

ある非局所分散性を持つ系での孤立波の二次元相互作用について

九大・応力研* 辻 英一 (Hidekazu TSUJI)
 Ioffe Inst. A.V.Porubov
 九大・応力研* 及川 正行 (Masayuki OIKAWA)
 * Research Institute for Applied Mechanics, Kyushu Univ.

1 はじめに

これまでに、流体・プラズマなどさまざまな媒質中の波動を記述する目的で、多くの非線形方程式が提案され、その性質が研究されてきた。我々は、特にそのような非線形方程式で記述される一次元的な孤立波の二次元相互作用について焦点を当てて調べてきた [1, 2, 3].

例えば、二次元 Benjamin-Ono(2dBO) 方程式

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \mathcal{H} \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right] \right) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad \left(\mathcal{H}[f(x)] \equiv \frac{1}{\pi} \text{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x')}{x' - x} dx' \right), \quad (1)$$

は、ある種の成層流体中の弱非線形波動を表す BO 方程式を二次元に拡張したモデル方程式である (y 方向は主要な進行方向 x に対して直角の方向に取る)。BO 方程式は可積分であり、孤立波の一次元相互作用はソリトン解などで記述できるが、2dBO 方程式は非可積分と考えられ、そのような解析が行えない。我々は、2dBO 方程式の数値計算により、孤立波同士の二次元相互作用を調べ、進行方向の違いによって第三の孤立波が現れるなどの相互作用の本質的な変化を明らかにしている [2].

本研究では、Khmara and Stepanyants [4] や Benjamin [5] によって浅水波のモデル方程式として提案された以下の方程式に注目する。

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + b \mathcal{H} \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right] + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0. \quad (2)$$

ここで、 b はパラメータである。この方程式は分散性を表す項を二つ持っている。非局所分散項が無い ($b = 0$) 場合にはこの方程式はよく知られた Korteweg-de Vries(KdV) 方程式に、また 3 次の分散項が無い場合には BO 方程式になる。このことから、以降この方程式を KdV-BO 方程式と呼ぶ事にする。

これまでの研究の中で、KdV-BO 方程式が定常に伝播する孤立波解を持つ事が (数値的に) 示されている。この孤立波解については、その性質や解の存在・安定性について数学的に詳しく調べられている [6] 一方で、その孤立波同士の相互作用については調べてられていない。

本研究では、まずこの孤立波同士の一次元的な相互作用について数値的に調べた後、二次元の領域内で孤立波が角度を持って相互作用する場合の解析を行う。この解析には、KdV-BO 方程式を形式的に二次元拡張した方程式（以降 KP-BO 方程式と呼ぶ）,

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + b\mathcal{H} \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right] + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad (3)$$

を用いる。

2 定式化

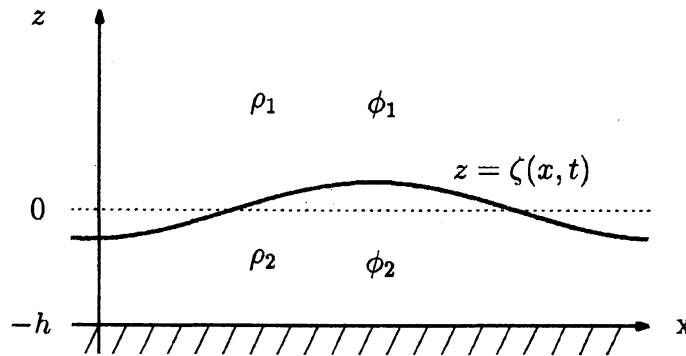


図 1: 二層流体系

ここでは、流体の基礎方程式と KdV-BO 方程式の関係を述べ、その物理的背景を示す。

上層が無限に伸びた非粘性・非圧縮・渦無しの二層流体を考える。流体の運動は速度ポテンシャルで書かれ、基礎方程式系は上下層でのラプラス方程式に加え、界面、底面と上層遠方での境界条件である。なお、界面の力学的条件（圧力のつりあい）の式については表面張力を考慮する。

線形近似を行うと、この系で生じる波動の分散関係は

$$\omega^2 = \frac{g|k|\{1 - \rho_r\} + T|k|^3}{1 + \rho_r \tanh(|k|h)} \tanh(|k|h), \quad T \equiv \frac{\gamma}{\rho_2}. \quad (4)$$

となる。ここで ω が周波数、 k は波数、 h は下層の水深、 g は重力加速度、 $\rho_r \equiv \rho_1/\rho_2$ は密度比であり、 ρ_1, ρ_2 はそれぞれ上層、下層の密度である。また γ は表面張力係数である。さらに長波長 ($|k|h \ll 1$) の場合を考えると、

$$\omega \simeq |k| \sqrt{gh(1 - \rho_r)} \left[1 - \frac{\rho_r}{2} |k|h - \frac{1}{6} |k|^2 h^2 \left(1 - \frac{9}{4} \rho_r^2 - \frac{3T}{gh^2(1 - \rho_r)} \right) \right] \quad (5)$$

となる。ここで $\rho_r \rightarrow 0$ 、つまり上層の密度を 0 と置くと、左辺の括弧 $[]$ 内の第 2 項が落ち、第 1 項と第 3 項が残る。この第 3 項は波数の 3 乗を含み、KdV 方程式の分散項に対応

している。また、 $|k|$ の 2 次までで打ち切った場合、今度は括弧 $[]$ 内の第 3 項が落ち、BO 方程式の分散項に対応した第 2 項が残る。

本研究ではこの第 2 項と第 3 項が同程度の大きさになる波数、すなわち

$$|k_a|h \simeq \frac{3\rho_r}{1 - \frac{9}{4}\rho_r^2 - \frac{3T}{gh^2(1-\rho_r)}} \quad (6)$$

となる波数 k_a に対応した波長のスケールを持つ波動がこの系に存在する場合を考えている。そのような場合、界面の波動を表す方程式は分散関係 (5) に対応する項

$$b\mathcal{H}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right] + \beta\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}, \quad \left(b \equiv \frac{\rho_r}{2}, \quad \beta \equiv \frac{1}{6}h^2\left(1 - \frac{9}{4}\rho_r^2 - \frac{3T}{gh^2(1-\rho_r)}\right)\right)$$

を持つと考えられる。このことから KdV-BO 方程式が根拠付けられる。3 次の分散項の係数 β については、正負どちらの値もとリエるが、ここでは、KdV 方程式のソリトン解との比較を考えるため、正の場合に限定する。(値自体は正規化で他の変数に繰り込む事ができる)。

なお、以上の解釈は Khmara[4] に従ったが、Benjamin[5] は (6) 式右辺の分母に表面張力 T を含む項のみを考える近似を用いている。その場合には常に $\beta < 0$ となり、ここで考える状況とは異なる。

以上のように、KdV-BO 方程式は基本方程式から通減摂動法などで系統的に導出された物ではない。しかし、ここに示した項は高次のオーダーになるため、系統的に導出されると考えられる方程式は、他の非線形項や分散項が含まれる複雑な方程式になると予想される。ここでは、系の本質をつかむために、単純化を施したモデル方程式 (2) を考える事にする。また、二次元の拡張についても、これまで我々が研究した二次元 BO 方程式などと同じ形で拡張が自然であると考えて KP-BO 方程式 (3) を考える。

3 一次元での孤立波とその相互作用について

よく知られているように、KdV 方程式や BO 方程式の孤立波解は衝突の前後で形を変えず安定に伝播する。二つの方程式は可積分系である事から詳細な解析が可能であり、衝突の振る舞いも解析的に説明する事ができる。

一方、KdV-BO 方程式では、そもそも解自体が数値的にしか求まらず、相互作用についても解析的に結果を導くのは難しいため、ここでは、二次元相互作用を考える前段階として、孤立波同士の一次元追い越し相互作用を調べることにする。

3.1 定常進行孤立波解

Khmara によると、KDV-BO 方程式 (2) の定常進行波解は次のように書ける:

$$u = Av(\zeta), \quad \zeta = \frac{1}{2}(\sqrt{b^2 + 4A} - b)(x - At), \quad (7)$$

ただし, $v(\zeta)$ は

$$(1-S)\frac{d^2v}{d\zeta^2} + S\frac{d}{d\zeta}\mathcal{H}[v] + \frac{v^2}{2} - v = 0 \quad (8)$$

の解, ここで

$$S = \frac{b\sqrt{b^2 + 4A} - b}{2A}. \quad (9)$$

ここで, A は速度であり, 振幅でないことに注意する. この式 (8) をさまざまな振幅に関係するパラメータ A と b について数値的に解き, Khmara が論文で示している結果を確認した.

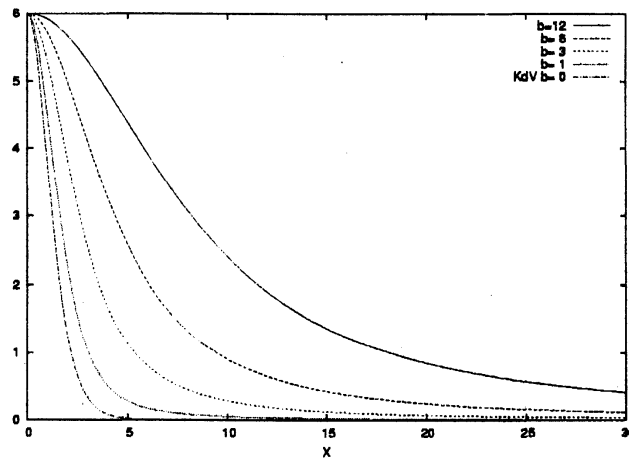


図 2: KdV-BO 方程式 ($b > 0$) の定常進行孤立波解.

結果のうち, パラメータ b の影響を見るため, 幾つかの $b > 0$ の値での孤立波解を図 2 に示す. 式 (8) より v は偶関数であるため, 正の部分のみを示している. なお, 振幅は全て同じ値に揃えている. これから, b が大きいほど裾が広がった孤立波になる事がわかる. よく知られているように, KdV 方程式のソリトン解は中心から離れるについて指数的に 0 に近づく一方, BO 方程式の解では裾が代数的にゆっくりと小さくなる. この孤立波の形状の変化は, b が大きくなると BO 型の分散の割合が大きくなる事から説明できる.

なお, $b < 0$ でも孤立波解が存在する (詳細は [7]). その場合には裾が振動するような解が得られるが, このパラメータ領域は浅水波系では考えにくい事もあり, ここでは述べない事にする.

なお, 孤立波の速度 (A に等しい) とパラメータ b の関係を図 3 に示す. これによると, b が大きくなるにつれて孤立波の速度は遅くなっていく事がわかる.

3.2 孤立波解の追い越し相互作用

次に, 定常進行波解の追い越し相互作用を調べる.

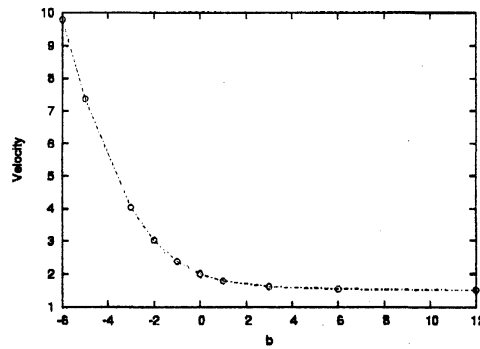


図 3: KdV-BO 方程式の孤立波解の速度.

具体的には、振幅の違う二つの孤立波（進む向きは x 方向の正の向き）を初期に十分離れた場所においた状態を初期条件とする。振幅が大きい方が速度が速いため、時間が経つにつれ両者は近づく。

数値計算の方法については、辻・及川 [3] で用いた方法を一次元化した物を使っている。境界条件は周期境界条件である。保存量（エネルギーに対応する物を使った）については、計算終了の時点で 0.1 % 程度の範囲での保存を確認している。

図 4 に $b = 1$ での計算結果を示す。相互作用は非常にソリトンのため、相互作用前後で個性を保っている。僅かに相互作用後、二つの孤立波の後方に非常に小さな波が存在しているが、これは保存量から考えられる数値的な誤差と同程度の大きさであり、実際に相互作用の結果生成された物かどうかは今の所不明である。いずれにしても KdV-BO 方程式の孤立波解は非常にソリトンに近い相互作用ををすると言える。なお、 $b < 0$ の場合の相互作用については [7] に示されている。

4 二次元内の孤立波同士の相互作用

前節で、KdV-BO 方程式の孤立波解は追い越し相互作用の前後で個性を保って伝播していくと言う事が明らかになった。この節では、一次元的に伸びている孤立波同士の相互作用の特徴について数値的に調べる。

数値計算の方法は、一次元の場合と同じように辻・及川 [3] で用いた方法を使っている。初期条件として、

$$u = Av(\zeta), \quad \zeta = \frac{1}{2} \left(\sqrt{b^2 + 4A} - b \right) (X + \Omega Y - X_0), \quad (0 < Y < L_Y/2),$$

$$u = Av(\zeta), \quad \zeta = \frac{1}{2} \left(\sqrt{b^2 + 4A} - b \right) (X - \Omega Y - X_0), \quad (L_Y/2 < Y < L_Y)$$

を与える。ここで L_Y は計算領域の Y 方向の長さである。これは、KdV-BO 孤立波の数値データを Y 方向にずらして作られる初期値であり、計算領域を斜めに進行する二つの孤立波を与えた事になる（後に示す図の $t = 0$ 参照）。相互作用する二つの孤立波の向き（進行方向）は Ω の値で与えられる。

なお、ここでも $b \geq 0$ の場合を考える。また、二次元局在解の探索を目的とした計算結果は [7] に示されている。

まず比較の材料として KP 方程式 ($b = 0$) の結果を図 5 に示す。相互作用の様子は孤立波の進行方向の成す角度 Ω によって変化する。角度が大きい場合 ($\Omega = 3$, 図 5(a)~(c)) では、相互作用後の領域に相互作用前と同じ孤立波が形成され、(図 5(b))、十分時間が経つと、孤立波を重ね合わせたパターンが定常に伝播していく。なお、 X 方向に周期境界条件を使っているため、相互作用後に後方できた波が後ろから前へ回りこみ、本来波がない領域を乱している (図 5(c))。しかし相互作用する場所への影響は、この時点まででは認められない。一方角度が小さい場合 ($\Omega = 1$, 図 5(d)~(f)) では時間と共に、相互作用の領域で元の孤立波とは異なる第 3 の方向 (Y 方向) へ伸びる孤立波 (以後 stem と呼ぶ) が形成される (図 5(e))。また、相互作用後の孤立波についても振幅や伸びる方向が異なっている。ここでも十分時間が経った後、定常に進行するパターンが形成される (図 5(f))。このパターンを構成する 3 つの孤立波については、共鳴条件という関係が成り立っている [8]。

次に KP-BO 方程式での計算結果を示す。 $b = 1$ とし、KP 方程式と同じ二つの Ω の値について結果を示す。

まず角度が大きい場合 $\Omega = 3$ を図 6 に示す。KP 方程式と同様に、相互作用領域の前後で同じ孤立波が伝播している事がわかる。詳細に見ると、非常に小さな波が相互作用後の波動の後部に存在するが、相互作用全体としては、ほぼ KP 方程式の結果に等しい。なお、KP 方程式の場合と同様、周期境界条件による本質的でない波の回り込みが生じているが、数値計算自体に影響は無い。

図 7 に角度が小さい時 $\Omega = 1$ を示す。この時も、対応する角度パラメータでの KP 方程式の結果と同様、stem が形成される。違う点は後方に伸びる主要な波の他に、振幅の小さな波が stem の後方の領域に存在している事である。その波は相互作用前後の波と stem が合わさっている点から伸びている。KP 方程式ではこの点から波が 3 方向に伸びる共鳴解がこの波形を良く説明する。しかし、ここでは振幅の小さな波が存在するために、この視点からの見方は必ずしも正しくないと言える。なお、この相互作用後の (主要な波動以外の) 小さな波の伝播は、2dBO 方程式の相互作用を考えた時にも観察されている [2]。なぜ BO が持つような非局所分散項がこのような効果を与えているのかという問題は、今後の解析の課題である。

参考文献

- 1) Tsuji, H. and Oikawa, M.: Two-Dimensional Interaction of Internal Solitary Waves in a Two-Layer Fluid, J. Phys. Soc. Jpn. 62 (1993) 3881.
- 2) Tsuji, H. and Oikawa, M.: Oblique interaction of internal solitary waves in a two-layer fluid of infinite depth, Fluid Dyn. Res. 29 (2001) 251.

- 3) Tsuji, H. and Oikawa, M.: Two-dimensional Interaction of Solitary Waves in a Modified Kadomtsev-Petviashvili Equation: J. Phys. Soc. Jpn. 73 (2004) 3034.
- 4) Khmara, T.V. and Stepanyants, Yu.A., "Is KdV-equation valid for the description of surface waves on shallow water?", Preprint 324,IAP,RAS,Nizhny Novgorod (1992).
- 5) Benjamin, T.B. "A new kind of solitary wave", J. Fluid Mech. 245 (1992) 401.
- 6) Albert J.P., Bona J.L. and Restrepo J.M., "Solitary-Wave Solutions of the Benjamin Equation" SIAM Journal on Applied Mathematics 59 (1999) 2139.
- 7) 辻・Porubov・及川, "非局所分散項を持つ2次元非線形浅水波方程式の解析" 日本流体力学会年会 2005 論文集 (2005) AM05-16-002.
- 8) Miles, J. W., "Resonantly interacting solitary waves" J. Fluid Mech. 79 (1977) 171.

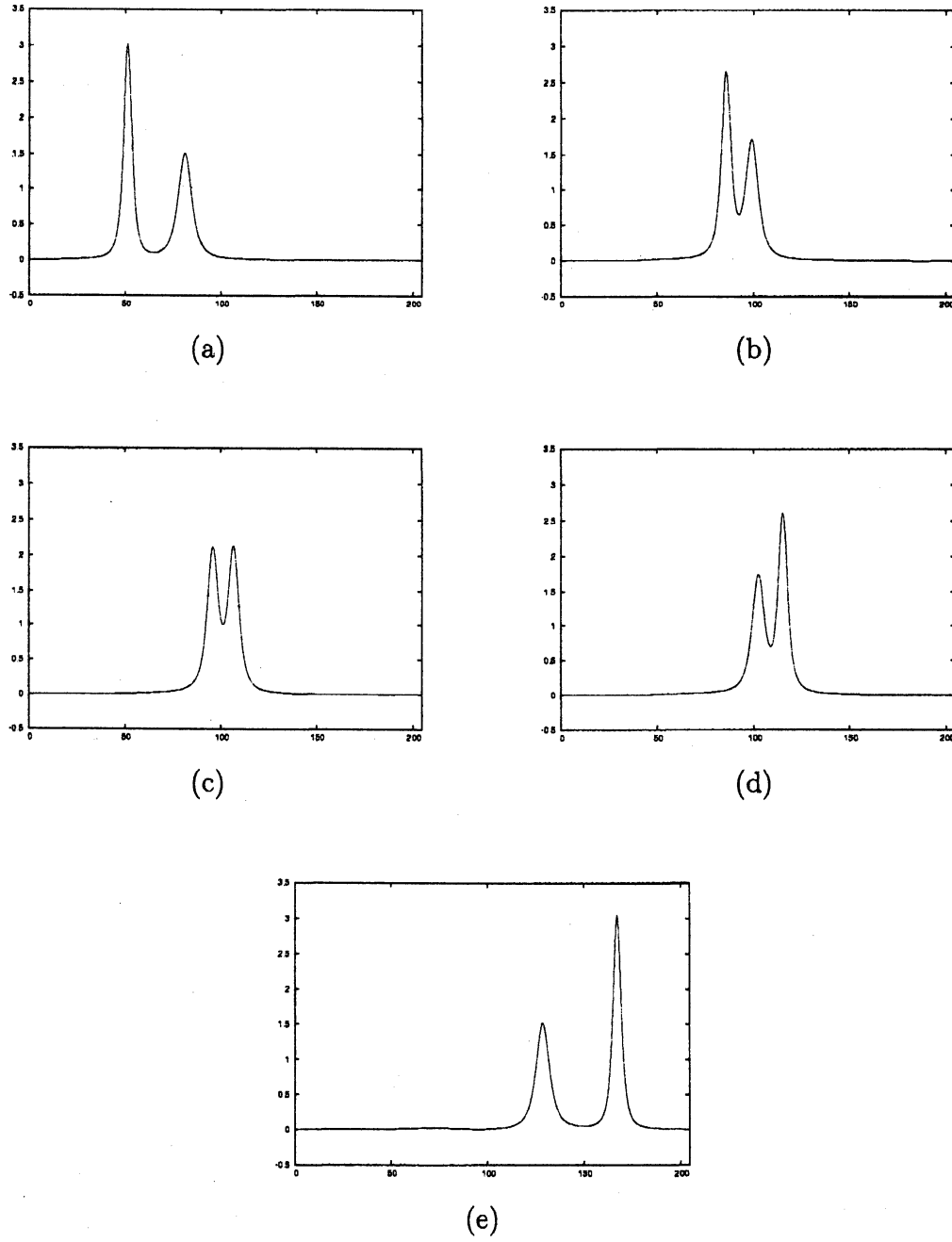


図 4: KdV-BO 方程式 ($b = 1$) の孤立波解 (振幅は 3 と 1.5) の追い越し相互作用. (a) $t = 0$, (b) $t = 40$, (c) $t = 53.5$, (d) $t = 65$, (e) $t = 125$.

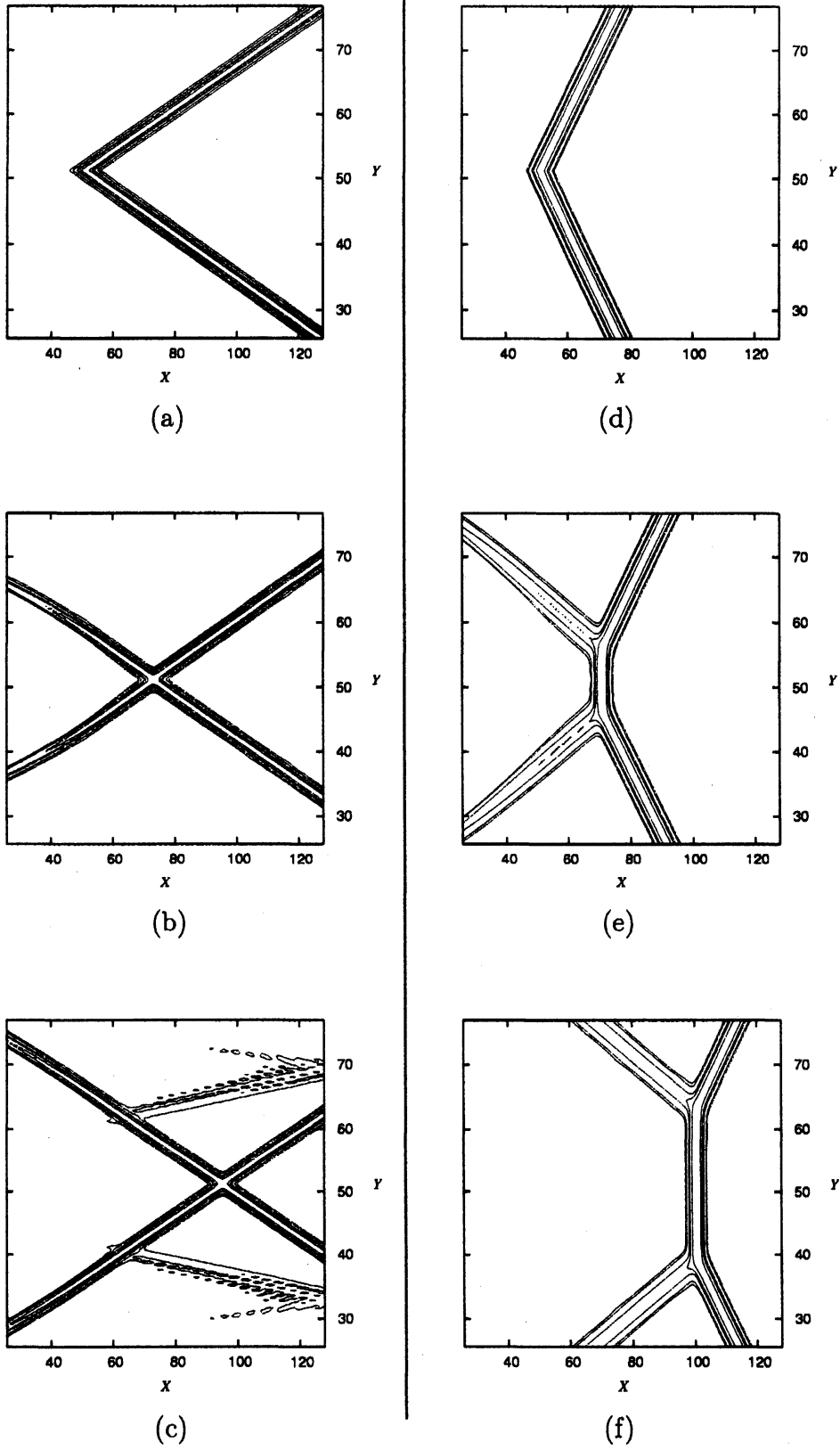


図 5: KP 方程式 ($b = 0$), の孤立波解の相互作用. (a) $\Omega = 3, t = 0$, (b) $\Omega = 3, t = 2$, (c) $\Omega = 3, t = 4$, (d) $\Omega = 1, t = 0$, (e) $\Omega = 1, t = 5$, (f) $\Omega = 1, t = 12.5$.

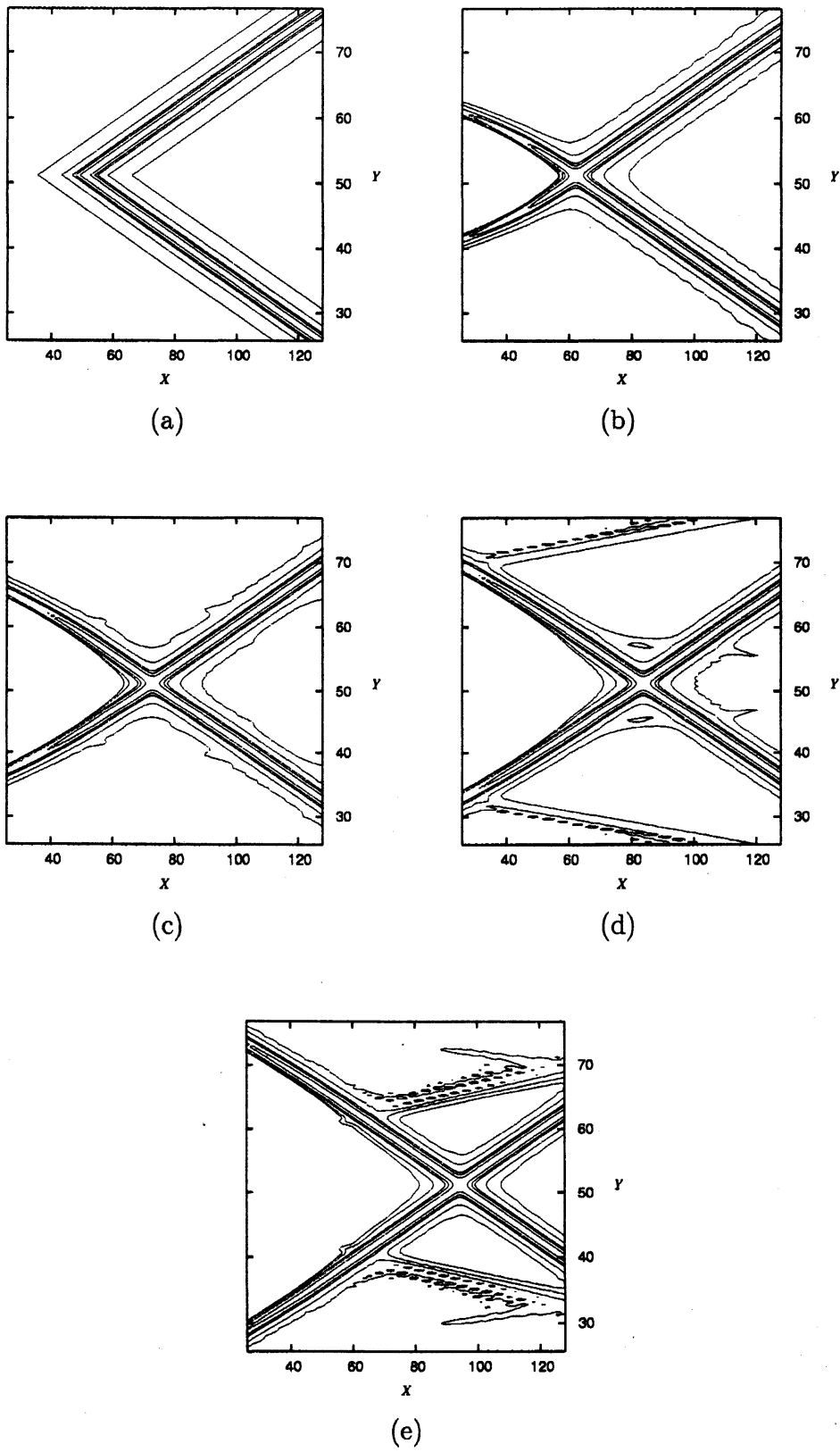


図 6: KP-BO 方程式の孤立波解の相互作用. $b = 1$, $\Omega = 3$. (a) $t = 0$, (b) $t = 1$, (c) $t = 2$, (d) $t = 3$, (e) $t = 4$.

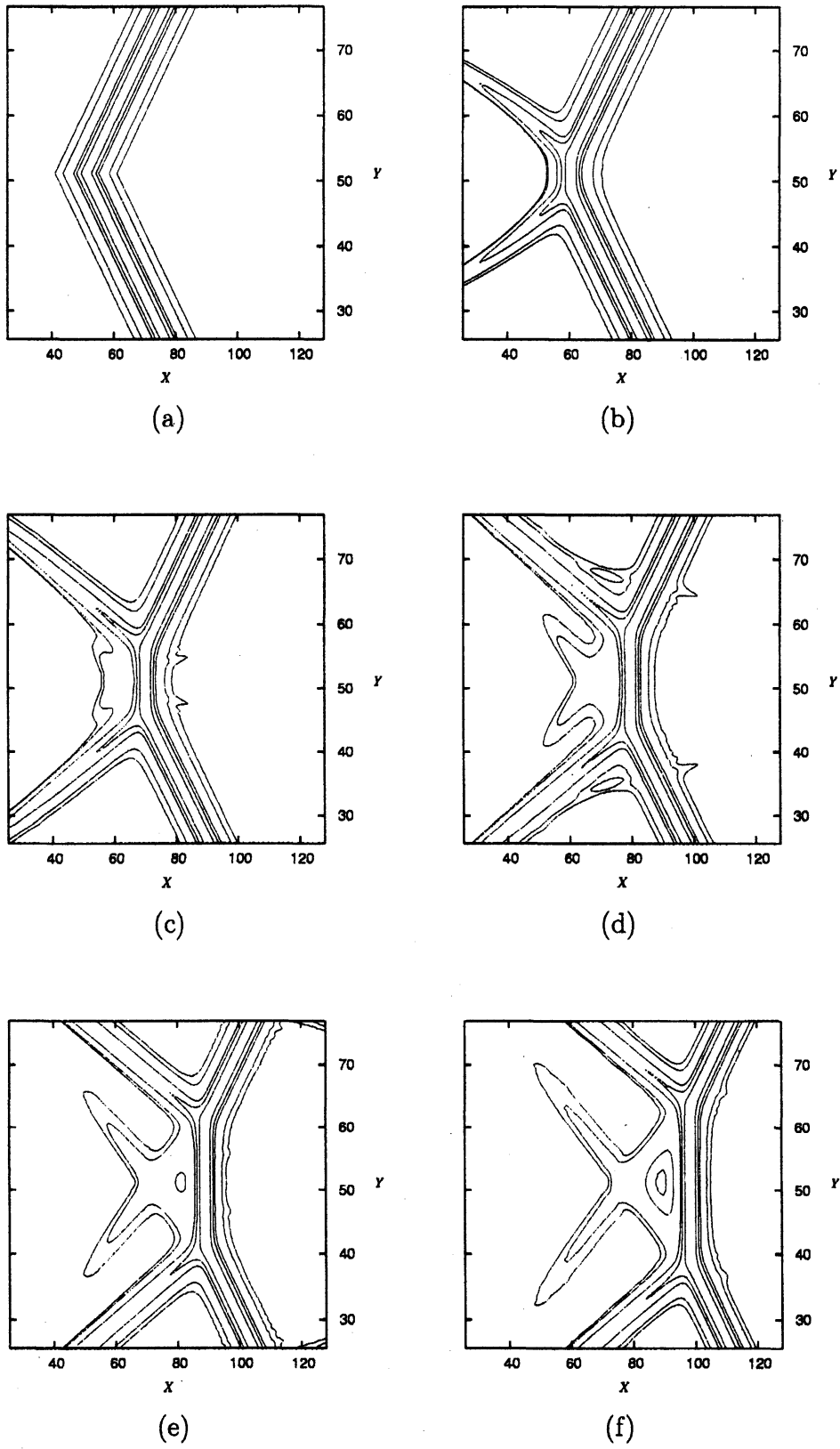


図 7: KP-BO 方程式の孤立波解の相互作用. $b = 1$, $\Omega = 1$. (a) $t = 0$, (b) $t = 2.5$, (c) $t = 5$, (d) $t = 7.5$, (e) $t = 10$, (f) $t = 12.5$.