であらえられる。

$$\|A\| = (\|\pi(A)\|^2 + \|\lambda(A)\|^2 + \|\lambda(A^*)\|^2)^{\frac{1}{2}}.$$

定理 1.2 より直ちに次の定理がある。

定理 1.3. Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上の observable 全体 $T(\mathcal{H})$ は等長な involution をもつ Banach*-algebra である。

$A \rightarrow \pi(A)$ は $T(\mathcal{H})$ を $P(\mathcal{H})$ 上へ写す連続な $*$ -homomorphism であり, $A \rightarrow \lambda(A)$ は π に関する $T(\mathcal{H})$ の vector 表現であり, 従って次式も満足する

$$\lambda(AB) = \pi(A)\lambda(B).$$

位相 $*$ -代数 $\mathcal{O}$ からある Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上の observable によって作られる normed $*$ -代数上への一様に連続な $*$ -準同型写像 τ が存在するとき, τ を $\mathcal{O}$ の $\mathcal{H}$ 上への observable 表現という. 作用素表現, vector 表現および observable 表現の間の関係を次の 2 定理によって述べるこゝが出来る.

定理 1.4. τ が位相 $*$ -代数 $\mathcal{O}$ の observable 表現ならば, $\pi \circ \tau$ は $\mathcal{O}$ の作用素表現で, $\lambda \circ \tau$ は $\pi \circ \tau$ に関する $\mathcal{O}$ の vector 表現である.

定理 1.5. 位相 $*$ -代数 $\mathcal{O}$ の作用素表現 π と π に関する $\mathcal{O}$ の vector 表現 λ に対しては次のような $\mathcal{O}$ の observable 表現 τ が存在する.

$$\tau(a) = (\pi(a), \lambda(a), \lambda(a^*)).$$

§2. pseudobservable と正值線型汎関数の表現

φ を位相 $*$ -代数 $\mathcal{O}$ 上の表現可能な型式とする. φ に対して

$$p(b^*a) = p^{\circ}(a, b) = \varphi(a, b)$$

をみたす正值線型汎関数は例え $L^2(\varphi)$ 上の作用素表現 π_{φ} が非縮退であつても必ずしも存在するとは限らない. その例と

して Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上の observable 全体 $T(\mathcal{H})$ の上の基本型式

$$\varphi(A, B) = (\lambda(A), \lambda(B))$$

を考える。 P が $\varphi = P^\circ$ をみたす $T(\mathcal{H})$ 上の正值線型汎関数であるとすれば, $T(\mathcal{H})$ の要素 $X = (0, x, 0)$ に対して $X^*X = 0$ であるにも拘らず

$$P(X^*X) = \varphi(X, X) = \|x\|^2 \neq 0$$

となる矛盾が起きる。

位相*-代数 $\mathcal{A}$ 上の表現可能な型式 φ が与えられた時, φ に関する $\mathcal{A}$ の特異拡大 $S(\mathcal{A}, \varphi)$ を次のように定義する。

$\mathbb{C}$ を複素数体とする。 $S(\mathcal{A}, \varphi)$ は線型位相空間としての積空間 $\mathcal{A} \times \mathbb{C}$ の中に乗法及び involution を次式によって定義したものである。 (a, α) および (b, β) が $S(\mathcal{A}, \varphi)$ の要素であれば

$$(a, \alpha)(b, \beta) = (ab, \varphi(b^*a)),$$

$$(a, \alpha)^* = (a^*, \bar{\alpha}).$$

容易に次の定理を証明することが出来る。

定理 2.1. φ が位相*-代数 $\mathcal{A}$ 上の表現可能な型式であれば $S(\mathcal{A}, \varphi)$ は位相*-代数である。 $(a, \alpha) \rightarrow a$ は $S(\mathcal{A}, \varphi)$ を $\mathcal{A}$ 上に写す連続な*-準同型写像であり $S(\mathcal{A}, \varphi)$ 上の連続な正值線型汎関数

$$\mu(a, \alpha) = \alpha.$$

を考へれば μ から誘導される表現可能な正值双線型型式 μ° は次式をみたしている。

$$\begin{aligned}\mu^\circ((a, \alpha), (b, \beta)) &= \mu((b, \beta)^*(a, \alpha)) \\ &= \varphi(a, b).\end{aligned}$$

定理 2.2. 定理 2.1. における $\mathcal{O}$ が等長な involution をもつ Banach $*$ -代数であれば $S(\mathcal{O}, \varphi)$ は次の norm により等長な involution をもつ Banach $*$ -代数になる。

$$\|(a, \alpha)\| = (\|a\|^2 + (\alpha)^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上の Banach $*$ -代数 $\mathcal{T}(\mathcal{H})$ に対してその基本型式 φ に関する特異拡大を $S(\mathcal{H})$ であらわし、その要素を pseudoobservable と呼ぶ。この定義によつて $\mathcal{H}$ の pseudoobservable A はある observable $\tau(A)$ と scalar $\mu(A)$ の対

$$A = (\tau(A), \mu(A))$$

がありその norm は次式で定められる。

$$\|A\| = \|\tau(A)\|^2 + |\mu(A)|^2.$$

$\tau(A)$ は 3 重対 $\tau(A) = (\pi \circ \tau(A), \lambda \circ \tau(A), \lambda \circ \tau(A^*))$ であ

あるから A は更に 4 重対

$$A = (\pi \circ \tau(A), \lambda \circ \tau(A), \lambda \circ \tau(A^*), \mu(A))$$

で表わされる。 $\tau(A)$ を A の observable 表現, $\mu(A)$ を A の期待値という。定理 2.2 から直ちに次の定理が出る。

定理 2.3. Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上の pseudoobservable 全体 $S(\mathcal{H})$ は等長な involution をもつ Banach $*$ -代数である。 $A \rightarrow \tau(A)$ は $S(\mathcal{H})$ を $T(\mathcal{H})$ 上に写す連続 $*$ -準同型であり, 期待値 μ は $S(\mathcal{H})$ 上の表現可能な正值線型汎関数で次式を満足する。

$$\mu(B^*A) = \mu^*(A, B) = (\lambda \circ \tau(A), \lambda \circ \tau(B)).$$

位相 $*$ -代数 $\mathcal{O}$ から $S(\mathcal{H})$ の部分 $*$ -代数への一様な連続 $*$ -準同型写像 τ を $\mathcal{O}$ の pseudoobservable 表現という。次にこの表現と表現可能な正值線型汎関数との関係を次の定理として述べる。

定理 2.4. σ が位相 $*$ -代数 $\mathcal{O}$ の pseudoobservable 表現であれば (a). $\pi \circ \tau \circ \sigma$ は $\mathcal{O}$ の作用素表現である。
(b). $\lambda \circ \tau \circ \sigma$ は $\pi \circ \tau \circ \sigma$ に関する $\mathcal{O}$ の vector 表現である。
(c). $\mu \circ \sigma$ は $\mathcal{O}$ 上の表現可能な連続線型汎関数であって次式を満足する。

$$\mu \circ \sigma(b^*a) = (\lambda \circ \tau \circ \sigma(a), \lambda \circ \tau \circ \sigma(b))$$

定理 2.5. 位相 $*$ -代数 $\mathcal{O}$ 上の表現可能な正值線型汎関数 p に対して, p^* を p から誘導された表現可能な型式とし, $L^2(p^*)$ を $L^2(p)$ であらわす, $L^2(p)$ 上への $\mathcal{O}$ の作用素,

vector および observable 表現をそれぞれ π_p, λ_p および τ_p であらわせば $\mathcal{O}$ は次式によって定義される pseudoobservable 表現 σ_p をもつ。

$$\begin{aligned}\sigma_p(a) &= (\tau_p(a), p(a)) \\ &= (\pi_p(a), \lambda_p(a), \lambda_p(a^*), p(a)).\end{aligned}$$

このとき p は次の式をみたす。

$$p(a) = \mu \circ \sigma_p(a).$$

§3. Observable algebra と pseudoobservable algebra $\mathcal{A}$ を Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ とするとき $T(\mathcal{H})$ の 閉 $*$ -部分環を observable algebra, $S(\mathcal{H})$ の 閉 $*$ -部分環を pseudoobservable algebra と呼ぶ。 pseudoobservable algebra を observable algebra から構成する方法を決定するのは比較的容易である。

pseudoobservable algebra $\mathcal{O}$ は, $\mathcal{O}$ 上の observable 表現 τ が $*$ -isomorphic であるとき有限であるといい, 有限でないとき無限であるという。有限な pseudoobservable algebra は次のようにして構成される。 Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ の要素 A および $\mathcal{H}$ 上の連続線型作用素 A に対して observable $\tau_g(A)$ および pseudoobservable $\sigma_g(A)$ を次のように定義する。

$$\tau_g(A) = (A, Ag, A^*g), \quad \sigma_g(A) = (\tau_g(A), (Ag, g))$$

定理 3.1. $\mathcal{O}$ が Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上の有限な pseudoobservable algebra であるための必要かつ十分な条件はある C^∞ -代数 $\mathcal{O}$ および $\mathcal{H}$ の要素 φ を用いて $\mathcal{O} = \sigma_\varphi(\mathcal{L}_\varphi)$ とあらわすことが出来ることである。

無限な pseudo C^* -algebra の構成法は次の通りである。

定理 3.2. $\mathcal{O}$ が Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上の無限な pseudo-observable algebra であるための必要十分条件は, $\mathcal{O}$ が $\mathcal{H}$ 上の observable algebra $\mathcal{L}_\varphi$ の基本型式に関する特異拡大 $S(\mathcal{L}_\varphi)$ になっている事である。

定理 3.1. 3.2 の証明は容易であるが, ここでは省略する。observable algebra $\mathcal{L}_\varphi$ をどのようにしてある C^* -algebra から構成するかという議論についてはここで結論に付さない。 $\pi(A) = 0$ をみたす observable を 0 -作用 observable という。 0 -作用 observable 全体 $N(\mathcal{L}_\varphi)$ は次の内積によって Hilbert 空間になる。

$$(A, B) = (\lambda(A), \lambda(B)) + (\lambda(B^*), \lambda(A^*))$$

$N(\mathcal{L}_\varphi)$ の任意の閉 $*$ -部分空間は乗法について $AB = 0$ をみたす observable algebra になるのでこれを 0 -作用 observable algebra と呼ぶ。 Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上の observable algebra $\mathcal{O}$ に対し, 集合 $(\pi(A)x : x \in \mathcal{H}, A \in \mathcal{O})$ を含む最小の閉線型空間を $[\pi(\mathcal{O})\mathcal{H}]$ とあらわし,

その上への射影を $P_{\mathcal{O}}$ とする。また $(AB : A \in \mathcal{O}, B \in \mathcal{O})$ を含む最小の閉線型集合を $[\mathcal{O}^2]$ で表わす。もし $\lambda(\mathcal{O})$ が $[\pi(\mathcal{O})^{\perp}]$ に含まれていれば $\mathcal{O}$ は非縮退であるという。

observable algebra $\mathcal{O}$ が非縮退であるための必要十分条件は $\mathcal{O} = [\mathcal{O}^2]$ が成立することである。

一般にある observable algebra $\mathcal{O}$ は $\mathcal{O} = \mathcal{L} + \mathcal{N}$ の形にかけらる。ただし $\mathcal{L}$ はある非縮退 observable algebra で、 $\mathcal{N}$ は $N([\pi(\mathcal{O})^{\perp}])$ の閉 $*$ -部分空間である。上の分解 $\mathcal{O} = \mathcal{L} + \mathcal{N}$ に対して product algebra $\mathcal{L} \times \mathcal{N}$ を考へ、その中に norm および involution を

$$\langle A, X \rangle^* = \langle A^*, X^* \rangle,$$

$$\|\langle A, X \rangle\| = (\|A\|^2 + \|X\|^2)^{\frac{1}{2}}$$

で定義すれば $A + X \rightarrow \langle A, X \rangle$ は $\mathcal{O}$ を $\mathcal{L} \times \mathcal{N}$ へ写す等長 $*$ -同型写像である。

0 以外の 0-作用 observable を含まない observable algebra は正則であるという。Observable algebra は正則であるとき、その時に限って半単純になる。一般に非縮退 observable algebra $\mathcal{O}$ は $\mathcal{O} = \mathcal{L} + N(S)$ の形にかけらる。ここに $\mathcal{L}$ はある正則な observable algebra であり、 S は $[\pi(\mathcal{L})^{\perp}]$ に含まれて $[\lambda(\mathcal{L})]$ に垂直な閉部分空間である。今 $\mathcal{L}$ の作用素表現 π を空間 S に制限したものを

を π_S であらわし, $\mathcal{L}$ の π_S に関する特異拡大 $T(\mathcal{L}, \pi_S)$ を考える. $T(\mathcal{L}, \pi_S)$ の要素を $\langle A, a_1, a_2 \rangle$ であらわせば,

$$A + (0, a_1, a_2) \longrightarrow \langle A, a_1, a_2 \rangle$$

は $\mathcal{O} (= \mathcal{L} + N(S))$ を $T(\mathcal{L}, \pi_S)$ の上へ与える等長な $*$ -同型写像である.

最後に正則な observable algebra $\mathcal{O}$ は次のようにして構成される. 今 Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上の C^* -代数 $\mathcal{L}$ を考える. 有向集合 Λ の各点に $\mathcal{L}$ の要素 g_λ が定義されていて, 次の条件もみたすとき $\{g_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ を $\mathcal{L}$ に関する正則系と呼ぶ.

$$(a). \quad \|Ag_\lambda\| \leq \|Ag_\mu\| \quad (\lambda < \mu \text{ のとき}),$$

(b). $\lim_{\lambda} Ag_\lambda$ は $A \in \mathcal{L}$ のある稠密な $*$ -部分代数に属するとき収束する.

今 $\{g_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ を $\mathcal{L}$ に関する正則系とし, $\lim_{\lambda} Ag_\lambda$, $\lim_{\lambda} A^*g_\lambda$ の共に収束するような $A \in \mathcal{O}$ 全体を $\mathcal{L}_0$ であらわす. $A \in \mathcal{L}_0$ に対して $\tau(A)$ を

$$\tau(A) = (A, \lim_{\lambda} Ag_\lambda, \lim_{\lambda} A^*g_\lambda)$$

で定義すれば, $\mathcal{L}_0$ は $\mathcal{L}$ の稠密な $*$ -部分代数であって, 写像 $A \rightarrow \tau(A)$ による $\mathcal{L}_0$ の表現環 $(\mathcal{L}_0)$ は observable algebra である. 正則な observable algebra は常に

上のような C^* -代数 $\mathcal{L}_0$ および $\mathcal{L}_0$ に関する正則系 $\{g_\lambda: \lambda \in \mathcal{L}\}$ によって作られる observable algebra $\tau(\mathcal{L}_0)$ に一致する。

§4. 表現可能な正值双線型型式の分解

位相 $*$ -代数 $\mathcal{A}$ 上の表現可能な型式を §3 の結果を用いて分類することが出来る。 φ を $\mathcal{A}$ 上の表現可能な型式とし、 $L^2(\varphi)$ 上の作用素表現を π_φ 、これに関する vector 表現を λ_φ とする。また π を $\|\pi(a)\| \geq \|\pi_\varphi(a)\|$ をみたす任意の $\mathcal{A}$ の作用素表現とする。

φ は $\pi_\varphi = 0$ のとき、すなわち $\varphi(a, c) \equiv 0$ かつ $\varphi(c, a) \equiv 0$ に成立するとき、初等的であるという。また π_φ が $L^2(\varphi)$ 上で非縮退であるとき、 φ は非縮退であるという。

φ は、 $\pi(a_n) \rightarrow 0$ かつ $\lambda_\varphi(a_n) \rightarrow x$ であれば必ず $x = 0$ という条件をみたすとき、正則であるといい、 $L^2(\varphi)$ の任意の要素 x に対して $\pi(a_n) \rightarrow 0$ かつ $\lambda_\varphi(a_n) \rightarrow x$ をみたす列 $\{a_n\}$ が存在するとき特異であるという。集合 $(\pi_\varphi(a)x : x \in L^2(\varphi), a \in \mathcal{A})$ を含む最小の内線型集合上の射影を P とし、 $\pi(a_n) \rightarrow 0$ および $\lambda_\varphi(a_n) \rightarrow x$ となるような列 $\{a_n\}$ が $\mathcal{A}$ の中に存在するような $L^2(\varphi)$ の要素 x 全体の空間上の射影を N とする。 P, N を用いて次の射影を定義する。

$$F = P(1-N), \quad S = PN, \quad Z = (1-P)N.$$

一般に K の $L^2(\varphi)$ 上の正值 Hermitian 型式で、表現代数 $\pi_\varphi(\mathcal{A})$ と可換であれば、正值双線型型式 φ_K を

$$\varphi_K(a, b) = (K \lambda_\varphi(a), \lambda_\varphi(b))$$

によって定義するとき、 φ_K は表現可能である。従って φ に対して分解

$$\varphi = \varphi_P + \varphi_Z = \varphi_F + \varphi_N = \varphi_F + \varphi_S + \varphi_Z$$

を考えれば、 $\varphi_P, \varphi_N, \varphi_F, \varphi_S, \varphi_Z$ などは表現可能な型式であるが、更に次のことを示すことが出来る。 φ_P は非縮退、 φ_N は特異、 φ_F は正則、 φ_S は真に特異、 φ_Z は初等的である。

また次の定理が成立する。

定理. 表現可能な $\mathcal{A}$ 上の型式 φ が真に特異であるための必要十分条件は、 φ が非縮退であり、 $L^2(\varphi)$ 上の observable 表現で φ に対して表現代数 $\pi_\varphi(\mathcal{A})$ の閉包が $\pi_\varphi(\mathcal{A})$ の閉包の π_φ に関する特異拡大になっていることである。

表現可能な型式 φ は $L^2(\varphi)$ の中に次のような条件をみたす要素 g が存在するとき有限であるという。

$$\lambda_\varphi(a) = \pi_\varphi(a)g.$$

二つの表現可能な正值型式 φ, ψ に対して、もし $\varphi - \psi$ が正值型式であれば $\varphi \geq \psi$ と書く事にする。

定理. 表現可能な形式 φ に対して, $\varphi \geq \psi$ であるような有限な表現可能形式全体を $\mathcal{F}$ とすれば次の関係が成立する。

$$\varphi_F(a, a) = \sup_{\psi \in \mathcal{F}} \psi(a, a)$$

上の定理から φ が特異であるための必要十分条件は $\varphi \geq \psi$ を満たす有限な表現可能形式 ψ が 0 以外には存在しないことであり, φ が正則であるための必要十分条件は φ が $\varphi \geq \psi$ を満たす有限な表現可能形式 ψ 全体の上限に一致することであることがわかる。

§5. 特異正定値測度および正定値超関数の存在

G を連続 Lie 群とし, G 上の Schwartz 空間 $\mathcal{D}(G)$, すなわち compact な carrier をもつ無限回微分可能な関数全体の作る線型位相空間を考える。 $\mathcal{D}(G)$ は群代数として位相 $*$ -代数になる。 $\mathcal{D}(G)$ の 2 要素 f, g の積 $f \circ g$ は G の左側不変速度に関する重畳

$$f \circ g(x) = \int f(y) g(y^{-1}x) dy$$

であり, f の involution f^* は G の modular 関数 $\Delta(x)$ を用いて次のようにあらわされる。

$$f^*(x) = \Delta(x^{-1}) \overline{f(x^{-1})}.$$

ただし, $\Delta(x)$ は次の条件を満たす G 上の連続関数である。

$$\int f(x) dx = \int f(x^{-1}) \Delta(x^{-1}) dx.$$

$\mathcal{D}(G)$ 上の連続線型汎関数は超関数と呼ばれるが、特に $\mathcal{D}(G)$ 上で正値をとるものを正定値超関数と呼ぶ。

$\mathcal{D}(G)$ 上の正値双線型型式 $\varphi(f, g)$ については次の定理が知られている。

定理. $\mathcal{D}(G)$ 上の連続な正値双線型型式 $\varphi(f, g)$ が

$$\varphi(fg, h) = \varphi(g, f^*h)$$

をみたせば、 φ は表現可能であって、適当な G 上の正定値超関数 μ によって次のように表わされる。

$$\mu(g^*f) = \varphi(f, g).$$

上の定理によって G 上の正定値超関数 μ および誘導される型式 μ° は必ず「表現可能」で非縮退である。しかし必ずしも正則であるとは限らない。次に μ が特異になる例をのべよう。今 3 次元実 vector 空間 G の中に次のように乗法を定義する。

$$(a_1, a_2, a_3)(b_1, b_2, b_3) = (a_1 + b_1 + a_2b_3, a_2 + b_2, a_3 + b_3).$$

G は可解 Lie 群であって通常の Lebesgue 測度がその両側不変測度になっている。いま $\mathbb{R}^2$ の要素 $u = (u_2, u_3)$ に対して G の $L^2(-\infty, +\infty)$ 上への unitary 表現 U_u を次のように定める。

$$U_u f(x) = e^{i(u_2 u_3 a_1 + u_2 a_2 x)} f(x + u_3 a_3)$$

$\varphi \in \mathcal{D}(G)$ に対する積分作用素

$$L\varphi = \int \varphi(a) U_a da$$

は次のような積分作用素として表わされる。

$$L\varphi f(x) = \int \varphi(x, y) f(y) dy,$$

$$\varphi(x, y) = u_3^{-1} \int \varphi(a_1, a_2, \frac{y-x}{u_3}) e^{i(u_2 u_3 a_1 + u_2 a_2 x)} da_1 da_2.$$

$\varphi \rightarrow \Phi$ は $\mathcal{D}(G)$ から Schmitt 型積分作用素の

作る $\ast$ -algebra 内への $\ast$ -準同型であり

$$P_{m, \lambda}(\varphi) = \frac{\partial^{2m}}{\partial x^m \partial y^m} \varphi(x, y) \Big|_{x=y=\lambda}$$

は $\mathcal{D}(G)$ 上の既約表現を誘導する正定値超関数で真に特異である。特に $m=0$ の場合は正定値測度である。

§ 6. C^* -代数上の非有限正値汎関数

C^* -代数 $\mathcal{A}$ の正の要素全体 $\mathcal{A}^+$ 上で定義される汎関数 P が次の条件を満たしているとき、これを $\mathcal{A}^+$ の正値線型汎関数と呼ぶ。

$$0 \leq P(A) \leq +\infty$$

$$P(A+B) = P(A) + P(B),$$

$$P(tA) = tP(A),$$

もし P が次の条件を満たせばこれは正則であるという。

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|A_n\| < \infty \text{ を満たす } \mathcal{A}^+ \text{ の列 } \{A_n\} \text{ に対しては}$$

$$P\left(\sum_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$$

が成立する。

正值線型汎関数 p は, その有限部分

$$\mathcal{O}(p) = \{A \in \mathcal{O} : p(A^*A + AA^*) < \infty\}$$

が $\mathcal{O}$ の中で $norm$ について稠密なとき p は擬有限である (*quasifinite*) という。

定理 6.1. C^* -代数 $\mathcal{O}$ において $\mathcal{O}^+$ 上の擬有限な正值線型汎関数 p が正則になるための必要十分条件は

$$p(A) = \sup_{g \in \mathcal{L}} g(A)$$

をみたすような有限な正值線型汎関数の集合 $\mathcal{L}$ が存在することである。

定理 6.1 と共に次の定理が成立し, Dixmier によって提起された問題 (p. 55. [1]) が殆ど解決されたことになる。

この問題については今の所汎関数が *unitary* 有界である場合を取扱った **Pederson** の結果があとだけである。

定理 6.2. Von Neumann 代数 $\mathcal{O}$ に対して, $\mathcal{O}^+$ 上の *normal* なかつ $\mathcal{O}(p)$ が $\mathcal{O}$ で強稠密な正值線型汎関数 p があるとき, p に対して

$$p(A) = \sup_{g \in \mathcal{L}} g(A)$$

が成立するような *normal* な有限正值線型汎関数の集合 $\mathcal{L}$ が存在する。

参考文献

- [1]. J. Dixmier, Les algèbres d'opérateurs dans l'espace Hilbertien. Paris (1957)
- [2]. J. Pedersen, Measure theory for C^* -algebras, Math. Scand. 19(1966) 131-145.
- [3]. M. Tomita, Standard forms of von Neumann algebras.
- [4]. M. Tomita, Fourier analysis on topological algebra with involution and Standard form of von Neumann algebra. (In preparation).