

修士論文 (2008 年度)

Antibubbleの生成過程モデル¹

名古屋大学大学院理学研究科物質理学専攻(物理系) 松田 学

Abstract

石鹼水とストローでできる自然現象として、「シャボン玉」がある。シャボン玉は、子供の頃に誰でも一度は遊んだことがあるだろう。このシャボン玉はこれまで多くの研究者が興味を持ち、数多くの研究がなされている。

ところで、シャボン玉を作るために必要な石鹼水とストローを用いると、もうひとつ違った現象を見ることができる。それが、「Antibubble」である。Antibubbleとは、液面に衝突した液柱(jet)が、液面と一体化することなく液中に潜り込んで液滴に分裂する現象、およびその液滴のことであり、簡単に言えば「水の中のシャボン玉」である。このAntibubbleは石鹼水に限らず、油、スプレー液やさらにはコーヒー、ビールなど、我々のごく身近なもので見ることができる。

しかし、このAntibubbleは我々の身近で起こる現象にもかかわらず、その研究は最近まであまり行われていない。

本研究は、Antibubbleの生成過程をモデル化することを目的として行った。そして、剛体近似とjetの不安定性を用いた簡単なモデルでこの現象を表すことに成功した。

本研究で構築したモデルは次のようなものである。まず、生成の過程を二つの段階に分ける。そして、それぞれの段階において次のように考える。

- jetがある深さまで潜り込む間：剛体円柱と近似して「剛体の運動方程式」を解く。
- 潜り込んだ後くびれてAntibubbleとなる間：jetが不安定になってくびれるとして「jetの不安定性」の議論を行う。

最後に、その二つの段階を合わせ、Antibubbleの生成過程モデルとした。

この生成過程モデルを用いることで、Antibubbleの半径や生成時間など、Antibubbleの生成に関する様々なパラメータを導出することができた。

また、このモデルから導出された各パラメータの理論値と実験値を比較した結果、このモデルが線形近似の範囲で現象をよく表しており、モデルとして妥当であることが示された。

¹本稿は、名古屋大学大学院 理学研究科 物質理学専攻(物理系)に修士論文として提出した原稿を、本誌掲載のために改編したものである。カラー版については、以下をご覧ください。

<http://www.r.phys.nagoya-u.ac.jp/archive/matsuda-antibubble-feb2009.pdf>

目次

1	Introduction	305
2	Antibubble	306
2.1	現象	306
2.2	過去の研究	307
2.3	膜の厚さ	308
3	Antibubbleの生成過程モデル	312
3.1	Antibubbleの運動を支配する方程式	312
3.2	生成過程モデル	313
3.3	jetの安定性解析とAntibubbleの不安定波長	313
3.4	Antibubbleの半径と時定数	335
3.5	剛体近似とAntibubbleの生成時間	337
3.6	各パラメータの理論値	341
4	実験との比較と議論	347
4.1	理論値と実験値の比較	348
4.2	議論	352
5	まとめ	352
A	実験	354
B	記号	356

1 Introduction

石鹼水とストローでできる自然現象として、「シャボン玉」がある。子供のころ、誰でも一度はシャボン玉で遊んだ経験はあるだろう。厚さ数 μm の液膜をもち、空中をふわふわと漂うこの現象には、ギブズやニュートンをはじめ多くの研究者が興味を持ち、これまで数多くの研究がなされている。

ところで、シャボン玉と同じ材料と道具を使うと、もうひとつ違った現象を見ることができる。それが「Antibubble」である。Antibubbleは、液面に落とした液柱（以下、「jet」と呼ぶ）が一体化することなく、液中に潜り込み液滴に分裂する現象、およびその液滴のことであり、簡単に言えば「水の中にできるシャボン玉」である。このAntibubbleは石鹼水に限らず、スプレー液やコーヒー、あるいはビールなどでも見られ、さらには原子力発電施設で用いられる冷却水中でも起こりうる。冷却水の水量を調節する際、水中の泡の量でその量を調節する方法があるが、Antibubbleが生成されるとその調節が難しくなる。Antibubbleを研究はそういった意味で、意義のあるものであるといえる。

しかし、このAntibubbleはシャボン玉と同じ材料・道具でできる現象であるにもかかわらず、ごく最近まであまり研究されていない。生成要因や生成条件等未だ解明されていないことが多い現象なのである。

本研究は、Antibubbleの生成過程をモデル化することを目的として行った。その結果、jetの安定性解析と剛体近似を用いた簡単なモデルで、この現象を表すことに成功した。本論文では、構築されたAntibubbleの生成過程モデルについて述べていく。

第2章では、Antibubbleがどのような現象であるか、これまでどのような研究が行われてきたかを述べ、それらの研究の一つとして「Antibubbleの膜の厚さの導出」を紹介する。第3章では、本研究で構築したAntibubbleの生成過程モデルの概要を述べ、そのモデルで用いる「jetの安定性解析」と「剛体近似」について説明する。そして、第4章では、このモデルから導出されるパラメータと、実験から得られるパラメータとを比較し、このモデルの妥当性を議論する。

2 Antibubble

2.1 現象

流れや波などがない静かな水面に、水を滴下すると、水面表面で一瞬のうちに一体化する。しかし、石鹼水を用いると、液面表面に長時間存在する液滴を作ることができる。その存在時間（以下、「寿命」と呼ぶ。）は、純水に比べて数100倍も長くなり、さらにはその液滴の大きさが1cm以上のものも存在する[1]。液滴が液面上に長時間存在する現象には、これまで多くの研究者がその解明に取り組んでいる[2]。

さて、石鹼水のjet(液柱)を石鹼水の液面に滴下するとき、衝突速度が小さければjetは液滴となって液面表面に浮くが、その衝突速度が適切であれば、液面上に浮かずにそのまま液面中に潜り込むことがある【図1】²。このように、jetが潜り込んで液滴に分裂する現象、およびその潜り込んだ液滴のことを「Antibubble」と呼ぶ。

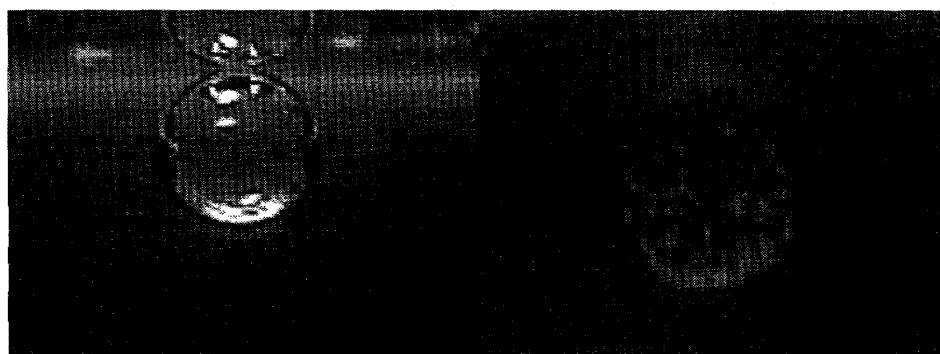


図1: Antibubble(左: Antibubble[直径約1cm] 右: 破裂直後)

このAntibubbleの形はほぼ球形であり、その寿命は石鹼水の場合で1~2分ほどである。沈んだAntibubbleがゆっくりと浮き上がってくることや、Antibubbleが割れると【図1(右)】のように小さな気泡がいくつもできることから、Antibubbleの膜は空気であることがわかる。

その形状や動きなどの性質がシャボン玉(bubble)と似ており、多くの点で類似性を持っていると考えられる【図2】。そのため、Antibubbleの膜は、シャボン玉の膜と同じように、界面活性剤の分子の層であると考えられている。

図3はAntibubbleが生成される過程をビデオカメラ(Victor・JVC GR-HD1)で撮影したものである。この図から、液面に落とされた石鹼水は液面中に潜った後(②)、くびれて(③)、Antibubble(④)

²いずれも著者が撮影しており、格子間隔は1cmである。

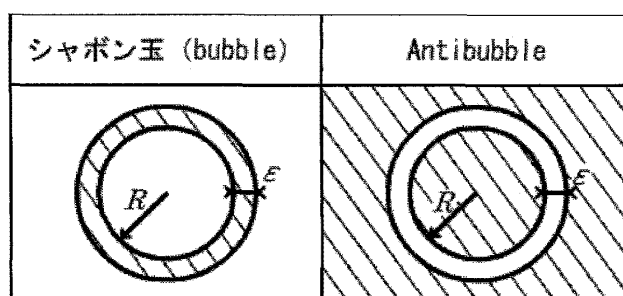


図 2: シャボン玉と Antibubble (斜線部は液体を表す。)

となっていることがわかる。これは円環に張ったシャボン膜を吹いてシャボン玉を作ったときの状況と似ている。

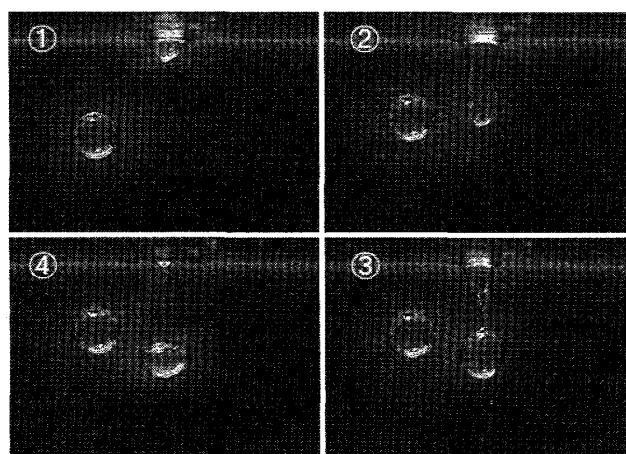


図 3: Antibubble が生成される過程

また、本研究で行った現象観察では液滴を落とす管の直径によって Antibubble の大きさが違うことがわかった。内径 0.6mm の管からできる Antibubble は直径が約 1mm であるのに対し、ストロー (内径 5mm) からできる Antibubble の直径は大きいもので約 1cm であった。これは内径の大きな管の方が、液滴を液面に潜り込ませるために必要なエネルギーをより多く広い範囲に与えることが可能なためであると考えられる。

2.2 過去の研究

この Antibubble は、1932 年に Huges らによって初めて報告され、1974 年に C.L.Stong によって命名された。しかし、それ以後、2000 年ごろまでほとんど研究されていなかった。

2003 年に S.Dorbolo らが、空気膜を保つ理由を明らかにし、寿命が 2 分ほどの安定な Antibubble を作ることに成功した [2]。彼らは 2005 年には、膜の厚さの理論的な導出に成功し、膜の空気の挙動を研究した [3]。

2006 年には P.G.Kim らが、Antibubble の安定性にかかわる要因を調査し、寿命が水中のミセルの量や圧力に依存し、Antibubble の半径には依存しないことを発見した [4]。2008 年には、より容易に Antibubble が生成できるような生成条件を導いている [5]。

他にも、液面よりも比重が大きな液体で Antibubble を作ると、浮上せずに下に沈んだり静止したりすることや、界面活性剤入りの液体だけでなくビールやコーヒーでも Antibubble を生成できることがわかっている [4]。

このように、最近になって Antibubble がどのような要因でできるのか、どのような条件だと生成しやすいのかということは明らかになってきた。しかし、膜がどのように形成されるのか、Antibubble がどのように生成されるのかについては、未だ明らかになっていない。さらに、実験についてはいくつかの研究があるが、理論的なものに関してはほとんどない。

次節では、過去の理論的な研究の一つとして、空気膜の厚さの導出を紹介する。

2.3 膜の厚さ

S.Dorbolo らは、Antibubble が生成された後の上昇速度がほぼ一定であることに注目し、それを浮力と抵抗のつりあいによるものと考えた。この節では、彼らの理論 [3] にしたがって、Antibubble の空気膜の厚さの導出を行う。

以下に、その流れを記す。

1. Navier-Stokes 方程式、連続の式を用いて、運動エネルギーの散逸を考える。
2. 速度ポテンシャルを導入して、エネルギー散逸の式を書き換え、その式から Antibubble にはたらく抵抗力を導出する。
3. 浮力を求め、それと抵抗とのつりあいから Antibubble の空気膜の厚さ ϵ を導出する。
4. 具体的な値を代入して理論値を求め、それと実験値を比較する。

エネルギー散逸

非圧縮、一様密度の流体で、渦なしの流れを仮定する。運動エネルギーの時間変化 $\partial E / \partial t$ は、

$$\frac{\partial E}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\int \frac{1}{2} \rho u_i^2 dV \right) = \int \left[\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \rho u_i^2 \right) \right] dV = \int \rho u_i \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} \right) \quad (1)$$

である (ρ は密度)。

また、非圧縮の連続の式は、

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = \frac{\partial u_k}{\partial x_k} = 0 \right) \quad (2)$$

となる。

外力がないとすると、Navier-Stokes 方程式は、

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k^2}$$

となり、これを変形すると、

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_i}{\partial t} &= -u_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k^2} \\ &= \frac{\partial}{\partial x_k} \left[-u_k u_i - \frac{p}{\rho} \delta_{ik} + \frac{\mu}{\rho} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right) \right] \end{aligned}$$

となる (μ は粘性係数、 p は圧力)。上の計算では、連続の式 [式 (2)] を用いた。

エネルギーの時間変化の式 [式 (1)] に代入すると、

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial E}{\partial t} &= \int u_i \frac{\partial}{\partial x_k} \left[-\rho u_k u_i - p \delta_{ik} + \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right) \right] dV \\
 &= \int u_k \frac{\partial}{\partial x_k} \left[-p - \frac{1}{2} \rho u_i^2 \right] dV + \int u_i \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right) \right] dV \\
 &= \int \frac{\partial}{\partial x_k} \left[-u_k \left(p + \frac{1}{2} \rho u_i^2 \right) + \mu u_i \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right) \right] dV \\
 &\quad - \int \left[\mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right) \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right] dV \\
 &= \oint \left[-u_k \left(p + \frac{1}{2} \rho u_i^2 \right) + \mu u_i \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right) \right] dS \\
 &\quad - \int \left[\mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right) \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right] dV \\
 &= - \int \left[\mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right) \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right] dV \\
 &= - \frac{1}{2} \mu \int \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right)^2 dV
 \end{aligned} \tag{3}$$

となる。上の計算では、連続の式 [式 (2)] と表面積分が 0 となることを用いた。

したがって、エネルギー散逸は次のようになる。

$$\begin{aligned}
 -\frac{\partial E}{\partial t} &= \frac{1}{2} \mu \int \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right)^2 dV \\
 &= -\mu \int (\nabla \times \mathbf{u})^2 dV + \mu \int \frac{\partial \mathbf{u}^2}{\partial n} dS \\
 &\quad - 2\mu \int \mathbf{u} \times (\nabla \times \mathbf{u}) dS
 \end{aligned} \tag{4}$$

今は渦なしの流れを考えているので、式 (4) の右辺第一項、第三項は 0 になる。したがって、エネルギー散逸は次のようになる。

$$-\frac{\partial E}{\partial t} = \frac{1}{2} \mu \int \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right)^2 dV = \mu \int \frac{\partial \mathbf{u}^2}{\partial n} dS \tag{5}$$

速度ポテンシャル

ここで Antibubble のレイノルズ数 $Re = 2\rho UR/\mu$ を考える (U は定常な浮上速度、 R は Antibubble の半径)。Kim らの実験 [4] では、20℃ の石鹼水の密度や粘性係数は同温の水の場合とほとんど変わらないとしているので、 $R = 1 \times 10^{-2} [\text{m}]$ 、 $\rho = 1 \times 10^3 [\text{kg/m}^3]$ 、 $\mu = 8.3 \times 10^{-3} [\text{kg/m} \cdot \text{s}]$ 、 $U = 1 \times 10^{-2} [\text{m/s}]$ とすると、 $Re \simeq 120$ となる。このとき、Antibubble は粘性流体中を流れる気泡と考えることができる。

半径 R の気泡の周りを流れる理想流体の速度を $\mathbf{u}_0$ 、その速度分布からのずれを $\mathbf{u}'$ とすると、速度分布は $\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + \mathbf{u}'$ となる。これは連続の式

$$\nabla \cdot \mathbf{u}_0 = 0$$

と境界条件 $u_0 \rightarrow U(r \rightarrow \infty)$ 、 $u_r^{(0)} = 0(r = R)$ を満たす。今、気泡周りの流れが渦なしとして、

$$u_0 = \nabla \varphi$$

として、この速度ポテンシャル φ を

$$\varphi = \left(\alpha r + \frac{\beta}{r^2} \right) \cos \theta$$

とおくと (α, β は定数)、 φ は Laplace の式 $\nabla^2 \varphi = 0$ を満たすので、

$$\begin{aligned} u_r^{(0)} &= \frac{\partial \varphi}{\partial r} = \left(\alpha - \frac{2\beta}{r^3} \right) \cos \theta \\ u_\theta^{(0)} &= \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = - \left(\alpha + \frac{\beta}{r^3} \right) \sin \theta \end{aligned}$$

となる。境界条件から α, β を求めて代入すると、次のようになる。

$$u_r^{(0)} = -U \left(1 - \frac{R^3}{r^3} \right) \cos \theta \quad (6)$$

$$u_\theta^{(0)} = U \left(1 + \frac{R^3}{2r^3} \right) \sin \theta \quad (7)$$

この速度分布が気泡表面の近く ($r \simeq R$) に存在しているとして、式 (6)(7) に摂動部

$$\xi = r - R \quad (\xi \ll R) \quad (8)$$

を代入すると

$$\begin{aligned} u_r^{(0)} &= -U \left(1 - \frac{R^3}{(R + \xi)^3} \right) \cos \theta \simeq -U \left[1 - \left(1 - 3\frac{\xi}{R} \right) \right] \cos \theta \\ &= -3U \frac{\xi}{R} \cos \theta \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} u_\theta^{(0)} &= U \left(1 + \frac{R^3}{2(R + \xi)^3} \right) \sin \theta \simeq U \left[1 + \frac{1}{2} \left(1 - 3\frac{\xi}{R} \right) \right] \sin \theta \\ &= \frac{3}{2} U \left(1 - \frac{\xi}{R} \right) \sin \theta \end{aligned} \quad (10)$$

となる。

Antibubble にかかる抵抗力

$u' \ll u_0$ より $u \simeq u_0$ として、式 (5) に式 (9)(10) を代入すると、

$$\begin{aligned} -\frac{d}{dt} E &= \mu \int \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(u_r^{(0)} \right)^2 + \frac{\partial}{\partial r} \left(u_\theta^{(0)} \right)^2 \right]_{r=R} 2\pi R \sin \theta R d\theta \\ &= \mu \int \left(2u_r^{(0)} \frac{\partial u_r^{(0)}}{\partial r} + 2u_\theta^{(0)} \frac{\partial u_\theta^{(0)}}{\partial r} \right)_{r=R} 2\pi R^2 \sin \theta d\theta \end{aligned}$$

となる。境界条件より $(u_r^{(0)})_{r=R} = 0$ であるから、上式に式 (8) を代入すると

$$\begin{aligned} -\frac{d}{dt}E &= \mu \cdot 4\pi R^2 \int \left(u_{\theta}^{(0)} \frac{\partial u_{\theta}^{(0)}}{\partial \xi} \right)_{\xi=0} \sin \theta d\theta \\ &= -9\pi\mu RU^2 \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta \\ &= -12\pi RU^2 \mu \end{aligned}$$

となる。したがって、液滴にはたらく抵抗 F は次のようになる [6]。

$$F = -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial U} \left(-\frac{dE}{dt} \right) = 12\pi RU\mu \quad (11)$$

Antibubble にかかる浮力

Antibubble に掛かる浮力は $B = \rho V g$ で表される。 g は重力定数である。このとき、膜の厚さを $\epsilon (\ll R)$ とすると、次のように近似できる。

$$\rho V g \simeq 4\pi R^2 \epsilon \rho g \quad (12)$$

ここで、 $R \gg \epsilon$ より $R + \epsilon \simeq R$ とした。

Antibubble の空気膜の厚さ

式 (11)(12) より、定常な速度 U で運動している Antibubble には

$$12\pi\mu RU = 4\pi R^2 \epsilon \rho g$$

という関係式が成り立つので、膜の厚さは

$$\epsilon = \frac{3\mu U}{R\rho g} \quad (13)$$

となる。

膜の理論値の導出と実験値との比較

Kim らの実験結果 [4] を用いると、液滴の密度 $\rho = 1 \times 10^3 [\text{kg}/\text{m}^3]$ 、粘性係数 $\mu = 8.3 \times 10^{-3} [\text{kg}/(\text{m} \cdot \text{s})]$ 、上昇速度 $U = 1 \times 10^{-2} [\text{m}/\text{s}]$ であるから 1ml の液滴では半径 $R = 6.2 \times 10^{-3} [\text{m}]$ となり、式 (13) より膜の厚さは $\epsilon = 0.41 \times 10^{-6} [\text{m}]$ となる。Kim らは測定誤差を含め、この方法で膜の厚さの平均値を $0.6 \pm 0.3 \times 10^{-6} [\text{m}]$ と見積もっている。

この理論値は液滴が破裂する厚さ ($0.2 \sim 0.3 \times 10^{-6} [\text{m}]$) に近い。しかし、多くの実験では膜の厚さは $\epsilon \simeq 1 \times 10^{-6} [\text{m}]$ となっており、実験値よりも理論値の方が小さな値となっている。これには、空気を非圧縮流体と仮定したことや界面活性剤分子の効果が影響していると考えられる。

3 Antibubbleの生成過程モデル

この章では、構築した生成過程モデルを提案する。まず、モデルの概要について述べた後、そのモデルに必要な「jet(液柱)の安定性解析」と「剛体近似」について述べる。なお、jetの安定性解析については、その基礎となる「Rayleighの線形安定性理論」と、粘性項や周りの流体の影響を考慮した「Tomotikaの線形安定性理論」、そして、本研究で用いる「Kinoshitaの線形安定性理論」の3つを説明する。最後に、モデルから導出されるものを具体的に計算する。

3.1 Antibubbleの運動を支配する方程式

まず、簡単のために次のことを仮定する。

1. 非圧縮、一様密度な流体である
2. 円柱座標系で速度分布は z 軸まわりに対称である。
3. 必ず空気膜はできる。つまり、Antibubbleが生成される場合を考える。
4. jetの底面は平面であり、底面での境界条件は考えないことにする。

この仮定の下で、Antibubbleの生成過程モデルを考える。

AntibubbleのNavier-Stokes方程式は

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \frac{\mu}{\rho} \nabla^2 \mathbf{u} + \mathbf{g} \quad (14)$$

となり、連続の式は

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (15)$$

となる。ここで、 $\mathbf{u}$ は内部流体の速度、 p は圧力、 $\mathbf{g}$ は重力項、 ρ は密度、 μ は粘性係数を表す。

落下方向は z 軸方向とする。境界条件は側面表面 $r = r_s(z, t)$ において

$$p(z) = p_\infty(z) + \gamma \nabla \cdot \mathbf{n} = \rho g z - \gamma \frac{\partial_z^2 r_s}{[1 + (\partial_z r_s)^2]^{\frac{3}{2}}} \quad (16)$$

となる。ここで、 γ は表面張力係数である。

また、表面にある粒子が表面に存在するための条件は

$$u_r = \frac{\partial r_s}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) r_s \quad (17)$$

となる。

さて、4つの仮定の下でAntibubbleの運動を支配する方程式をたてたが、このままでも解くことは困難である。したがって、より簡単なモデルを作る必要がある。

3.2 生成過程モデル

Antibubbleの生成過程を観察すると、jet（液柱）が落下してからある程度の深さまで沈み込む間（【図3】①～②）は剛体円柱が落下しているように、その後 Antibubble が生成されるまでの間（【図3】②～④）はその jet が不安定になってくびれているように見えた。

そこで、Antibubbleの生成過程を【図4】のように簡単なモデルで考えることにする。

すなわち、Antibubbleを二つの過程に分け、【図4】において、

- ①～③：剛体円柱として、「剛体の運動方程式」を解く
- ③～⑥：jet が不安定になってくびれるとして、「jet の安定性解析」を行う

として、この二つを合わせたものを Antibubble の生成過程のモデルとする。

この生成過程モデルを用いると、jet の半径と液面から jet 底面までの初期の高さから、生成される Antibubble の最大半径と生成時間が導出される。それらも含めたいくつかの Antibubble のパラメータは、次のように導出される。

1. jet の安定性解析から、jet が最も不安定になる波長 $\lambda_{\max}$ 、時定数（③～⑥の時間） τ 、Antibubble の最大半径 r_{AB} 、および Antibubble 生成に必要な jet の量（高さ） l を導出する（第3.3節、第3.4節）。
2. 1の結果を、剛体に近似した jet の運動方程式に入れることで、jet が液面に達するまで（①～②）の時間 t_h 、および jet が液面表面からある深さ $z = s$ まで潜り込むのに要する時間（②～③の時間） t_s を考える（第3.5節）。そして、最後に Antibubble が生成されるまでの時間 T を導出する。
3. 1、2の結果と実験を比較し、線形近似の範囲でこのモデルの妥当性を考察する（第4章）。

また、【図4】は一個の Antibubble が生成される場合のモデルであるが、初期条件を変えることで Antibubble が複数個生成される場合にも適応可能である。

3.3 jet の安定性解析と Antibubble の不安定波長

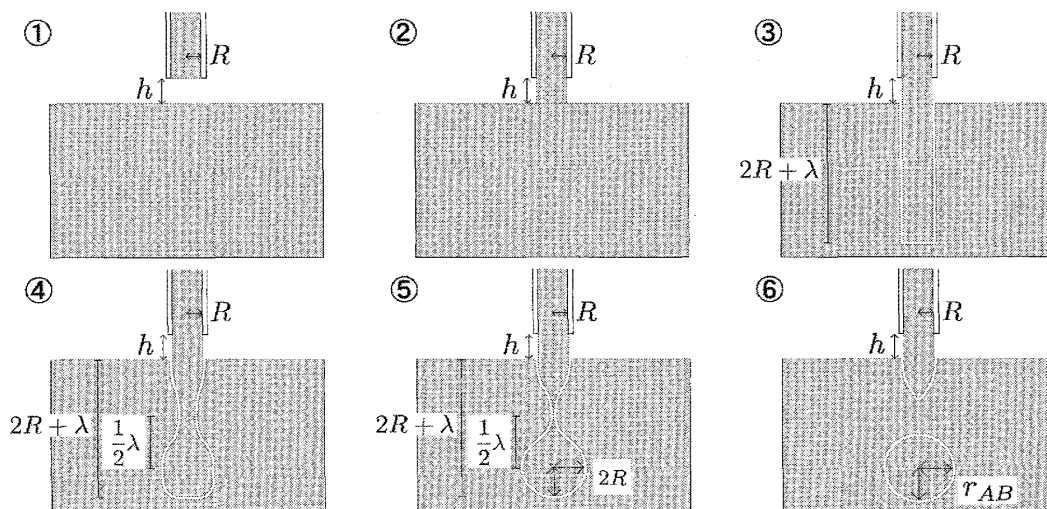


図4: Antibubbleの生成過程モデル（一個だけ生成される場合）

蛇口から水道水を流すと、蛇口付近では jet は円柱形であるが、下にいくほどその表面がくびれていき、さらに下の方では水滴になってしまう【図 5】。これは、落下速度が徐々に速くなることが主な原因となっているわけではない。jet が定常流であったとしても、不安定になってしまうのである。

この節では、その jet の安定性について、次のような順序で述べていく。

- Rayleigh はその jet を非圧縮・非粘性の液柱ととらえ、その安定性を議論した。第 3.3 項では、jet の安定性理論の基礎となる、「Rayleigh の線形安定性理論」を紹介する。
- 第 3.3 項では、重力と粘性を考慮して、第 3.3 項と同様の過程で jet の安定性を考える。その際、「Tomotika の線形安定性理論」に帰着できることがわかる。
- 最後に、第 3.3 項で、より実際の現象にあった「Kinoshita の線形安定性理論」について説明し、この理論を用いて jet の不安定が最大となる波長および時定数を導出する。

なお、この jet の安定性の議論は生成過程モデル【図 4】の③～⑥に対応している。

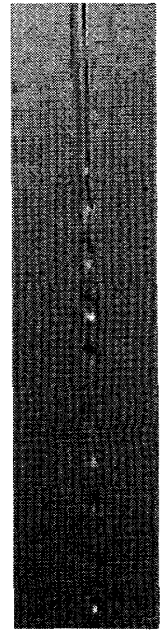


図 5: jet の分裂

3.3.1 Rayleigh の線形安定性理論

非粘性流体で外力がなく、jet 周りの流体の影響がない場合を考える。そのときの jet の Euler 方程式は

$$\rho \left[\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right] = -\nabla p$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p$$

となる。円柱座標 (落下方向は z 軸方向)、 z 軸まわり対称とすると、 $\mathbf{u} = (u_r, u_\theta, u_z) = (u, 0, w)$ となり、Euler 方程式はそれぞれ、

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial r} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} \quad (18)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial r} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} \quad (19)$$

となる。

連続の式 $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ を円柱座標で書くと、

$$\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

となる。ここで、流れの関数 $\psi(r, z)$ を導入し、

$$u = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad w = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \quad (20)$$

とすると、上式を満たす。

式 (20) を式 (18)(19) に代入する。

<式(18)>

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{\rho}\partial_r p &= \frac{1}{r}\partial_t\partial_z\psi + \left(\frac{1}{r}\partial_z\psi\right)\partial_r\left(\frac{1}{r}\partial_z\psi\right) - \left(\frac{1}{r}\partial_r\psi\right)\partial_z\left(\frac{1}{r}\partial_z\psi\right) \\
&= \frac{1}{r}\left[\partial_t\partial_z\psi - \frac{1}{r^2}(\partial_z\psi)^2 + \frac{1}{r}(\partial_z\psi)(\partial_r\partial_z\psi) - \frac{1}{r}(\partial_r\psi)(\partial_z^2\psi)\right]
\end{aligned}$$

両辺に $r\partial_z$ を作用させると、次のようになる。

$$-\frac{r}{\rho}\partial_z\partial_r p = \partial_t\partial_z^2\psi + \frac{1}{r}\left[(\partial_r\psi)(\partial_r\partial_z\psi) - (\partial_r\psi)(\partial_r^2\psi)\right] - \frac{2}{r^2}(\partial_z\psi)(\partial_z^2\psi) \quad (21)$$

<式(19)>

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{\rho}\partial_z p &= -\frac{1}{r}\partial_t\partial_r\psi + \left(\frac{1}{r}\partial_z\psi\right)\partial_r\left(-\frac{1}{r}\partial_r\psi\right) - \left(\frac{1}{r}\partial_r\psi\right)\partial_z\left(-\frac{1}{r}\partial_r\psi\right) \\
&= \frac{1}{r}\left[-\partial_t\partial_r\psi + \frac{1}{r^2}(\partial_z\psi)(\partial_r\psi) + \frac{1}{r}(\partial_r\psi)(\partial_r\partial_z\psi) - \frac{1}{r}(\partial_z\psi)(\partial_r^2\psi)\right]
\end{aligned}$$

両辺に ∂_r を作用させると、

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{\rho}\partial_z\partial_r p &= -\frac{1}{r}\partial_t\partial_r^2\psi + \frac{1}{r^2}\left[\partial_t\partial_r\psi + (\partial_r\psi)(\partial_r^2\partial_z\psi) - (\partial_z\psi)(\partial_r^3\psi)\right] \\
&\quad + \frac{1}{r^3}\left[3(\partial_z\psi)(\partial_r^2\psi) - (\partial_r\psi)(\partial_r\partial_z\psi)\right] - \frac{3}{r^4}(\partial_r\psi)(\partial_z\psi)
\end{aligned}$$

となる。さらに、両辺に r を作用させると、次のようになる。

$$\begin{aligned}
-\frac{r}{\rho}\partial_z\partial_r p &= -\partial_t\partial_r^2\psi + \frac{1}{r}\left[\partial_t\partial_r\psi + (\partial_r\psi)(\partial_r^2\partial_z\psi) - (\partial_z\psi)(\partial_r^3\psi)\right] \\
&\quad + \frac{1}{r^2}\left[3(\partial_z\psi)(\partial_r^2\psi) - (\partial_r\psi)(\partial_r\partial_z\psi)\right] - \frac{3}{r^3}(\partial_r\psi)(\partial_z\psi)
\end{aligned} \quad (22)$$

式(21)、式(22)から左辺を消すと

$$\begin{aligned}
0 &= \partial_t(\partial_r^2\psi + \partial_z^2\psi) \\
&\quad + \frac{1}{r}\left[-\partial_t\partial_r\psi + (\partial_z\psi)(\partial_r\partial_z^2\psi + \partial_r^3\psi) - (\partial_r\psi)(\partial_z^3\psi + \partial_r^2\partial_z\psi)\right] \\
&\quad + \frac{1}{r^2}\left[(\partial_r\psi)(\partial_z\partial_r\psi) - (\partial_z\psi)(2\partial_z^2\psi + 3\partial_r^2\psi)\right] + \frac{3}{r^3}(\partial_z\psi)(\partial_r\psi)
\end{aligned}$$

となり、これを整理すると

$$\begin{aligned}
\left[\partial_t + \frac{1}{r}(\partial_z\psi)\partial_r - \frac{1}{r}(\partial_r\psi)\partial_z - \frac{2}{r^2}(\partial_z\psi)\right]D\psi &= 0 \\
\left(D \equiv r\partial_r\left(\frac{1}{r}\partial_r\right) + \partial_z^2\right)
\end{aligned}$$

となる。Stokes 近似より、

$$\partial_t D\psi = 0 \quad (23)$$

となるので、 ψ について次の二つの方程式が得られる。

$$\partial_t \psi = 0 \quad (24)$$

$$D\psi = 0 \quad (25)$$

式 (24) のとき、jet は $\mathbf{u} = \mathbf{U} = \text{const}$ の定常流となるので、今の場合は不適。したがって、式 (25) だけを考えればよい。

式 (25) に $\psi = \phi_1 e^{i(nt+kz)}$ を代入すると、

$$r \partial_r \left[\frac{1}{r} \partial_r \left(\phi_1 e^{i(nt+kz)} \right) \right] + \partial_z^2 \left(\phi_1 e^{i(nt+kz)} \right) = \left[r \partial_r \left(\frac{1}{r} \partial_r \phi_1 \right) - k^2 \phi_1 \right] e^{i(nt+kz)} = 0$$

$$\Rightarrow \partial_r^2 \phi_1 - \frac{1}{r} \partial_r \phi_1 - k^2 \phi_1 = 0$$

と整理される。これは Bessel 方程式より、 $r = 0$ で有限な解は

$$\phi_1 = Ar I_1(kr)$$

と書ける。ここで、 $I_1(kr)$ は修正された 1 次の第 1 種 Bessel 関数であり、

$$I_1(kr) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(kr)^{2m+1}}{2^{2m+1} m! (m+1)!}$$

である。

したがって、 ψ は次のようになる。

$$\psi = Ar I_1(kr) e^{i(nt+kz)} \quad (26)$$

任意の瞬間における境界の方程式を $r_s = R + \xi$ とおく。ここで、摂動部 ξ は、

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = u|_{r=R} = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z} \Big|_{r=R} = ik I_1(kR) A e^{i(nt+kz)}$$

と定義されるため、

$$\xi = \frac{k}{n} A I_1(kR) e^{i(nt+kz)}$$

となる。

この摂動を加えた境界で平衡状態が成り立つ、すなわち Laplace の式が成り立つとして、次の式を考える。

$$p - \hat{p} = \gamma \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \quad (27)$$

なお、 $\hat{}$ 付きは外部の流体の変数を表している。

<式 (27) 右辺>

原点中心の円から少しずれた曲線の曲率 $1/R_1$ は

$$\frac{1}{R_1} = \frac{1}{R + \xi} \simeq \frac{1}{R} - \frac{1}{R^2} \xi$$

となる。ここで $\xi \ll R$ を用いた。

また、それと鉛直な断面の曲率 $1/R_2$ は

$$\frac{1}{R_2} = -\nabla \cdot \mathbf{n} = -\frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2}$$

となる。

よって、

$$\begin{aligned} \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} &= \frac{1}{R} - \frac{1}{R^2} \xi - \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} \\ &= \frac{1}{R} - \frac{k}{nR^2} AI_1(kR) e^{i(nt+kz)} + \frac{k^3}{n} AI_1(kR) e^{i(nt+kz)} \\ &= \frac{1}{R} + \frac{k}{nR^2} (k^2 R^2 - 1) AI_1(kR) e^{i(nt+kz)} \end{aligned} \quad (28)$$

<式 (27) 左辺>

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} \Big|_{r=R} &= \left[-\frac{\partial w}{\partial t} - u \frac{\partial w}{\partial r} - w \frac{\partial w}{\partial z} \right]_{r=R} \simeq -\frac{\partial w}{\partial t} \Big|_{r=R} \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right)_{r=R} = i \frac{n}{R} A (I_1(kR) + kR I_1'(kR)) e^{i(nt+kz)} \end{aligned} \quad (29)$$

ここで、 $I_1'(x) = \partial_x I_1(x)$ である。

両辺 z で積分すれば、

$$p = \frac{n\rho}{kr} \frac{\partial \psi}{\partial r} \Big|_{r=R} = \frac{n\rho}{kR} A (I_1(kR) + kR I_1'(kR)) e^{i(nt+kz)} + c_1 \quad (30)$$

となる。また、 $\hat{p}$ は定数 c_2 とする。

以上より、Laplace の式 [式 (27)] は次のようになる。

$$\begin{aligned} \frac{n\rho}{kR} A (I_1(kR) + kR I_1'(kR)) e^{i(nt+kz)} + c_1 - c_2 \\ = \frac{\gamma}{R} + \frac{\gamma k}{nR^2} (k^2 R^2 - 1) AI_1(kR) e^{i(nt+kz)} \end{aligned}$$

$c_1 - c_2 = \gamma/R$ とおけば、

$$\frac{n\rho}{kR} A (I_1(kR) + kR I_1'(kR)) e^{i(nt+kz)} = \frac{\gamma k}{nR^2} (k^2 R^2 - 1) AI_1(kR) e^{i(nt+kz)} \quad (31)$$

となり、これを n^2 について整理すると、

$$\begin{aligned} n^2 &= (kR)^2 (k^2 R^2 - 1) \frac{I_1(kR)}{I_1(kR) + kR I_1'(kR)} \frac{\gamma}{\rho R^3} \\ &= (kR) (k^2 R^2 - 1) \frac{I_0'(kR)}{I_0(kR)} \frac{\gamma}{\rho R^3} \end{aligned} \quad (32)$$

となる。ここで、 $I_0(kR)$ は修正された 0 次の第 1 種 Bessel 関数

$$I_0(kR) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(kR)^{2m}}{2^{2m} (m!)^2}$$

であり、 $I_0'(kr) = I_1(kr)$ と $kr I_0(kr) = I_1(kr) + kr I_1'(kr)$ を用いた。

式 (32) より $kR < 1$ ならば $n^2 < 0$ となるので、平衡状態は不安定になる。これはつまり、平衡状態は jet の周囲の長さを越える波長 $\frac{2\pi}{k}$ の攪乱に対して不安定になることを意味している。不安定が最大になるときの kR は

$$\frac{kR I_0'(kR)}{I_0(kR)} (1 - k^2 R^2)$$

を最大にする kR である。

Rayleigh はこれに対して $k^2 R^2 = 0.4858$ を見出している [7]。したがって、最大不安定の波長 $\lambda_{\max}$ は

$$\lambda_{\max} = \frac{2\pi}{k} = 4.508 \times 2R$$

となる。

3.3.2 Antibubble 生成時の jet の安定性解析と Tomotika の線形安定性理論

前項の Rayleigh による jet の安定性解析は、非粘性で周りの流体の影響を受けず、重力項がない流体に関する安定性解析である。Antibubble の場合は、粘性の影響、周りの流体の影響、そして重力の影響を考慮する必要がある。この項では、それらの影響を考慮して、Antibubble 生成時の jet の安定性解析を行う。

Antibubble 生成時の jet の安定性解析

Antibubble 生成時の jet の Navier-Stokes 方程式は

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \frac{\mu}{\rho} \nabla^2 \mathbf{u} + \mathbf{g}$$

となる。 $\mathbf{u}$ は速度、 ρ は液体の密度、 p は圧力、 μ は粘性係数、 $\mathbf{g}$ は重力項を示す。

円柱座標で、jet の速度分布が z 軸まわり対称であるとする、 $\mathbf{u} = (u_r, u_\theta, u_z) = (u, 0, w)$ となり、Navier-Stokes 方程式の成分表示は次の二つの式になる。

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial r} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \quad (33)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial r} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) + g \quad (34)$$

連続の式 $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ を円柱座標で書くと、

$$\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

となる。ここで、流れの関数 $\psi(r, z)$ を導入して

$$u = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z}, w = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \quad (35)$$

とすると、上式を満たす。

式 (35) を式 (33)(34) に代入する。

<式 (33)>

$$\begin{aligned} & \frac{1}{r} \partial_t \partial_z \psi + \left(\frac{1}{r} \partial_z \psi \right) \partial_r \left(\frac{1}{r} \partial_z \psi \right) - \left(\frac{1}{r} \partial_r \psi \right) \partial_z \left(\frac{1}{r} \partial_z \psi \right) \\ &= -\frac{1}{\rho} \partial_r p + \nu \left[\partial_r^2 \left(\frac{1}{r} \partial_z \psi \right) + \frac{1}{r} \partial_r \left(\frac{1}{r} \partial_z \psi \right) + \partial_z^2 \left(\frac{1}{r} \partial_z \psi \right) \right] \\ & \frac{1}{r} \left[\partial_t \partial_z \psi - \frac{1}{r^2} (\partial_z \psi)^2 + \frac{1}{r} (\partial_z \psi) (\partial_r \partial_z \psi) - \frac{1}{r} (\partial_r \psi) (\partial_z^2 \psi) \right] \\ &= -\frac{1}{\rho} \partial_r p + \nu \left[\frac{1}{r} (\partial_r^2 \partial_z \psi + \partial_z^3 \psi) - \frac{1}{r^2} \partial_r \partial_z \psi \right] \end{aligned}$$

両辺に $r \partial_z$ を作用させると、次のようになる。

$$\begin{aligned} & \partial_t \partial_z^2 \psi + \frac{1}{r} [(\partial_r \psi) (\partial_r \partial_z \psi) - (\partial_r \psi) (\partial_r^2 \psi)] - \frac{2}{r^2} (\partial_z \psi) (\partial_z^2 \psi) \\ &= -\frac{r}{\rho} \partial_r \partial_z p + \nu \left[(\partial_r^2 \partial_z^2 \psi + \partial_z^4 \psi) - \frac{1}{r} \partial_r \partial_z^2 \psi \right] \quad (36) \end{aligned}$$

<式 (34)>

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{r} \partial_t \partial_r \psi + \left(\frac{1}{r} \partial_z \psi \right) \partial_r \left(-\frac{1}{r} \partial_r \psi \right) - \left(\frac{1}{r} \partial_r \psi \right) \partial_z \left(-\frac{1}{r} \partial_r \psi \right) \\ &= -\frac{1}{\rho} \partial_z p + \nu \left[\partial_r^2 \left(-\frac{1}{r} \partial_r \psi \right) + \frac{1}{r} \partial_r \left(-\frac{1}{r} \partial_r \psi \right) + \partial_z^2 \left(-\frac{1}{r} \partial_r \psi \right) \right] + g \\ & \frac{1}{r} \left[-\partial_t \partial_r \psi + \frac{1}{r^2} (\partial_z \psi) (\partial_r \psi) + \frac{1}{r} (\partial_r \psi) (\partial_r \partial_z \psi) - \frac{1}{r} (\partial_z \psi) (\partial_r^2 \psi) \right] \\ &= -\frac{1}{\rho} \partial_z p + \nu \left[-\frac{1}{r} (\partial_r^3 \psi + \psi \partial_r \partial_z^2 \psi) + \frac{1}{r^2} \partial_r^2 \psi - \frac{1}{r^3} \partial_r \psi \right] + g \end{aligned}$$

両辺に ∂_r を作用させると、

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{r} \partial_t \partial_r^2 \psi + \frac{1}{r^2} [\partial_t \partial_r \psi + (\partial_r \psi) (\partial_r^2 \partial_z \psi) - (\partial_z \psi) (\partial_r^3 \psi)] \\ &+ \frac{1}{r^3} [3 (\partial_z \psi) (\partial_r^2 \psi) - (\partial_r \psi) (\partial_r \partial_z \psi)] - \frac{3}{r^4} (\partial_r \psi) (\partial_z \psi) \\ &= -\frac{1}{\rho} \partial_r \partial_z p + \nu \left[-\frac{1}{r} (\partial_r^4 \psi + \partial_r^2 \partial_z^2 \psi) + \frac{1}{r^2} (2 \partial_r^3 \psi + \partial_r \partial_z^2 \psi) - \frac{3}{r^3} \partial_r^2 \psi + \frac{3}{r^4} \partial_r \psi \right] \end{aligned}$$

となる。さらに、両辺に r を作用させると、次のようになる。

$$\begin{aligned}
 & -\partial_t \partial_r^2 \psi + \frac{1}{r} [\partial_t \partial_r \psi + (\partial_r \psi) (\partial_r^2 \partial_z \psi) - (\partial_z \psi) (\partial_r^3 \psi)] \\
 & + \frac{1}{r^2} [3 (\partial_z \psi) (\partial_r^2 \psi) - (\partial_r \psi) (\partial_r \partial_z \psi)] - \frac{3}{r^3} (\partial_r \psi) (\partial_z \psi) \\
 & = -\frac{r}{\rho} \partial_r \partial_z p + \nu \left[-(\partial_r^4 \psi + \partial_r^2 \partial_z^2 \psi) + \frac{1}{r} (2\partial_r^3 \psi + \partial_r \partial_z^2 \psi) - \frac{3}{r^2} \partial_r^2 \psi + \frac{3}{r^3} \partial_r \psi \right] \quad (37)
 \end{aligned}$$

式 (36)、式 (37) から左辺を消すと

$$\begin{aligned}
 & \partial_t (\partial_r^2 \psi + \partial_z^2 \psi) + \frac{1}{r} [-\partial_t \partial_r \psi + (\partial_z \psi) (\partial_r \partial_z^2 \psi + \partial_r^3 \psi) - (\partial_r \psi) (\partial_z^3 \psi + \partial_r^2 \partial_z \psi)] \\
 & + \frac{1}{r^2} [(\partial_r \psi) (\partial_z \partial_r \psi) - (\partial_z \psi) (2\partial_z^2 \psi + 3\partial_r^2 \psi)] + \frac{3}{r^3} (\partial_z \psi) (\partial_r \psi) \\
 & = \nu \left[(\partial_r^4 \psi + 2\partial_r^2 \partial_z^2 \psi + \partial_z^4 \psi) \frac{1}{r} (2\partial_r^3 \psi - 2\partial_r \partial_z^2 \psi) - \frac{3}{r^3} \partial_r \psi \right]
 \end{aligned}$$

となり、整理すると次のようになる。

$$\begin{aligned}
 & \left[\partial_t + \frac{1}{r} (\partial_z \psi) \partial_r - \frac{1}{r} (\partial_r \psi) \partial_z - \frac{2}{r^2} (\partial_z \psi) \right] D\psi = \nu D D \psi \\
 & \left(D \equiv r \partial_r \left(\frac{1}{r} \partial_r \right) + \partial_z^2 \right)
 \end{aligned}$$

Stokes 近似を用いると、

$$\partial_t D\psi \simeq \nu D D \psi$$

と書けるので、整理すると、

$$\left(D - \frac{1}{\nu} \partial_t \right) D\psi = 0 \quad (38)$$

となる。それぞれ可換より

$$\begin{aligned}
 D\psi_1 &= 0 \\
 \left(D - \frac{1}{\nu} \partial_t \right) \psi_2 &= 0
 \end{aligned}$$

となる。ここで $\psi_1 = \phi_1 e^{i(nt+kz)}$ 、 $\psi_2 = \phi_2 e^{i(nt+kz)}$ として代入すると

$$\begin{aligned}
 & \frac{d^2 \phi_1}{dr^2} - \frac{1}{r} \frac{d\phi_1}{dr} - k^2 \phi_1 = 0 \\
 & \frac{d^2 \phi_2}{dr^2} - \frac{1}{r} \frac{d\phi_2}{dr} - \left(k^2 + \frac{in}{\nu} \right) \phi_2 = \frac{d^2 \phi_2}{dr^2} - \frac{1}{r} \frac{d\phi_2}{dr} - k_1^2 \phi_2 = 0
 \end{aligned}$$

となる。

この二つの式は両方とも Bessel 方程式の形をしている。式 (38) から、流れの関数 ψ は次のようになる。

$$\begin{aligned}
 \psi &= \psi_1 + \psi_2 \\
 &= [A_1 r I_1(kr) + B_1 r K_1(kr) + A_2 r I_1(k_1 r) + B_2 r K_1(k_1 r)] e^{i(nt+kz)}
 \end{aligned}$$

ここで、 $I_1(kr)$ 、 $K_1(kr)$ はそれぞれ修正された 1 次の第 1 種、第 2 種 Bessel 関数

$$I_1(kr) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(kr)^{2m+1}}{2^{2m+1} m! (m+1)!}$$

$$K_1(kr) = \frac{2}{\pi} \left[I_1(kr) \left(\ln \frac{kr}{2} + \kappa \right) - \frac{1}{2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{h_m + h_{m+1}}{2^{2m+1} m! (m+1)!} (kr)^{2m+1} + \frac{1}{kr} \right]$$

$$h_m = \begin{cases} 0 & [m = 0 \text{ のとき}] \\ 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{s} & [m = s \neq 0 \text{ のとき}] \end{cases}$$

$$\kappa = 0.5772 \cdots \quad [\text{Euler の定数}]$$

である。

この Antibubble 生成時の jet の安定性解析において重力の効果を検討したが、結果的に重力の効果がない線形安定性解析に帰着することができた。この線形安定性解析は Tomotika の線形安定性理論と一致している [8]。したがって、ここからは Tomotika の理論に従い、jet の安定性を議論する。

Tomotika の線形安定性理論

jet 内部と jet 周りの液体について考える。jet 内部では中心 ($r = 0$) で非有界な解 K_1 を持つことは不適当であり、jet 周りでは無限遠 ($r = \infty$) で非有界な解 I_1 を持つことは不適当である。したがって、jet 内部の流れ関数を ψ 、jet 周りの液体の流れ関数を $\hat{\psi}$ とすると、

$$\psi = [A_1 r I_1(kr) + A_2 r I_1(k_1 r)] e^{i(nt+kz)}$$

$$\hat{\psi} = [B_1 r K_1(kr) + B_2 r K_1(k_1 r)] e^{i(nt+kz)}$$

$$k_1^2 = k^2 + \frac{in}{\nu}$$

とおくことができる。なお、以後 $\hat{\quad}$ 付きは jet 周りの流体の変数を表すことにする。

次に、下記の 4 つの境界条件

1. jet 境界で u は連続
2. jet 境界で w は連続
3. jet 境界で接線応力は連続
4. Laplace の式 [式 (27)]

を考え、係数 A_1 、 A_2 、 B_1 、 B_2 に関する 4 つの方程式を導出する。

<境界条件 1>

jet 境界で u は連続より

$$u|_{r=R} = \hat{u}|_{r=R}$$

である。左辺は

$$\begin{aligned} u|_{r=R} &= \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z} \Big|_{r=R} \\ &= \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial z} (r A_1 I_1(kr) + r A_2 I_1(k_1 r)) e^{i(nt+kz)} \right]_{r=R} \\ &= ik (A_1 I_1(kR) + A_2 I_1(k_1 R)) e^{i(nt+kz)} \end{aligned}$$

となる。右辺も同様に

$$\begin{aligned} \hat{u}|_{r=R} &= \frac{1}{r} \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial z} \Big|_{r=R} \\ &= ik (B_1 K_1(kR) + B_2 K_1(k_1 R)) e^{i(nt+kz)} \end{aligned}$$

となる。したがって、次のようになる。

$$A_1 I_1(kR) + A_2 I_1(k_1 R) = B_1 K_1(kR) + B_2 K_1(k_1 R) \quad (39)$$

<境界条件 2>

jet 境界で w は連続より

$$w|_{r=R} = \hat{w}|_{r=R}$$

である。左辺は

$$\begin{aligned} w|_{r=R} &= - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \Big|_{r=R} \\ &= - \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_1 I_1(kr) + r A_2 I_1(k_1 r)) e^{i(nt+kz)} \right]_{r=R} \\ &= - \frac{1}{R} [A_1 k R I_0(kR) + A_2 k_1 R I_0(k_1 R)] e^{i(nt+kz)} \end{aligned}$$

となる。右辺も同様に

$$\begin{aligned} \hat{w}|_{r=R} &= - \frac{1}{r} \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial r} \Big|_{r=R} \\ &= - \frac{1}{R} [B_1 k R K_0(kR) + B_2 k_1 R K_0(k_1 R)] e^{i(nt+kz)} \end{aligned}$$

となる。ここで、 $I_0(kr)$ 、 $K_0(kr)$ はそれぞれ修正された 0 次の第 1 種、第 2 種 Bessel 関数

$$\begin{aligned} I_0(kr) &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(kr)^{2m}}{2^{2m} (m!)^2} \\ K_0(kr) &= \frac{2}{\pi} \left[I_0(kr) \left(\ln \frac{kr}{2} + \kappa \right) - \sum_{m=0}^{\infty} \frac{h_m}{2^{2m} (m!)^2} (kr)^{2m} \right] \end{aligned}$$

であり、 $I_1(kR) + k R I_1'(kR) = k R I_0(kR)$ 、 $K_1(kR) + k R K_1'(kR) = k R K_0(kR)$ を用いた。
したがって、次のようになる。

$$A_1 k R I_0(kR) + A_2 k_1 R I_0(k_1 R) = B_1 k R K_0(kR) + B_2 k_1 R K_0(k_1 R) \quad (40)$$

＜境界条件 3＞

接線応力は $\mu(\partial_r w + \partial_z u)$ と書ける。これに流れの関数 ψ を代入すると、境界条件は次のように書くことができる。

$$\mu \left(\partial_r^2 \psi - \frac{1}{r} \partial_r \psi - \partial_z^2 \psi \right)_{r=R} = \mu \left(\partial_r^2 \hat{\psi} - \frac{1}{r} \partial_r \hat{\psi} - \partial_z^2 \hat{\psi} \right)_{r=R}$$

$\psi = r(A_1 I_1(kr) + A_2 I_1(k'r))e^{i(nt+kz)} \equiv r(\phi_{a1} + \phi_{a2})e^{i(nt+kz)}$ を用いて、左辺を変形すると、

$$\begin{aligned} & \mu \left(\partial_r^2 \phi_{a1} - \frac{1}{r} \partial_r \phi_{a1} - \partial_z^2 \phi_{a1} \right)_{r=R} + \mu \left(\partial_r^2 \phi_{a2} - \frac{1}{r} \partial_r \phi_{a2} - \partial_z^2 \phi_{a2} \right)_{r=R} \\ &= \left(-2\mu \partial_z^2 \phi_{a1} + \mu \frac{1}{\nu} \partial_t \phi_{a2} \right)_{r=R} \\ &= 2\mu k^2 \phi_{a1} + \mu \frac{in}{\nu} \phi_{a2} \end{aligned}$$

となる。 $k_1^2 = k^2 + in/\nu$ より、

$$\mu \left(\partial_r^2 - \frac{1}{r} \partial_r \psi - \partial_z^2 \psi \right)_{r=R} = \mu [2k^2 A_1 R I_1(kR) + (k^2 + k_1^2) A_2 R I_1(k_1 R)]$$

と書ける。右辺も同様にすると

$$\mu \left(\partial_r^2 - \frac{1}{r} \partial_r \hat{\psi} - \partial_z^2 \hat{\psi} \right)_{r=R} = \mu [2k^2 B_1 R K_1(kR) + (k^2 + k_1^2) B_2 R K_1(k_1 R)]$$

と書ける。

したがって、次のようになる。

$$\begin{aligned} & 2k^2 A_1 R I_1(kR) + (k^2 + k_1^2) A_2 R I_1(k_1 R) \\ &= 2k^2 B_1 R K_1(kR) + (k^2 + k_1^2) B_2 R K_1(k_1 R) \end{aligned} \quad (41)$$

＜境界条件 4＞

Laplace 方程式 [式 (27)] の左辺を考える。

Navier-Stokes 方程式より、 $\hat{p}$ については次のように書ける。

$$\partial_z \left(\frac{\hat{p}}{\rho} \right) = -\partial_t \hat{w} - \hat{u} \partial_r \hat{w} - \hat{w} \partial_z \hat{w} + \nu \left(\partial_r^2 \hat{w} + \frac{1}{r} \partial_r \hat{w} + \partial_z^2 \hat{w} \right) \quad (42)$$

上式の第四項は、 $\hat{\psi}$ を用いて、

$$\partial_r^2 \hat{w} + \frac{1}{r} \partial_r \hat{w} + \partial_z^2 \hat{w} = -\frac{1}{r} \left(\partial_r^3 \hat{\psi} + \partial_r \partial_z^2 \hat{\psi} \right) + \frac{1}{r^2} \partial_r^2 \hat{\psi} - \frac{1}{r^3} \partial_r \hat{\psi}$$

と書くことができる。

$\hat{\psi} = r(B_1 K_1(kr) + B_2 K_1(k'r))e^{i(nt+kz)} \equiv r(\phi_{b1} + \phi_{b2})e^{i(nt+kz)}$ として代入すると

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{r} \left\{ \partial_r^3 \left[r(\phi_{b1} + \phi_{b2})e^{i(nt+kz)} \right] + \partial_r \partial_z^2 \left[r(\phi_{b1} + \phi_{b2})e^{i(nt+kz)} \right] \right\} \\ & + \frac{1}{r^2} \partial_r^2 \left[r(\phi_{b1} + \phi_{b2})e^{i(nt+kz)} \right] - \frac{1}{r^3} \partial_r \left[r(\phi_{b1} + \phi_{b2})e^{i(nt+kz)} \right] \\ & = \left\{ [-k^3 \phi_{b1}''' - k_1^3 \phi_{b2}''' + k^2(k\phi_{b1}' + k_1\phi_{b2}')] \right. \\ & \quad + \frac{1}{r} [-2(k^2 \phi_{b1}'' + k_1^2 \phi_{b2}'') + k^2(\phi_{b1} + \phi_{b2})] \\ & \quad \left. + \frac{1}{r^2}(k\phi_{b1}' + k_1\phi_{b2}') - \frac{1}{r^3}(\phi_{b1} + \phi_{b2}) \right\} e^{i(nt+kz)} \end{aligned} \quad (43)$$

となる。よって、

$$\begin{aligned} \partial_z \left(\frac{\hat{p}}{\rho} \right) & \simeq -\partial_t \hat{w} + \nu \left(\partial_r^2 \hat{w} + \frac{1}{r} \partial_r \hat{w} + \partial_z^2 \hat{w} \right) \\ & = -\frac{in}{r} (\phi_{b1} + \phi_{b2} + kr\phi_{b1}' + k_1 r\phi_{b2}') e^{i(nt+kz)} + \nu [\text{式 (43)}] \end{aligned} \quad (44)$$

一方、

$$\frac{\hat{p}}{\rho} = -\frac{\nu}{ik} \frac{k_1^2 - k^2}{r} \partial_r \phi_{b2} + \frac{n}{kr} \partial_r (\phi_{b1} + \phi_{b2})$$

とおくと、その z 微分は

$$\begin{aligned} \partial_z \left(\frac{\hat{p}}{\rho} \right) & = -\frac{\nu}{ik} \frac{k_1^2 - k^2}{r} \partial_r \partial_z \left(r\phi_{b2} e^{i(nt+kz)} \right) + \frac{n}{kr} \partial_r \partial_z \left[r(\phi_{b1} + \phi_{b2}) e^{i(nt+kz)} \right] \\ & = -\frac{in}{r} (\phi_{b1} + \phi_{b2} + kr\phi_{b1}' + k_1 r\phi_{b2}') e^{i(nt+kz)} \\ & \quad + \nu \left[(k^2 k_1^2 \phi_{b2}' - k_1^3 \phi_{b2}') - \frac{1}{r} (k^2 \phi_{b2} - k_1^2 \phi_{b2}) \right] e^{i(nt+kz)} \end{aligned} \quad (45)$$

となる。

式 (44) と式 (45) が近似的に等しいとすると、

$$\frac{\hat{p}}{\rho} = -\frac{\nu}{ik} \frac{k_1^2 - k^2}{r} \partial_r \phi_{b2} + \frac{n}{kr} \partial_r (\phi_{b1} + \phi_{b2}) \quad (46)$$

と置いても良い。

ところで、 $\hat{p}$ は円柱座標での速度分布を考慮すると、

$$\begin{aligned} \hat{p} & = -\hat{p}_{rr} + 2\mu \frac{\partial \hat{u}}{\partial r} \\ \Rightarrow \hat{p}_{rr} & = -\hat{p} + 2\mu \frac{\partial \hat{u}}{\partial r} \end{aligned} \quad (47)$$

となる。したがって、式 (47) に式 (46) を代入すれば、次のようになる。

$$\hat{p}_{rr} = \mu \left[\frac{k_1^2 - k^2}{ikr} \frac{\partial \phi_{b2}}{\partial r} + 2ik \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\phi_{b1} + \phi_{b2}}{r} \right) \right] - \frac{n\rho}{kr} \frac{\partial (\phi_{b1} + \phi_{b2})}{\partial r}$$

Laplace の式の右辺 $\gamma(1/R_1 + 1/R_2)$ を考える。任意の瞬間における境界の方程式は $r_s = R + \xi$ である。ここで、摂動部 ξ は、

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = u|_{r=R} = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z} \Big|_{r=R} = \frac{ik}{R} \psi \Big|_{r=R}$$

と定義される。よって、 ξ は

$$\xi = \frac{k}{nR} \psi \Big|_{r=R}$$

となる。

原点中心の円から少しずれた曲線の曲率 $1/R_1$ は

$$\frac{1}{R_1} = \frac{1}{R} - \frac{1}{R^2} \xi$$

となる。ここで、 $\xi \ll R$ を用いた。

それと鉛直な断面の曲率 $1/R_2$ は

$$\frac{1}{R_2} = -\nabla \cdot \mathbf{n} = -\frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2}$$

となる。

よって、

$$\begin{aligned} \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} &= \frac{1}{R} - \frac{1}{R^2} \xi - \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} \\ &= \frac{1}{R} + \frac{k}{nR^2} (k^2 R^2 - 1) (A_1 I_1(kR) + A_2 I_1(k_1 R)) e^{i(nt+kz)} \end{aligned}$$

となるから、

$$\gamma \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) = \gamma \left[\frac{1}{R} + \frac{k(k^2 R^2 - 1)}{nR^3} (\psi_{a1} + \psi_{a2}) \right]_{r=R}$$

となる。

以上より、Laplace の式は

$$\hat{p}_{rr}|_{r=R} - p_{rr}|_{r=R} = \frac{\gamma k(k^2 R^2 - 1)}{nR^3} (\psi_{a1} + \psi_{a2}) \Big|_{r=R}$$

となり、書き換えると次のようになる。

$$\begin{aligned} &\mu \left[\frac{k_1^2 - k^2}{ikr} \frac{\partial \phi_{b2}}{\partial r} + 2ik \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\phi_{b1} + \phi_{b2}}{r} \right) \right]_{r=R} - \frac{n\rho}{kr} \frac{\partial (\phi_{b1} + \phi_{b2})}{\partial r} \Big|_{r=R} \\ &= \mu \left[\frac{k_1^2 - k^2}{ikr} \frac{\partial \phi_{a2}}{\partial r} + 2ik \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\phi_{a1} + \phi_{a2}}{r} \right) \right]_{r=R} - \frac{n\rho}{kr} \frac{\partial (\phi_{a1} + \phi_{a2})}{\partial r} \Big|_{r=R} \\ &\quad + \frac{\gamma k(k^2 R^2 - 1)}{nR^3} (\phi_{a1} + \phi_{a2}) \Big|_{r=R} \end{aligned}$$

ϕ_{a1} 、 ϕ_{a2} 、 ϕ_{b1} 、 ϕ_{b2} を元に戻すと、

$$\begin{aligned} & A_1 \left[2ik^2 I_1'(kR) - \frac{n\rho}{\mu} I_0(kR) + \frac{\gamma(k^2 R^2 - 1)}{R^2} \frac{k}{n\mu} I_1(kR) \right] \\ & + A_2 \left[2ikk_1 I_1'(k_1 R) + \frac{\gamma(k^2 R^2 - 1)}{R^2} \frac{k}{n\mu} I_1(k_1 R) \right] \\ & - B_1 \left[2ik^2 K_1'(kR) - \frac{n\rho}{\mu} K_0(kR) \right] - B_2 2ikk_1 K_1'(k_1 R) = 0 \end{aligned} \quad (48)$$

となる。

式 (39)(40)(41)(48) を改めて記すと、次のようになる。

$$\begin{aligned} & A_1 I_1(kR) + A_2 I_1(k_1 R) - B_1 K_1(kR) - B_2 K_1(k_1 R) = 0 \\ & A_1 k R I_0(kR) + A_2 k_1 R I_0(k_1 R) \\ & \quad - B_1 k R K_0(kR) - B_2 k_1 R K_0(k_1 R) = 0 \\ & A_1 2k^2 I_1(kR) + A_2 (k^2 + k_1^2) I_1(k_1 R) \\ & \quad - B_1 2k^2 K_1(kR) - B_2 (k^2 + k_1^2) K_1(k_1 R) = 0 \\ & A_1 F_1 + A_2 F_2 - B_1 F_3 - B_2 F_4 = 0 \\ & F_1 = 2ik^2 I_1'(kR) - \frac{n\rho}{\mu} I_0(kR) + \frac{\gamma(k^2 R^2 - 1)}{R^2} \frac{k}{n\mu} I_1(kR) \\ & F_2 = 2ikk_1 I_1'(k_1 R) + \frac{\gamma(k^2 R^2 - 1)}{R^2} \frac{k}{n\mu} I_1(k_1 R) \\ & F_3 = 2ik^2 K_1'(kR) - \frac{n\rho}{\mu} K_0(kR) \\ & F_4 = 2ikk_1 K_1'(k_1 R) \end{aligned}$$

A_1 、 A_2 、 B_1 、 B_2 に関する連立方程式が 0 以外の解を持つためには、その係数の行列式が 0 となる必要がある。したがって、

$$\begin{vmatrix} I_1(kR) & I_1(k_1 R) & K_1(kR) & K_1(k_1 R) \\ k R I_0(kR) & k_1 R I_0(k_1 R) & k R K_0(kR) & k_1 R K_0(k_1 R) \\ 2k^2 I_1(kR) & (k^2 + k_1^2) I_1(k_1 R) & 2k^2 K_1(kR) & (k^2 + k_1^2) K_1(k_1 R) \\ F_1 & F_2 & F_3 & F_4 \end{vmatrix} = 0$$

となる。

簡単のため、 $\rho \ll 1$ とした後、 in について展開し、整理すると次のようになる。

$$in = \frac{\gamma}{2R\mu} (1 - k^2 R^2) \Phi(kR) = \frac{\gamma}{2R\mu} (1 - x^2) \Phi(x) \quad (49)$$

ここで、 $kR = x$ とした。

$\Phi(x)$ は

$$\Phi(x) = \frac{N(x)}{D(x)}$$

で与えられる。 $N(x)$ 、 $D(x)$ はそれぞれ

$$\begin{aligned} N(x) &= I_1(x)\Delta_1 - x[xI_0(x) - I_1(x)]\Delta_2 \\ D(x) &= [xI_0(x) - I_1(x)]\Delta_1 - [(x^2 + 1)I_1(x) - xI_0(x)]\Delta_2 \\ &\quad - [xK_0(x) + K_1(x)]\Delta_3 - [(x^2 + 1)K_1(x) + xK_0(x)]\Delta_4 \end{aligned}$$

であり、

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= \begin{vmatrix} xI_0(x) - I_1(x) & K_1(x) & -xK_0(x) - K_1(x) \\ I_0(x) + xI_1(x) & -K_0(x) & -K_0(x) + xK_1(x) \\ xI_0(x) & K_1(x) & -xK_0(x) \end{vmatrix} \\ \Delta_2 &= \begin{vmatrix} I_1(x) & K_1(x) & -xK_0(x) - K_1(x) \\ I_0(x) & -K_0(x) & -K_0(x) + xK_1(x) \\ I_1(x) & K_1(x) & -xK_0(x) \end{vmatrix} \\ \Delta_3 &= \begin{vmatrix} I_1(x) & xI_0(x) - I_1(x) & -xK_0(x) - K_1(x) \\ I_0(x) & I_0(x) + xI_1(x) & -K_0(x) + xK_1(x) \\ I_1(x) & xI_0(x) & -xK_0(x) \end{vmatrix} \\ \Delta_4 &= \begin{vmatrix} I_1(x) & xI_0(x) - I_1(x) & K_1(x) \\ I_0(x) & I_0(x) + xI_1(x) & -K_0(x) \\ I_1(x) & xI_0(x) & K_1(x) \end{vmatrix} \end{aligned}$$

である。この式 (49) を解き、 in の実部が最大になる kR を求める。波長は $\lambda = \frac{2\pi}{k}$ より、最大の不安定波長 $\lambda_{\max}$ がわかる。Tomotika はこの方法で、最大の不安定波長を $11.56 \times R$ と導き出した [8]。

具体的に $R = 2.5 \times 10^{-3}[\text{m}]$ とすると、 $\lambda_{\max} = 2.79 \times 10^{-2}[\text{m}]$ となる。

Antibubble 生成における jet の安定性解析は、結果的に Tomotika の理論に集約され、その理論を用いることで jet の不安定波長を得ることができた。しかし、Tomotika の理論は、内部流体と外部流体の粘性係数の比が $0.2 < \text{外部/内部} < 100$ では、実験とあまり一致しない。Antibubble の場合は、粘性係数は内部と外部で一致するために比は 1 となることから、その範囲でより実験と一致する理論を用いる必要がある。

3.3.3 Kinoshita の線形安定性理論と Antibubble の不安定波長

Kinoshita らは独自の線形安定性理論を用いて、粘性係数の比が $0.2 < \text{外部/内部} < 100$ の範囲で、より実験と一致した理論を構築した [9]。この Kinoshita の理論は、Tomotika の理論より実際の現象に近いということだけでなく、不安定波長を導出する際、式の中にパラメータの項が陽に入っているため、パラメータの値によって不安定波長がどう変化するかを考えやすいという利点もある。この項では Kinoshita の理論を紹介し、それを Antibubble のモデル式を導入することで不安定波長の導出を試みる。

Kinoshita の線形安定性理論

まず、jet 内部のエネルギー保存を考える。エネルギー保存の式は、

$$\int_V \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \rho u_i^2 \right) dV + \int_V \tau_{ij} \epsilon_{ij} dV - \int_S \tau_{ij} u_i n_j dS = 0 \quad (50)$$

と書ける。ここで、 V ：体積、 S ：表面積、 t ：時間、 ρ ：液体の密度、 u_i ： i 番目の速度、 g ：重力加速度、 z ：jet の進行方向の座標、 τ_{ij} ：応力テンソル、 ϵ_{ij} ：歪みテンソル、 n_j ：法線成分である。

jet 内部にエネルギー保存を用いることで、Navier-Stokes 方程式は外部のみに適応することになる。そのため、未定係数が少なくなり、より簡単に導出することができる。

jet 周りの液体の Navier-Stokes 方程式は

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial t} = -\frac{1}{\hat{\rho}} \nabla \hat{p} + \frac{\hat{\mu}}{\hat{\rho}} \nabla^2 \hat{u} + g \quad (51)$$

となる。これ以後、 $\hat{}$ 付きは jet 周りの流体のパラメータを表すとする。また、Kinoshita は右辺の重力項を考えていないが、今は重力項も考える。

連続の式は

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad \nabla \cdot \hat{\mathbf{u}} = 0 \quad (52)$$

となる。

境界で速度が連続より

$$u_r|_{r=r_s} = \hat{u}_r|_{r=r_s}, \quad u_z|_{r=r_s} = \hat{u}_z|_{r=r_s} \quad (53)$$

となり、境界でのつりあいは

$$\tau_{rr}|_{r=r_s} = \hat{\tau}_{rr}|_{r=r_s} - \gamma \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right)_{r=r_s} = \left[-\hat{p} + 2\hat{\mu} \frac{\partial \hat{u}_r}{\partial r} - \gamma \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) \right]_{r=r_s} \quad (54)$$

$$\tau_{rz}|_{r=r_s} = \hat{\tau}_{rz}|_{r=r_s} = \hat{\mu} \left(\frac{\partial \hat{u}_z}{\partial r} + \frac{\partial \hat{u}_r}{\partial z} \right)_{r=r_s} \quad (55)$$

となる。ここで、 r_s は jet の側面表面を表す。

< jet 内部の速度： u_z 、 u_r >

jet の側面表面を $r_s = R + \alpha(t) \cos kz$ とする。ここで、 k は波数である。

流量の保存から

$$\frac{\partial(\pi r_s^2)}{\partial t} + \frac{\partial(u_z \pi r_s^2)}{\partial z} = 0 \quad (56)$$

となる。ここで、第一項は断面積の変化、第二項は流入量と流出量の差である。この流量の保存を用いることで、表面での流れのみで内部の速度を導出することができる。

上式を整理すると、

$$\partial_z u_z = -\frac{2}{r_s} (\partial_t r_s + u_z \partial_z r_s) = -\frac{2\dot{\alpha} \cos kz - u_z k \alpha \sin kz}{R + \alpha \cos kz} \simeq -\frac{2\dot{\alpha} \cos kz}{R}$$

であるから、 u_z は

$$u_z = -\frac{2}{kR}\dot{\alpha}\sin kz \quad (57)$$

となる。ここで、 $\dot{\alpha} = \frac{d\alpha}{dt}$ である。

また、連続の式より

$$\begin{aligned} \frac{1}{r}\partial_r(ru_r) + \partial_z u_z &= 0 \\ \frac{1}{r}\partial_r(ru_r) &= -\partial_z u_z = \frac{2\dot{\alpha}\cos kz}{R} \\ ru_r &= \frac{\dot{\alpha}\cos kz}{R}r^2 \end{aligned}$$

であるから、

$$u_r = \frac{r}{R}\dot{\alpha}\cos kz \quad (58)$$

となる。

次にエネルギー保存の式 (50) を考える。

<式 (50) 第1項>

式 (57)(58) を用いると、第1項は次のようになる。

$$\begin{aligned} \int_V \partial_t \left(\frac{1}{2} \rho u_i^2 \right) dV &= \rho \int_V (u_r \dot{u}_r + u_z \dot{u}_z) dV \\ &= \rho \int_V \left[\left(\frac{r}{R} \dot{\alpha} \cos kz \right) \left(\frac{r}{R} \ddot{\alpha} \cos kz \right) \right. \\ &\quad \left. + \int_V \left(-\frac{2}{kR} \dot{\alpha} \sin kz \right) \left(-\frac{2}{kR} \ddot{\alpha} \sin kz \right) \right] dV \\ &= \frac{\rho \dot{\alpha} \ddot{\alpha}}{R^2} \int_0^R r^3 dr \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{2\pi m}{k}} \cos^2 kz dz \\ &\quad + \frac{4\rho \dot{\alpha} \ddot{\alpha}}{k^2 R^2} \int_0^R r dr \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{2\pi m}{k}} \sin^2 kz dz \\ &= \frac{\pi^2 m R^3 \rho}{2\eta^3} (8 + \eta^2) \dot{\alpha} \ddot{\alpha} \end{aligned} \quad (59)$$

ここで、 $\ddot{\alpha} = \frac{d^2\alpha}{dt^2}$ 、 z の範囲は $0 \rightarrow \frac{2\pi m}{k}$ とした。また、 $kR = \eta$ とおいた。

<式 (50) 第2項>

応力テンソル τ_{ij} 、歪みテンソル ϵ_{ij} はそれぞれ

$$\tau_{ij} = \mu \begin{pmatrix} 2\frac{\partial u_r}{\partial r} & 0 & -\frac{\partial u_r}{\partial z} \\ 0 & 2\frac{u_r}{r} & 0 \\ \frac{\partial u_r}{\partial z} & 0 & 2\frac{\partial u_z}{\partial z} \end{pmatrix}, \quad \epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2\frac{\partial u_r}{\partial r} & 0 & -\frac{\partial u_r}{\partial z} \\ 0 & 2\frac{u_r}{r} & 0 \\ \frac{\partial u_r}{\partial z} & 0 & 2\frac{\partial u_z}{\partial z} \end{pmatrix}$$

である。よって、第2項は次のようになる。

$$\begin{aligned}
 \int_V \tau_{ij} \epsilon_{ij} dV &= \frac{1}{2} \mu \int_V \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right)^2 dV \\
 &= \frac{1}{2} \mu \int_V \left[(2\partial_r u_r)^2 + \left(2\frac{u_r}{r} \right)^2 + (2\partial_z u_z)^2 + 2(\partial_z u_r)^2 \right] dV \\
 &= \frac{1}{2} \mu \left[\frac{8\pi^2 m R}{2\eta} \dot{\alpha}^2 + \frac{8\pi^2 m R}{2\eta} \dot{\alpha}^2 + \frac{32\pi^2 m R}{2\eta} \dot{\alpha}^2 + \frac{2\pi^2 m R}{2\eta} \eta^2 \dot{\alpha}^2 \right] \\
 &= \frac{\pi^2 m R \mu}{2\eta} (24 + \eta^2) \dot{\alpha}^2
 \end{aligned} \tag{60}$$

<式 (50) 第3項>

第3項を展開すると、次のようになる。

$$\begin{aligned}
 \int_S \tau_{ij} u_i n_j dS &= - \int_S \hat{p} u_r dS + \int_S 2\hat{\mu} (\partial_r \hat{u}_r)_{r=r_s} u_r dS \\
 &\quad - \int_S \gamma \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) u_r dS + \int_S \hat{\mu} (\partial_r \hat{u}_z + \partial_z \hat{u}_r)_{r=r_s} u_z dS
 \end{aligned} \tag{61}$$

式 (61) の右辺を考える。

[式 (61) 右辺第3項]

右辺第3項の被積分関数を考えると、次のように書ける。

$$\gamma \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) = \gamma \left(\frac{1}{r_s} + \nabla \cdot \mathbf{n} \right)$$

境界 $r_s = R + \alpha \cos kz$ を代入すると、

$$\frac{1}{r_s} = \frac{1}{R + \alpha \cos kz} \simeq \frac{1}{R} \left(1 - \frac{\alpha}{R} \cos kz \right) = \frac{1}{R} - \frac{\alpha}{R^2} \cos kz$$

となる。また、 $\mathbf{n} = -[1 + (\partial_z r_s)^2]^{-\frac{1}{2}} (1, 0, \partial_z r_s)$ より、

$$\nabla \cdot \mathbf{n} = - \frac{\partial_z^2 r_s}{[1 + (\partial_z r_s)^2]^{\frac{3}{2}}}$$

となり、境界の式を代入すると、

$$\nabla \cdot \mathbf{n} = \frac{\alpha k^2 \cos kz}{[1 + \alpha^2 k^2 \sin^2 kz]^{\frac{3}{2}}} \simeq \alpha k^2 \cos kz = \frac{\alpha \eta^2 \cos kz}{R^2}$$

となる。

以上より、式 (61) 右辺第3項は次のようになる。

$$\begin{aligned}
 - \int_S \gamma \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) u_r dS &= - \int_S \gamma \left(\frac{1}{r_s} + \nabla \cdot \mathbf{n} \right) u_r dS \\
 &= - \frac{\gamma}{R} \int_S u_r dS + \frac{\alpha \gamma}{R^2} (1 - \eta^2) \int_S \cos kz \left(\frac{r}{R} \dot{\alpha} \cos kz \right) dS \\
 &= \frac{2\pi^2 m \gamma}{\eta} (1 - \eta^2) \alpha \dot{\alpha}
 \end{aligned} \tag{62}$$

[式 (61) 右辺第 1 項]

jet 周りの液体の Navier-Stokes 方程式を成分表示は、次のように書ける。

$$\partial_t \hat{u}_z = -\frac{1}{\hat{\rho}} \partial_z \hat{p} + \frac{\hat{\mu}}{\hat{\rho}} \left[\frac{1}{r} \partial_r (r \partial_r \hat{u}_z) + \partial_z^2 \hat{u}_z \right] + g \quad (63)$$

$$\partial_t \hat{u}_r = -\frac{1}{\hat{\rho}} \partial_r \hat{p} + \frac{\hat{\mu}}{\hat{\rho}} \left[\frac{1}{r} \partial_r (r \partial_r \hat{u}_r) + \partial_z^2 \hat{u}_r \right] \quad (64)$$

式 (63) において、 $\frac{\partial \hat{u}_z}{\partial z}$ の項は他と比べて小さいため、無視できる。また、 $r \rightarrow \infty$ のとき一様流であることから、 $\frac{\partial \hat{u}_z}{\partial r} \rightarrow 0$ とすることができる。したがって、式 (63) の右辺第 2 項は 0 となり、次のように書くことができる。

$$\frac{\partial \hat{u}_z}{\partial t} = -\frac{1}{\hat{\rho}} \frac{\partial}{\partial z} (\hat{p} - \hat{\rho} g z)$$

速度ポテンシャル φ を用いて、 $\hat{u}_r = \partial \varphi / \partial r$ 、 $\hat{u}_z = \partial \varphi / \partial z$ とおく。これを上式に代入すると、

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \varphi}{\partial z} &= -\frac{1}{\hat{\rho}} \frac{\partial}{\partial z} (\hat{p} - \hat{\rho} g z) \\ \Rightarrow \frac{\partial \varphi}{\partial t} &= -\frac{1}{\hat{\rho}} (\hat{p} - \hat{\rho} g z) \end{aligned} \quad (65)$$

となる。これが、連続の式 $\nabla \cdot \hat{\mathbf{u}} = 0$ を満たすとする、

$$\begin{aligned} \partial_r \hat{u}_r + \frac{1}{r} \hat{u}_r + \partial_z \hat{u}_z &= 0 \\ \Rightarrow \partial_r^2 \varphi + \frac{1}{r} \partial_r \varphi + \partial_z^2 \varphi &= 0 \end{aligned}$$

となる。 $\varphi = \phi(r) \cos kz$ として、式 (66) に代入すると、 ϕ についての Bessel 方程式となり、 $\phi = AK_0(kr)$ と書くことができる。ここで、 $K_0(kr)$ は修正された 0 次の第 2 種 Bessel 関数

$$\begin{aligned} K_0(kr) &= \frac{2}{\pi} \left[I_0(kr) \left(\ln \frac{kr}{2} + \kappa \right) - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{h_m}{2^{2m} (m!)^2} (kr)^{2m} \right] \\ I_0(kr) &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(kr)^{2m}}{2^{2m} (m!)^2} \\ h_m &= \begin{cases} 0 & [m = 0 \text{ のとき}] \\ 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{s} & [m = s \neq 0 \text{ のとき}] \end{cases} \\ \kappa &= 0.5772 \cdots \quad [\text{Euler の定数}] \end{aligned}$$

である。この第 2 種 Bessel 関数は $r \rightarrow \infty$ で有界である。

よって、 φ は次のようになる。

$$\varphi = AK_0(kr) \cos kz \quad (66)$$

$r = r_s$ のとき

$$u_z|_{r=r_s} = -\frac{2\dot{\alpha}}{kR} \sin kz$$

となる。また、 $K_0(kr_s) \simeq K_0(kR)$ より

$$\hat{u}_z|_{r=r_s} = \frac{\partial \varphi}{\partial z} \Big|_{r=r_s} \simeq -kAK_0(kR) \sin kz$$

となる。 $u_z|_{r=r_s} = \hat{u}_z|_{r=r_s}$ であるから、

$$-\frac{2\dot{\alpha}}{kR} \sin kz = -kAK_0(kR) \sin kz$$

$$A = \frac{2\dot{\alpha}}{kkRK_0(kR)} \simeq \frac{\dot{\alpha}}{kK_1(kR)}$$

となる。ここで、 $K_1(kr)$ は修正された 1 次の第 2 種 Bessel 関数

$$K_1(kr) = \frac{2}{\pi} \left[I_1(kr) \left(\ln \frac{kr}{2} + \kappa \right) - \frac{1}{2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{h_m + h_{m+1}}{2^{2m+1} m! (m+1)!} (kr)^{2m+1} + \frac{1}{kr} \right]$$

$$I_1(kr) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(kr)^{2m+1}}{2^{2m+1} m! (m+1)!}$$

である。また、 $K_0(kr)/K_1(kr) \simeq 2/kr$ を用いた。

したがって、

$$\varphi = \frac{\dot{\alpha}K_0(kr)}{kK_1(kR)} \cos kz$$

となり、 $\eta = kR$ とおくと式 (65) より、

$$\hat{p} - \hat{\rho}gz = -\hat{\rho} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = -\frac{\hat{\rho}\ddot{\alpha}K_0(kr)}{kK_1(\eta)} \cos kz \quad (67)$$

となる。

以上より、式 (61) 右辺第 1 項は次のようになる。

$$\begin{aligned} -\int_S \hat{p}u_r dS &= \int_S \frac{\hat{\rho}\ddot{\alpha}K_0(kr)}{kK_1(\eta)} \cos kz \cdot \frac{r}{R} \dot{\alpha} \cos kz dS + \hat{\rho}g \int_S \frac{zr}{R} \cos kz dS \\ &= \frac{\hat{\rho}\dot{\alpha}\ddot{\alpha}}{\eta K_1(\eta)} \int_S r K_0(kr) \cos^2 kz dS \\ &= \frac{2\pi^2 m \hat{\rho} R^3}{\eta^2} \frac{K_0(\eta)}{K_1(\eta)} \dot{\alpha} \ddot{\alpha} \end{aligned} \quad (68)$$

[式 (61) 右辺第 2 項、第 4 項]

式 (67) より、

$$\begin{aligned} \frac{1}{\hat{\rho}} \frac{\partial}{\partial z} (\hat{p} - \hat{\rho}gz) &= \ddot{\alpha} \sin kz \frac{K_0(kr)}{K_1(\eta)} = -\frac{\eta}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left(-\frac{2\dot{\alpha} \sin kz}{\eta} \right) \frac{K_0(kr)}{K_1(\eta)} \\ &= -\frac{\eta}{2} \frac{K_0(kr)}{K_1(\eta)} \frac{\partial \hat{u}_z}{\partial t} \Big|_{r=r_s} \end{aligned}$$

となる。これを式 (63) に代入すると、

$$\frac{\partial \hat{u}_z}{\partial t} = \frac{\eta}{2} \frac{K_0(kr)}{K_1(\eta)} \frac{\partial \hat{u}_z}{\partial t} \Big|_{r=r_s} + \frac{\hat{\mu}}{\hat{\rho}} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \hat{u}_z \right)$$

となる。ここで、式 (63) の右辺第 3 項は他項に比べ小さいので、無視した。

上式の各項の次数を比較すると

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \hat{u}_z}{\partial r} \right) = 0$$

とおくことができる。したがって

$$\hat{u}_z = C_1(z, t) \left[\ln \left(\frac{R}{r} \right) + C_2(z, t) \right]$$

とおける。 r が十分大きいところでは、

$$\hat{u}_z = \frac{\partial \varphi}{\partial z} = -\dot{\alpha} \frac{K_0(kr)}{K_1(\eta)} \sin kz \simeq -\dot{\alpha} \eta K_0(kr) \sin kz$$

となる。ここで、 $R \ll Z$ ($\eta < 1$) で $K_1(\eta) \simeq \frac{1}{\eta}$ を用いた。

また、境界 $r = r_s$ で

$$\hat{u}_z|_{r=r_s} \simeq C_1 C_2 = u_z|_{r=r_s} = -\frac{2\dot{\alpha}}{\eta} \sin kz$$

となる。

これら二つの条件を満たすように、係数 C_1 、 C_2 を決めると、

$$C_1 = -\dot{\alpha} \eta \sin kz$$

$$C_2 = \frac{2}{\eta^2}$$

とおくことができ、

$$\hat{u}_z = -\dot{\alpha} \eta \sin kz \left[\ln \left(\frac{R}{r} \right) + \frac{2}{\eta^2} \right] \quad (69)$$

となる。

上式より

$$\frac{\partial \hat{u}_z}{\partial r} \Big|_{r=r_s} = \frac{\dot{\alpha} \eta \sin kz}{r_s} \simeq \frac{\dot{\alpha} \eta \sin kz}{R}$$

とおくことができる。

したがって、式 (61) 右辺第 2 項、第 4 項は次のようになる。

$$\begin{aligned} \left[\int_S 2\hat{\mu} (\partial_r \hat{u}_r) \hat{u}_r dS + \int_S \hat{\mu} (\partial_r \hat{u}_z + \partial_z \hat{u}_r) \hat{u}_z dS \right]_{r=r_s} &\simeq \int_S \hat{\mu} (\partial_r \hat{u}_z) \hat{u}_z \Big|_{r=r_s} dS \\ &= \int_S \hat{\mu} \frac{\dot{\alpha} \eta \sin kz}{R} \left(-\dot{\alpha} \eta \sin kz \frac{2}{\eta^2} \right) dS \\ &= -\frac{4\pi^2 m R \hat{\mu} \dot{\alpha}^2}{\eta} \end{aligned} \quad (70)$$

以上より、式 (62)(68)(70) を式 (61) に代入すると、

$$\begin{aligned}
 \int_S \tau_{ij} u_i n_j dS &= - \int_S \hat{p} u_r dS + \int_S 2\hat{\mu} (\partial_r \hat{u}_r)_{r=r_s} u_r dS \\
 &\quad - \int_S \gamma \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) u_r dS + \int_S \hat{\mu} (\partial_r \hat{u}_z + \partial_z \hat{u}_r)_{r=r_s} u_z dS \\
 &= \frac{2\pi^2 m \gamma}{\eta} (1 - \eta^2) \alpha \dot{\alpha} + \frac{2\pi^2 m \hat{\rho} R^3}{\eta^2} \frac{K_0(\eta)}{K_1(\eta)} \dot{\alpha} \ddot{\alpha} - \frac{4\pi^2 m R \hat{\mu} \dot{\alpha}^2}{\eta}
 \end{aligned} \tag{71}$$

となる。

<エネルギー保存式>

式 (59)(60)(71) より、エネルギー保存式 [式 (50)] は、次のようになる。

$$\begin{aligned}
 0 &= \frac{\pi^2 m R^3 \rho}{2\eta^3} (8 + \eta^2) \dot{\alpha} \ddot{\alpha} + \frac{\pi^2 m R \mu}{2\eta} (24 + \eta^2) \dot{\alpha}^2 \\
 &\quad - \frac{2\pi^2 m \gamma}{\eta} (1 - \eta^2) \alpha \dot{\alpha} - \frac{2\pi^2 m \hat{\rho} R^3}{\eta^2} \frac{K_0(\eta)}{K_1(\eta)} \dot{\alpha} \ddot{\alpha} + \frac{4\pi^2 m R \hat{\mu} \dot{\alpha}^2}{\eta}
 \end{aligned}$$

一般に、Antibubble は内部と外部は同種の液体であるから、 $\rho = \hat{\rho}$ 、 $\mu = \hat{\mu}$ となる。また、今の場合 $K_0(\eta)/K_1(\eta) \simeq 0$ となるので、上式を α について整理すると、

$$\ddot{\alpha} + \frac{\mu \eta^2}{4R^2 \rho} \left[12 \frac{\left(1 + \frac{\eta^2}{24}\right)}{\left(1 + \frac{\eta^2}{8}\right)} + \frac{4}{\left(1 + \frac{\eta^2}{8}\right)} \right] \dot{\alpha} - \frac{\gamma \eta^2}{2\rho R^3} \frac{1 - \eta^2}{\left(1 + \frac{\eta^2}{8}\right)} \alpha = 0$$

となる。近似すると、

$$\ddot{\alpha} + 4 \frac{\mu \eta^2}{R^2 \rho} \dot{\alpha} - \frac{\gamma}{2\rho R^3} \eta^2 (1 - \eta^2) \alpha \simeq 0$$

となり、さらに $\alpha = \alpha_0 e^{\omega t}$ 、 $\beta^2 = 2\rho R^3 \omega^2 / \gamma$ 、 $\chi = \mu / (2\rho R \gamma)^{1/2}$ として整理すると、次のようになる。

$$\beta^2 + 8\chi \eta^2 \beta = \eta^2 (1 - \eta^2) \tag{72}$$

これは β についての二次方程式となっているので、 β について解くと、

$$\beta = -4\chi \eta^2 + \eta [(16\chi^2 - 1) \eta^2 + 1]^{\frac{1}{2}} \tag{73}$$

となる。

$\beta \propto \omega$ より、波長の不安定が最も大きいのは、 β が極大になるときである。このときの $\eta = \eta_{\max}$ とすると、

$$\eta_{\max} = (2 + 8\chi)^{-\frac{1}{2}} \tag{74}$$

となる [9]。

したがって、 $\eta_{\max} = 2\pi R / \lambda_{\max}$ より、**最大の不安定波長 $\lambda_{\max}$** は次のようになる。

$$\lambda_{\max} = \frac{2\pi}{(2 + 8\chi)^{-\frac{1}{2}}} R \equiv YR \tag{75}$$

3.4 Antibubble の半径と時定数

時定数

式 (73) を用いると、時定数（不安定が増大する時間） τ は、次のようになる。

$$\begin{aligned}\tau = \frac{1}{\omega} &= \frac{1}{\beta} \left[\frac{2\rho R^3}{\gamma} \right]^{-\frac{1}{2}} = \frac{\mu R}{\gamma \chi \left\{ -4\chi \eta_{\max}^2 + \eta_{\max} [(16\chi^2 - 1) \eta_{\max}^2 + 1]^{\frac{1}{2}} \right\}} \\ &= \frac{2R(4\mu + \sqrt{2\rho R\gamma})}{\gamma}\end{aligned}\quad (76)$$

Antibubble の最大半径

図 6 のように、Antibubble が生成されるとする³。図中の体積 V_1 、 V_2 、 V_3 はそれぞれ、

$$V_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \pi (2R)^3 = \frac{16}{3} \pi R^3 \quad (77)$$

$$\begin{aligned}V_2 &= \int_0^{\frac{1}{2}\lambda_{\max}} \pi r^2 dz \\ &= \int_0^{\frac{1}{2}\lambda_{\max}} \pi \left(-R \cos \frac{2\pi}{\lambda_{\max}} z + R \right)^2 dz \\ &= \pi R^2 \int_0^{\frac{1}{2}\lambda_{\max}} \left[1 - 2 \cos \frac{2\pi}{\lambda_{\max}} z + \frac{1}{2} \left(1 + \cos \frac{4\pi}{\lambda_{\max}} z \right) \right] dz \\ &= \pi R^2 \left[\frac{3}{2} z - \frac{\lambda_{\max}}{\pi} \sin \frac{2\pi}{\lambda_{\max}} z + \frac{\lambda_{\max}}{8\pi} \sin \frac{4\pi}{\lambda_{\max}} z \right]_0^{\frac{1}{2}\lambda_{\max}} \\ &= \frac{3}{4} \pi R^2 \lambda_{\max}\end{aligned}\quad (78)$$

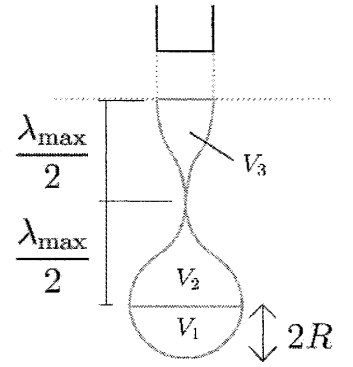


図 6: Antibubble の体積（一個の場合）

$$\begin{aligned}V_3 &= \int_0^{\frac{1}{2}\lambda_{\max}} \pi r_1^2 dz \\ &= \int_0^{\frac{1}{2}\lambda_{\max}} \pi \left(-\frac{R}{2} \cos \frac{2\pi}{\lambda_{\max}} z + \frac{R}{2} \right)^2 dz \\ &= \frac{\pi R^2}{4} \left[\frac{3}{2} z - \frac{\lambda_{\max}}{\pi} \sin \frac{2\pi}{\lambda_{\max}} z + \frac{\lambda_{\max}}{8\pi} \sin \frac{4\pi}{\lambda_{\max}} z \right]_0^{\frac{1}{2}\lambda_{\max}} \\ &= \frac{3}{16} \pi R^2 \lambda_{\max}\end{aligned}\quad (79)$$

となる。

³本研究では簡単のため、振幅を $2R$ としたが、実際は体積保存と臨界体積を考慮して決める必要がある。ただし、実際の現象の振幅は $\leq 2R$ より、線形近似の範囲では妥当といえる。

Antibubble の最大体積は

$$\begin{aligned} V_{12} = V_1 + V_2 &= \frac{16}{3}\pi R^3 + \frac{3}{4}\pi R^2 \lambda_{\max} \\ &= \pi R^3 \left(\frac{16}{3} + \frac{3}{4}Y \right) \end{aligned}$$

より、Antibubble の最大半径 r_{AB} は次のようになる。

$$\begin{aligned} \frac{4}{3}\pi r_{AB}^3 &= \pi R^3 \left(\frac{16}{3} + \frac{3}{4}Y \right) \\ r_{AB} &= \frac{R}{2} \left(32 + \frac{9}{2}Y \right)^{\frac{1}{3}} \end{aligned} \quad (80)$$

最大の Antibubble 生成に必要な液体の量

最大半径の Antibubble を一個生成するために最低限必要な液体の体積 V は、

$$V = V_1 + V_2 + V_3 = \pi R^3 \left(\frac{16}{3} + \frac{15}{16}Y \right)$$

である。したがって、最大半径の Antibubble の生成に最低限必要な jet の高さ l_1 は、次のようになる。

$$\begin{aligned} \pi R^2 l_1 &= \pi R^3 \left(\frac{16}{3} + \frac{15}{16}Y \right) \\ l_1 &= R \left(\frac{16}{3} + \frac{15}{16}Y \right) \end{aligned} \quad (81)$$

複数個できる場合の Antibubble の半径

Antibubble が複数個生成される場合【図 6】、jet の初期の高さを $l_f (\geq l_1)$ 、くびれの数をもとと、小さいほうの Antibubble の半径 r_{ab} は次のようになる。

[$m = 1$ のとき]

$$r_{ab} = 0 \quad (82)$$

[$1 < m$ のとき]

$$\begin{aligned} \frac{4}{3}\pi r_{ab}^3 &= \frac{1}{m-1} \left[\pi R^2 l_f - \pi R^3 \left(\frac{16}{3} + \frac{15}{16}Y \right) \right] \\ r_{ab} &= \frac{R}{2} \left[\frac{1}{m-1} \left(\frac{6l_f}{R} - \left(32 + \frac{45}{8}Y \right) \right) \right]^{\frac{1}{3}} \end{aligned} \quad (83)$$

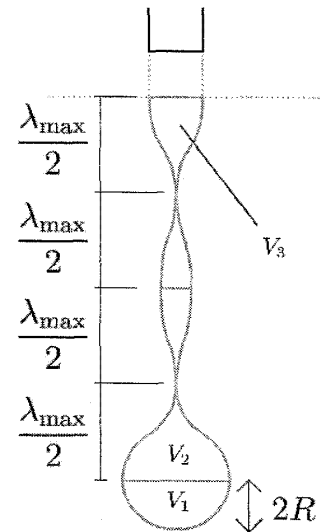


図 7: Antibubble の体積 (二個の場合)

また、jet の初期の高さ l_f が

$$l_f = R \left(\frac{16}{3} + \frac{9+6m}{16} Y \right) \equiv l_m \quad [1 < m]$$

のとき、 r_{ab} は最大値

$$r_{ab(\max)} = \frac{R}{2} \left(\frac{3Y}{4} \right)^{\frac{1}{3}}$$

を取るとする。

3.5 剛体近似と Antibubble の生成時間

この節では、jet の底面が液面から高さ h 離れた場所から $(2R + \lambda_{\max}) \equiv n$ まで沈み込む過程を「円柱剛体の沈み込みの過程」に近似して、jet 底面が液面に達するまでの時間とそのときの速度、および jet が液面表面からある深さまで潜り込むのに要する時間を導出する。そして、最後に Antibubble が生成するまでの時間を導出する。

なお、この節の第 3.5 項は生成過程モデル【図 4】の①～③に対応している。

3.5.1 剛体近似

U と t_h の導出

jet の底面が液面に到達するまでの間はエネルギー保存が成り立つとすると、jet の底面が高さ h から液面に到達するまでの時間 t_h 、およびそのときの速度 U は、次のようになる。

$$t_h = \sqrt{\frac{2h}{g}}, \quad U = \sqrt{2gh} \quad (84)$$

t_s の導出

Navier-Stokes 方程式

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \frac{\mu}{\rho} \nabla^2 \mathbf{u} + \mathbf{g}$$

と連続の式 [式 (15)]、境界条件 [式 (16)] において、まず表面粒子の影響を内部粒子も受けるとすると、

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = & -\frac{1}{\rho} \partial_r p \mathbf{e}_r + \frac{\mu}{\rho} \nabla^2 \mathbf{u} + \mathbf{g} \\ & - \frac{2r_s(z, t)\gamma}{\rho R^2 l_f} \mathbf{e}_z - \frac{g}{R^2 l_f} \left(\int_0^z r_s^2(z, t) dz \right) \end{aligned}$$

となる。ここで、液面を原点 $z = 0$ 、jet の底面が液面に到達した時間を $t = 0$ とおく。 l_f は jet の初期の高さ、 r_s は側面表面を表している。また右辺第 4 項は側面にはたらく表面張力を、第 5 項は浮力を示している。

さらに、表面は円柱 $[r_s(z, t) \simeq R]$ 、Stokes 近似 $[\mu \nabla^2 \mathbf{u} \simeq -\sigma \mathbf{u}]$ 、剛体 $[\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{u}(t) \rightarrow \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \frac{d\mathbf{u}}{dt}, \partial_r p = 0]$ として両辺を体積積分すれば、jet の運動方程式は次の剛体円柱の運動方程式に帰着される。

$$m\ddot{z} = mg - \sigma\dot{z} - 2\pi R \cdot 2\gamma - \rho\pi R^2 gz \quad (85)$$

σ は形状抵抗係数である。また、このとき、空気膜による浮力も考えられるが、第 2.3 章より膜の厚さは $O(10^{-6})[\text{m}]$ であるから、[膜の浮力] $\simeq O(10^{-6}) \ll 1$ より、無視した。

式 (85) は l_f と z の関係によって二つの方程式に分かれる。つまり、次のようになる。

$$\begin{aligned} m\ddot{z} &= mg - \sigma\dot{z} - 2\pi R \cdot 2\gamma - \rho\pi R^2 gz & (l_f > z) \\ m\ddot{z} &= -\sigma\dot{z} & (l_f < z) \end{aligned}$$

今の場合は、 $l_f > z$ の範囲のみを考えれば良い。

$$\begin{aligned} \rho\pi R^2 l_f \ddot{z} &= \rho\pi R^2 l_f g - \sigma\dot{z} - 2\pi R \cdot 2\gamma - \rho\pi R^2 gz \\ \ddot{z} + \frac{\sigma}{m}\dot{z} + \frac{g}{l_f}z &= g - \frac{4\gamma}{\rho R l_f} \end{aligned} \quad (86)$$

この右辺は ([重力] - [表面張力]) / [質量] を表している。

さて、方程式 (86) の特解 z_0 は

$$z_0 = l_f - \frac{4\gamma}{\rho R g} \quad (87)$$

また、

$$\ddot{z}_1 + \frac{\sigma}{m}\dot{z}_1 + \frac{g}{l_f}z_1 = \ddot{z}_1 + 2C\dot{z}_1 + Dz_1 = 0$$

について $z_1 = Be^{At}$ とすると、

$$\begin{aligned} A^2 + 2CA + D &= 0 \\ \Rightarrow A &= -C \pm \sqrt{C^2 - D} \end{aligned}$$

となる。

$$\begin{aligned} A_1 &= -C + \sqrt{C^2 - D} \\ A_2 &= -C - \sqrt{C^2 - D} \end{aligned}$$

とおくと、

$$z_1 = B_1 e^{A_1 t} + B_2 e^{A_2 t} \quad (88)$$

となる。したがって、 z の一般解は定数 B_1 、 B_2 を用いて次のように書ける。

$$\begin{aligned} z &= z_0 + z_1 \\ &= B_1 e^{A_1 t} + B_2 e^{A_2 t} + l_f - \frac{4\gamma}{\rho R g} \end{aligned} \quad (89)$$

ここで、 $C^2 - D = \left(\frac{\sigma}{2\pi\rho R^2 l_f} \right)^2 - \frac{g}{l_f}$ の正負によって、 z が振動するかどうかが決まる。そこで、 σ に具体的な値を代入する。

今、形状抵抗係数 σ を平板のものに近似すると、

$$\sigma = 16\mu R$$

とおける⁴。よって、

$$\left(\frac{\sigma}{2\pi\rho R^2 l_f} \right)^2 - \frac{g}{l_f} = \left(\frac{8\mu}{\rho\pi R l_f} \right)^2 - \frac{g}{l_f}$$

となる。

具体的に、 $\mu = 8.3 \times 10^{-3} [\text{kg}/(\text{m} \cdot \text{s})]$ 、 $\rho = 9.982 \times 10^2 [\text{kg}/\text{m}^3]$ 、 $l_f = l_1 = 3.51 \times 10^{-2} [\text{m}]$ 、そして $R = 2.5 \times 10^{-3} [\text{m}]$ を代入すると、

$$\left(\frac{8\mu}{\rho\pi R l_f} \right)^2 - \frac{g}{l_f} < 0$$

となる。

したがって、 $A = -C \pm \sqrt{C^2 - D} = -C \pm i\sqrt{D - C^2} = -C \pm i\omega$ とおけるので、

$$\begin{aligned} z &= l_f - \frac{4\gamma}{\rho R g} + e^{-Ct} (B_1 e^{i\omega t} + B_2 e^{-i\omega t}) \\ &= l_f - \frac{4\gamma}{\rho R g} + e^{-Ct} [(B_1 + B_2) \cos \omega t + i(B_1 - B_2) \sin \omega t] \end{aligned} \quad (90)$$

となる。

初期条件 $t = 0$ で $z = 0$ より、

$$0 = l_f - \frac{4\gamma}{\rho R g} + (B_1 + B_2) \quad (91)$$

となり、また、 $t = 0$ で $\dot{z} = U$ であるから、

$$U = -C(B_1 + B_2) + i\omega(B_1 - B_2) \quad (92)$$

となる。

これらより、

$$\begin{aligned} B_1 + B_2 &= -\left(l_f - \frac{4\gamma}{\rho R g} \right) \equiv -L \\ i(B_1 - B_2) &= \frac{1}{\omega}(U - CL) \end{aligned}$$

となり、 z の一般解は次のようになる。

$$\begin{aligned} z &= L + e^{-Ct} \left[-L \cos \omega t + \frac{1}{\omega}(U - CL) \sin \omega t \right] \\ &= L \left[1 - e^{-Ct} \left(\cos \omega t + \frac{C}{\omega} \sin \omega t \right) \right] + \frac{U}{\omega} e^{-Ct} \sin \omega t \end{aligned} \quad (93)$$

⁴実際は円柱の形状抵抗係数を用いる必要がある。しかし、その場合の形状抵抗係数は z の関数となっており、計算が複雑になるため、本研究では平板の形状抵抗係数を用いた。

jet の底面が、ある深さ $z = s$ まで沈みこむのとき時間を $t = t_s$ とすると、

$$\begin{aligned} s &= L - Le^{-Ct_s} \left[\cos \omega t_s + \frac{C}{\omega} \sin \omega t_s \right] + \frac{U}{\omega} e^{-Ct_s} \sin \omega t_s \\ 0 &= Le^{-Ct_s} \left(\cos \omega t_s + \frac{C}{\omega} \sin \omega t_s \right) - (L - s) - \frac{U}{\omega} e^{-Ct_s} \sin \omega t_s \end{aligned} \quad (94)$$

となる。

ここで、 $t_s \ll 1$ として、 $e^{-Ct_s} \simeq 1 - Ct_s + \frac{1}{2}C^2t_s^2$ 、 $\cos \omega t_s \simeq 1 - \frac{1}{2}\omega^2t_s^2$ 、 $\sin \omega t_s \simeq \omega t_s$ と近似すると、式 (94) は、

$$\begin{aligned} 0 &\simeq L \left(1 - Ct_s + \frac{1}{2}C^2t_s^2 \right) \left(1 - \frac{1}{2}\omega^2t_s^2 + Ct_s \right) - (L - s) - \frac{U}{\omega} \left(1 - Ct_s + \frac{1}{2}C^2t_s^2 \right) \omega t_s \\ &\simeq L \left(1 + Ct_s - \frac{1}{2}\omega^2t_s^2 - Ct_s - C^2t_s^2 + \frac{1}{2}C^2t_s^2 \right) - (L - s) - Ut_s + UCt_s^2 \\ &= \left(-\frac{LD}{2} + UC \right) t_s^2 - Ut_s + s \end{aligned}$$

となる。

したがって、jet の底面が液面表面から $z = s$ まで沈み込むのに要する時間 t_s は、次のようになる。

$$\begin{aligned} t_s &= \frac{-U + \sqrt{U^2 + 2s(LD - 2UC)}}{LD - 2UC} \\ &= \frac{-U + \left\{ U^2 + 2s \left[\left(g - \frac{4\gamma}{\rho Rl_f} \right) - \frac{32\mu U}{\rho\pi Rl_f} \right] \right\}^{\frac{1}{2}}}{\left(g - \frac{4\gamma}{\rho Rl_f} \right) - \frac{32\mu U}{\rho\pi Rl_f}} \\ &= \frac{-\rho\pi Rl_f U + \sqrt{(\rho\pi Rl_f)^2 (U^2 + 2sg) - 8\rho\pi Rsl_f(\pi\gamma + 8\mu U)}}{\rho\pi Rl_f g - 4\pi\gamma - 32\mu U} \end{aligned} \quad (95)$$

この式 (95) において、

s を $(2R + \lambda_{\max}) \equiv n$ とすれば、jet の底面が液面から n まで沈み込む時間 t_n

s を l_m とすれば、jet の底面が液面から l_m まで沈み込む時間 t_{lm}

が、導出される。

3.5.2 Antibubble の生成時間

Antibubble が生成されるまでの時間 T は、次のようになる。

$$T = t_h + t_n + \tau \quad (96)$$

3.6 各パラメータの理論値

具体的に、不安定が最大となる位相 $\eta_{\max}$ 、最大の不安定波長 $\lambda_{\max}$ 、Antibubble の最大半径 r_{AB} 、Antibubble 生成に必要な jet の高さ l_1 、jet の底面が高さ h から液面に到達するまでの時間 t_h 、液面に到達したときの速度 U 、時定数 τ 、jet の底面が液面から $(2R + \lambda_{\max}) \equiv n$ まで沈み込む時間 t_n 、Antibubble が生成されるまでの時間 T を導出する。

3.6.1 具体的な理論値

粘性係数、密度、表面張力係数はそれぞれ

$$\begin{aligned}\langle \text{粘性係数} \rangle \mu &= 8.3 \times 10^{-3} [\text{kg}/(\text{m} \cdot \text{s})] \\ \langle \text{密度} \rangle \rho &= 9.982 \times 10^2 [\text{kg}/\text{m}^3] \\ \langle \text{表面張力係数} \rangle \gamma &= 2.6 \times 10^{-2} [\text{kg}/\text{s}^2]\end{aligned}$$

とする。jet の半径 R を $R = 2.5 \times 10^{-3} [\text{m}]$ とした。また、初期の jet の高さ l_f は $l_f = l_1$ と $l_f = l_2$ の二つを考える。 l_1 は最大半径の Antibubble の生成に最低限必要な jet の高さ、 l_2 は Antibubble の生成において、くびれの数 (Antibubble の個数) が 2 で r_{ab} が最大となるときの jet の高さである⁵。

$\lambda_{\max}, r_{AB}, r_{ab(\max)}, \tau$ の理論値

上記の値を代入すると、以下ようになる。

$$\begin{aligned}\chi &= \frac{\mu}{\sqrt{2\rho\gamma R}} = 2.30 \times 10^{-2} \\ \eta_{\max} &= [2 + 8\chi]^{-\frac{1}{2}} = 6.77 \times 10^{-1} \\ \lambda_{\max} &= \frac{2\pi}{\eta_{\max}} R = YR = 9.29R = 2.32 \times 10^{-2} [\text{m}] \\ \tau &= \frac{2R(4\mu + \sqrt{2\rho R\gamma})}{\gamma} = 7.57 \times 10^{-2} [\text{s}] \\ r_{AB} &= \frac{R}{2} \left(32 + \frac{9}{2}Y \right)^{\frac{1}{3}} = 5.24 \times 10^{-3} [\text{m}] \\ r_{ab(\max)} &= \frac{R}{2} (3Y)^{\frac{1}{3}} = 3.79 \times 10^{-3} [\text{m}] \\ n &= 2R + \lambda_{\max} = 2.82 \times 10^{-2} [\text{m}] \\ l_1 &= R \left(\frac{16}{3} + \frac{15}{16}Y \right) = 3.51 \times 10^{-2} [\text{m}] \\ l_2 &= R \left(\frac{16}{3} + \frac{21}{16}Y \right) = 4.38 \times 10^{-2} [\text{m}]\end{aligned}$$

⁵本モデルはくびれの数 が 3 以上でも成り立つが、実際にそうなることは少ないため、2 までで考えることにする。

上記以外のパラメータ (U, t_h, t_n, T) は、液面から jet 底面までの初期の高さ h に依存する。そこで、 h を

1. $h = 8.0 \times 10^{-3}[\text{m}]$
2. $h = 0[\text{m}]$

として、それぞれについて理論値を導出する。

$h = 8 \times 10^{-3}[\text{m}]$ の場合

まず、高さ h の位置から jet を落下させた場合を考える。

$[t_h, U$ の理論値]

式 (84) より、次のようになる。

$$U = 3.96 \times 10^{-2}[\text{m/s}]$$

$$t_h = 4.04 \times 10^{-2}[\text{s}]$$

$[R = 2.5 \times 10^{-3} [\text{m}]$ でのパラメータの理論値]

理論値を導出すると次のようになる。

$$t_n(l_f = l_1) = 4.76 \times 10^{-2}[\text{s}]$$

$$T(l_f = l_1) = t_h + t_n(l_f = l_1) + \tau = 1.64 \times 10^{-1}[\text{s}]$$

$$t_n(l_f = l_2) = 4.72 \times 10^{-2}[\text{s}]$$

$$T(l_f = l_2) = t_h + t_n(l_f = l_2) + \tau = 1.63 \times 10^{-1}[\text{s}]$$

[数値計算]

式 (94) を計算するにあたり、 $t_s \ll 1$ より、 e^{-Ct_s} 、 $\sin \omega t_s$ 、 $\cos \omega t_s$ を t_s の 2 次の項まで取るように近似した。しかし、実際は $\omega t_s = t_s/\tau \sim 1$ より、 $\sin \omega t_s$ 、 $\cos \omega t_s$ に関して ωt_s を微小とするような近似を行うことは適切でない。したがって、式 (94) を数値計算する必要がある。

$t_n(l_f = l_1)$ 、 t_{l1} 、 $T(l_f = l_1)$ 、 $t_n(l_f = l_2)$ 、 t_{l2} 、 $T(l_f = l_2)$ を数値計算から導出すると次のようになる。

$$t_n(l_f = l_1) = 5.71 \times 10^{-2}[\text{s}]$$

$$t_{l1} = 6.99 \times 10^{-2}[\text{s}]$$

$$T(l_f = l_1) = t_h + t_n(l_f = l_1) + \tau = 1.73 \times 10^{-1}[\text{s}]$$

$$t_n(l_f = l_2) = 5.31 \times 10^{-2}[\text{s}]$$

$$t_{l2} = 8.00 \times 10^{-2}[\text{s}]$$

$$T(l_f = l_2) = t_h + t_n(l_f = l_2) + \tau = 1.69 \times 10^{-1}[\text{s}]$$

以下の議論では、この数値計算の結果を用いることにする。

$h = 0[\text{m}]$ の場合

次に、液面表面から jet を落下させる状況を考える⁶。

 $[t_h, U]$ の理論値

$h = 0$ より、 $U = 0$ 、 $t_h = 0$ である。

 $[R = 2.5 \times 10^{-3}[\text{m}]$ でのパラメータの理論値

理論値を導出すると次のようになる。

$$\begin{aligned} t_n(l_f = l_1) &= 8.09 \times 10^{-2}[\text{s}] \\ T(l_f = l_1) &= t_h + t_n(l_f = l_1) + \tau = 1.57 \times 10^{-1}[\text{s}] \\ t_n(l_f = l_2) &= 7.98 \times 10^{-2}[\text{s}] \\ T(l_f = l_2) &= t_h + t_n(l_f = l_2) + \tau = 1.55 \times 10^{-1}[\text{s}] \end{aligned}$$

[数値計算]

前述と同様の理由から数値計算を行う。

$t_n(l_f = l_1)$ 、 t_{l1} 、 $T(l_f = l_1)$ 、 $t_n(l_f = l_2)$ 、 t_{l2} 、 $T(l_f = l_2)$ を数値計算から導出すると次のようになる。

$$\begin{aligned} t_n(l_f = l_1) &= 1.148 \times 10^{-1}[\text{s}] \\ t_{l1} &= 1.327 \times 10^{-1}[\text{s}] \\ T(l_f = l_1) &= t_h + t_n(l_f = l_1) + \tau = 1.90 \times 10^{-1}[\text{s}] \\ t_n(l_f = l_2) &= 9.82 \times 10^{-2}[\text{s}] \\ t_{l2} &= 1.296 \times 10^{-1}[\text{s}] \\ T(l_f = l_2) &= t_h + t_n(l_f = l_2) + \tau = 1.74 \times 10^{-1}[\text{s}] \end{aligned}$$

以下の議論では、この数値計算の結果を用いることにする。

モデルの特徴

まず、 h を固定して l_f を変化させる。その場合、変化するのは t_n のみであり、それは $l_f = l_1$ に比べて $l_f = l_2$ の方が小さくなっていることがわかる。

次に、 l_f を固定して h を変化させる。 h を 0 に近づけると、 t_h は 0 に近づき、 t_n は大きくなる。また、Antibubble の生成時間は h が小さい方が長くなることがわかる。

⁶この状況は、現実には起こりにくい。

3.6.2 Antibubble の個数

ここで、 $2R + m\lambda_{\max}$ と、jet を剛体円柱としたときに $t_n + \tau$ の時間で沈み込んだ深さ $z(t_n + \tau)$ を比較する。その比較によって、

- $z(t_n + \tau) \geq 2R + m\lambda_{\max}$ ならば、
jet が沈み込んでくびれる前に、jet が m 個のくびれをもつために必要な深さまで沈む
⇒ jet が m 個のくびれをもち得る
⇒ m 個の Antibubble が生成し得る
- $z(t_n + \tau) < 2R + m\lambda_{\max}$ ならば、
jet が m 個のくびれをもつために必要な深さまで沈む前に、Antibubble が生成される
⇒ jet が $m - 1$ 個のくびれをもち得る
⇒ $m - 1$ 個の Antibubble が生成し得る

ということがわかる。

特に $m = 1$ のときに関しては、 $2R + \lambda_{\max}$ と $z(t_n + \tau)$ を比較することで、

- $z(t_n + \tau) \geq 2R + \lambda_{\max}$ ならば、
jet が沈み込んでくびれる前に、jet が一つのくびれをもつために必要な深さまで沈む
⇒ Antibubble は生成される
- $z(t_n + \tau) < 2R + \lambda_{\max}$ ならば、
jet が一つのくびれをもつために必要な深さまで沈まない
⇒ Antibubble が生成されない

といえる【図 8】。

まず、 $2R + m\lambda_{\max}$ を $m = 1, 2, 3$ について導出すると次のようになる。

$$2R + \lambda_{\max} = n = 2.82 \times 10^{-2} [\text{m}]$$

$$2R + 2\lambda_{\max} = 4.89 \times 10^{-2} [\text{m}]$$

$$2R + 3\lambda_{\max} = 7.21 \times 10^{-2} [\text{m}]$$

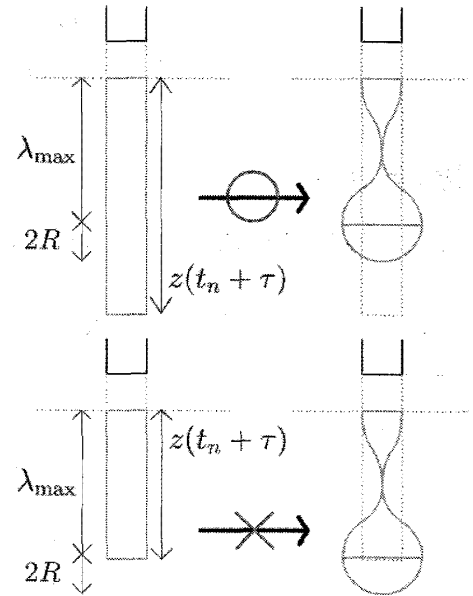


図 8: $m = 1$ のとき

次に $8 \times 10^{-3} [\text{m}]$ 、 $h = 0 [\text{m}]$ のそれぞれについて z を計算すると、次のようになる。

$[h = 8 \times 10^{-3} [\text{m}]]$ のとき

$$z(t_n(l_f = l_1) + \tau) = 6.27 \times 10^{-2} [\text{m}]$$

$$z(t_n(l_f = l_2) + \tau) = 7.17 \times 10^{-2} [\text{m}]$$

$[h = 0 [\text{m}]]$ のとき

$$z(t_n(l_f = l_1) + \tau) = 5.31 \times 10^{-2} [\text{m}]$$

$$z(t_n(l_f = l_2) + \tau) = 6.33 \times 10^{-2} [\text{m}]$$

$z(t_n(l_f = l_2) + \tau)$ に関しては、 $h = 8 \times 10^{-3}[\text{m}]$ 、 $h = 0[\text{m}]$ のどちらについても $2R + 2\lambda_{\max}$ より大きく、 $2R + 3\lambda_{\max}$ より小さい。したがって、この状況では、Antibubble の生成の過程で二つのくびれが生じる可能性があることが示された。

$z(t_n(l_f = l_1) + \tau)$ に関しても同様で、 $h = 8 \times 10^{-3}[\text{m}]$ 、 $h = 0[\text{m}]$ のどちらについても $2R + 2\lambda_{\max}$ より大きく、 $2R + 3\lambda_{\max}$ より小さいという結果が得られた。しかし、この場合、最大半径をもつ Antibubble が一個できるために最低限必要な量を考えているため、くびれはひとつであると考えられる。

3.6.3 モデルの妥当性

$t_n(l_f = l_1)$ と時定数 τ の和と t_{l1} の比較を行う。その比較によって、

- $t_n(l_f = l_1) + \tau \geq t_{l1}$ ならば、
jet が沈み込んでくびれる前に、Antibubble 生成に必要な jet 量が沈む
⇒ Antibubble は生成される (モデルとして妥当)
- $t_n(l_f = l_1) + \tau < t_{l1}$ ならば、
Antibubble 生成に必要な jet 量が沈む前に、jet がくびれる
⇒ Antibubble が生成されない (モデルとして不適当)

ということがわかる。

$[h = 0[\text{m}]]$ のとき

数値計算の結果から $s = l_f = l_1 = 3.51 \times 10^{-2}[\text{m}]$ のとき、

$$t_{l1} = 1.33 \times 10^{-1}[\text{s}]$$

となる。

$t_n(l_f = l_1) = 1.15 \times 10^{-1}[\text{s}]$ 、 $\tau = 7.57 \times 10^{-2}[\text{s}]$ より $t_n(l_f = l_1) + \tau > t_{l1}$ であるから、モデルとして妥当である。

$[h = 8 \times 10^{-3}[\text{m}]]$ のとき

数値計算の結果から $s = l_f = l_1 = 3.51 \times 10^{-2}[\text{m}]$ のとき、

$$t_{l1} = 6.99 \times 10^{-2}[\text{s}]$$

となる。

$t_n(l_f = l_1) = 5.71 \times 10^{-2}[\text{s}]$ 、 $\tau = 7.57 \times 10^{-2}[\text{s}]$ より $t_n(l_f = l_1) + \tau > t_{l1}$ であるから、モデルとして妥当である。

3.6.4 Antibubble の半径と各パラメータとの関係

Antibubble の半径は各パラメータを用いて次のように書くことができる。

$$\begin{aligned}
 r_{AB} &= \frac{R}{2} \left(32 + \frac{9}{2} Y \right)^{\frac{1}{3}} = \frac{R}{2} \left(32 + \frac{9}{2} \cdot \frac{2\pi}{\eta_{\max}} \right)^{\frac{1}{3}} \\
 &= \frac{R}{2} \left(32 + 9\pi \sqrt{2 + 8\chi} \right)^{\frac{1}{3}} \\
 &= \frac{R}{2} \left\{ 32 + 9\pi \left[2 + 8 \frac{\mu}{(2\rho R\gamma)^{\frac{1}{2}}} \right]^{\frac{1}{2}} \right\}^{\frac{1}{3}}
 \end{aligned}$$

ここで、Antibubble の半径に対する各パラメータの依存性をみるため、

$$O \equiv 32 + 9\pi \left[2 + 8 \frac{\mu}{(2\rho R\gamma)^{\frac{1}{2}}} \right]^{\frac{1}{2}} \quad P \equiv 2 + 8 \frac{\mu}{(2\rho R\gamma)^{\frac{1}{2}}} \quad Q \equiv 2\rho R\gamma$$

として、 $\partial_R r_{AB}$ 、 $\partial_\rho r_{AB}$ 、 $\partial_\gamma r_{AB}$ 、 $\partial_\mu r_{AB}$ を計算すると、それぞれ次のようになる。

$$\begin{aligned}
 \bullet \partial_R r_{AB} &= \frac{1}{2} O^{\frac{1}{3}} > 0 \quad \Rightarrow \quad R \rightarrow \text{大で } r_{AB} \rightarrow \text{大} \\
 \bullet \partial_\rho r_{AB} &= \frac{R}{2} \cdot \frac{1}{3} O^{-\frac{2}{3}} \cdot \frac{9\pi}{2} P^{-\frac{1}{2}} \left(-\frac{1}{2} \right) 2R\gamma Q^{-\frac{3}{2}} < 0 \\
 &\quad \Rightarrow \quad \rho \rightarrow \text{大で } r_{AB} \rightarrow \text{小} \\
 \bullet \partial_\gamma r_{AB} &= \frac{R}{2} \cdot \frac{1}{3} O^{-\frac{2}{3}} \cdot \frac{9\pi}{2} P^{-\frac{1}{2}} \left(-\frac{1}{2} \right) 2R\gamma Q^{-\frac{3}{2}} < 0 \\
 &\quad \Rightarrow \quad \gamma \rightarrow \text{大で } r_{AB} \rightarrow \text{小} \\
 \bullet \partial_\mu r_{AB} &= \frac{R}{2} \cdot \frac{1}{3} O^{-\frac{2}{3}} \cdot \frac{9\pi}{2} P^{-\frac{1}{2}} \cdot 7 > 0 \quad \Rightarrow \quad \mu \rightarrow \text{大で } r_{AB} \rightarrow \text{大}
 \end{aligned}$$

それぞれの結果について考えてみる。

まず、jet の半径が大きくなると、Antibubble の半径が大きくなることは現象観察でも明らかなので妥当である。

また、表面張力が大きくなれば、表面積を小さくする力が大きくなるため Antibubble の半径が小さくなると考えられる。

しかし、粘性係数が大きくなると Antibubble の半径が大きくなるという結果は、定性的に考えることは難しい。実験の結果から考察する必要がある。

4 実験との比較と議論

第3.6節で粘性係数 $\mu = 8.3 \times 10^{-3} [\text{kg}/(\text{m} \cdot \text{s})]$ 、密度 $\rho = 9.982 \times 10^2 [\text{kg}/\text{m}^3]$ 、表面張力係数 $\gamma = 2.6 \times 10^{-2} [\text{kg}/\text{s}^2]$ 、jet の半径 $R = 2.5 \times 10^{-3} [\text{m}]$ として導出した理論値をまとめると、次のようになる。

$$\begin{aligned}\lambda_{\max} &= 9.29R = 2.32 \times 10^{-2} [\text{m}] \\ \tau &= \frac{2R(4\mu + \sqrt{2\rho R\gamma})}{\gamma} = 7.57 \times 10^{-2} [\text{s}] \\ r_{AB} &= \frac{R}{2} \left(32 + \frac{9}{2}Y \right)^{\frac{1}{3}} = 5.24 \times 10^{-3} [\text{m}] \\ r_{ab(\max)} &= \frac{R}{2} (3Y)^{\frac{1}{3}} = 3.79 \times 10^{-3} [\text{m}] \\ n &= 2R + \lambda_{\max} = 2.82 \times 10^{-2} [\text{m}] \\ l_1 &= R \left(\frac{16}{3} + \frac{15}{16}Y \right) = 3.51 \times 10^{-2} [\text{m}] \\ l_2 &= R \left(\frac{16}{3} + \frac{21}{16}Y \right) = 4.38 \times 10^{-2} [\text{m}]\end{aligned}$$

$[h = 8 \times 10^{-3} [\text{m}] \text{ のとき}]$

$$\begin{aligned}U &= 3.96 \times 10^{-2} [\text{m/s}] \\ t_h &= 4.04 \times 10^{-2} [\text{s}] \\ t_n(l_f = l_1) &= 5.71 \times 10^{-2} [\text{s}] \\ T(l_f = l_1) &= t_h + t_n(l_f = l_1) + \tau = 1.73 \times 10^{-1} [\text{s}] \\ t_n(l_f = l_2) &= 5.31 \times 10^{-2} [\text{s}] \\ T(l_f = l_2) &= t_h + t_n(l_f = l_2) + \tau = 1.69 \times 10^{-1} [\text{s}]\end{aligned}$$

$[h = 0 [\text{m}] \text{ のとき}]$

$$\begin{aligned}U &= 0 [\text{m/s}] \\ t_h &= 0 [\text{s}] \\ t_n(l_f = l_1) &= 1.148 \times 10^{-1} [\text{s}] \\ T(l_f = l_1) &= t_h + t_n(l_f = l_1) + \tau = 1.90 \times 10^{-1} [\text{s}] \\ t_n(l_f = l_2) &= 9.82 \times 10^{-2} [\text{s}] \\ T(l_f = l_2) &= t_h + t_n(l_f = l_2) + \tau = 1.74 \times 10^{-1} [\text{s}]\end{aligned}$$

本章では、これらの理論値と実験との比較を行う。

4.1 理論値と実験値の比較

高速度カメラ (CASIO EXILIM EX-F1) を用いて、実験を行った⁶。

$h = 8 \times 10^{-3}[\text{m}]$ 、 $l_f = l_2 = 4.38 \times 10^{-2}[\text{m}]$ の場合

【図 9】に示すサンプルに対しては、次のような結果を得た。

$$t_h = 44.2[\text{ms}]$$

$$t_n = 67.5[\text{ms}]$$

$$\tau = 64.2[\text{ms}]$$

$$T = 175.8[\text{ms}]$$

Antibubble の直径は約 1cm であった。

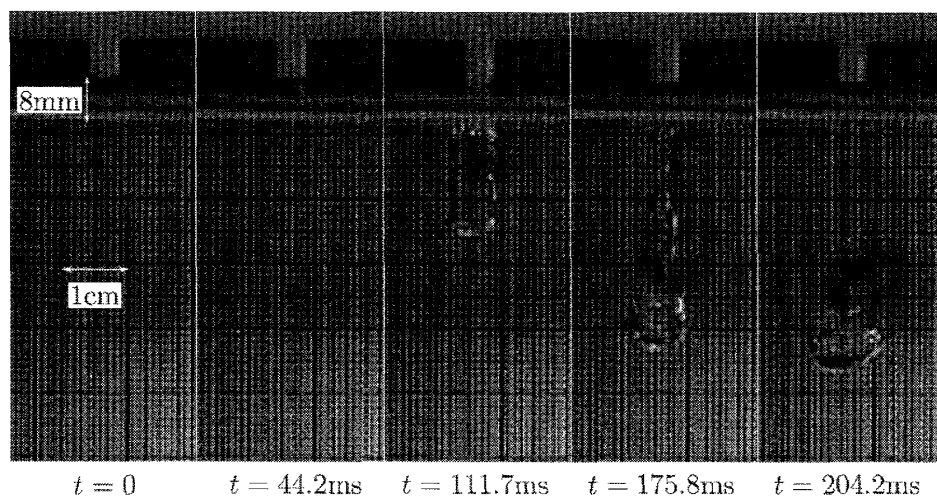


図 9: 実験結果 1

他のサンプルでも同様の傾向が確認でき⁶、誤差を含めると、この初期条件に対する実験値は次のようになる。

$$t_h = 42.1 \pm 3.7[\text{ms}]$$

$$t_n = 66.6 \pm 3.9[\text{ms}]$$

$$\tau = 66.8 \pm 3.2[\text{ms}]$$

$$T = 175.4 \pm 4.4[\text{ms}]$$

一方、これに対応した理論値は次のようになる。

$$t_h = 40.4[\text{ms}]$$

$$t_n = 53.1[\text{ms}]$$

$$\tau = 75.7[\text{ms}]$$

$$T = 169.2[\text{ms}]$$

⁶実験の内容、および他のサンプルについては、付録 A 参照

比較すると、 t_h はかなり近い値になっている。しかし、 t_n については理論値よりも大きく、 τ については理論値よりも小さくなっていることがわかる。Antibubble の半径は理論で予測した値 $5.24 \times 10^{-3}\text{m}$ に近くなっている。

また、この初期状態ではどのサンプルもくびれが二つになり、二個の Antibubble が生成された。これは、第 3.6 節の議論で予想したことと一致している。

$h = 0[\text{m}]$ 、 $l_f = l_2 = 4.38 \times 10^{-2}[\text{m}]$ の場合

【図 10】に示すサンプルに対しては、次のような結果を得た⁷。

$$t_n = 98.3[\text{ms}]$$

$$\tau = 68.3[\text{ms}]$$

$$T = 166.7[\text{ms}]$$

Antibubble の直径は約 1cm であった。

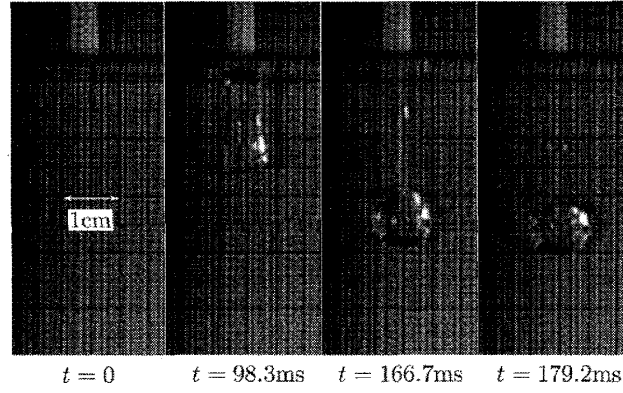


図 10: 実験結果 2

他のサンプルでも同様の傾向が確認でき、誤差を含めると、この初期条件に対する実験値は次のようになる。

$$t_n = 96.4 \pm 3.7[\text{ms}]$$

$$\tau = 72.2 \pm 6.5[\text{ms}]$$

$$T = 168.5 \pm 5.4[\text{ms}]$$

一方、これに対応した理論値は次のようになる。

$$t_n = 98.2[\text{ms}]$$

$$\tau = 75.7[\text{ms}]$$

$$T = 173.9[\text{ms}]$$

⁷実験の場合、 $h = 0$ とするのは困難のため、極力液面に近い高さから落としたものを $h \simeq 0$ として考えることにする。

比較すると、理論値は実験値の誤差の範囲に入っており、かなり近い値になっていることがわかる。Antibubble の半径は理論で予測した値 $5.24 \times 10^{-3}\text{m}$ に近くなっている。

また、この初期状態ではどのサンプルもくびれが二つになり、二個の Antibubble が生成された。これは、第 3.6 節の議論で予想したことと一致している。

$h = 8 \times 10^{-3}[\text{m}]$ 、 $l_f = l_1 = 3.51 \times 10^{-2}[\text{m}]$ の場合

【図 11】に示すサンプルに対しては、次のような結果を得た。

$$t_h = 51.7[\text{ms}]$$

$$t_n = 60.8[\text{ms}]$$

$$\tau = 77.5[\text{ms}]$$

$$T = 190.0[\text{ms}]$$

Antibubble の直径は約 1cm であった。

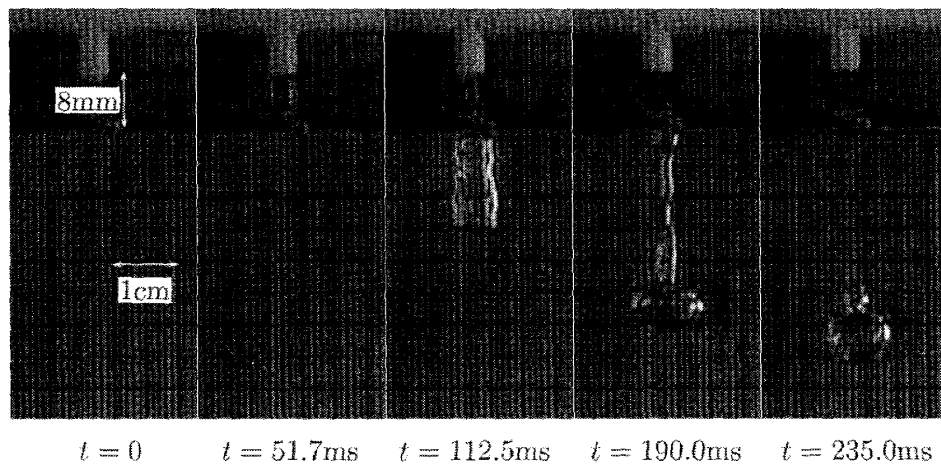


図 11: 実験結果 3

他のサンプルでも同様の傾向が確認でき、誤差を含めると、この初期条件に対する実験値は次のようになる。

$$t_h = 52.4 \pm 3.0[\text{ms}]$$

$$t_n = 61.3 \pm 2.0[\text{ms}]$$

$$\tau = 70.4 \pm 4.7[\text{ms}]$$

$$T = 184.1 \pm 5.6[\text{ms}]$$

一方、これに対応した理論値は次のようになる。

$$t_h = 40.4[\text{ms}]$$

$$t_n = 57.1[\text{ms}]$$

$$\tau = 75.7[\text{ms}]$$

$$T = 173.2[\text{ms}]$$

比較すると、 τ についてはかなり一致しているが、 t_h 、 t_n については実験値の方が理論値よりも大きくなっていることがわかる。Antibubbleの半径は理論で予測した値 $5.24 \times 10^{-3}\text{m}$ に近づいている。

また、この初期状態では多くのサンプルでくびれが二つになり、二個の Antibubble が生成された。

$h = 0[\text{m}]$ 、 $l_f = l_1 = 3.51 \times 10^{-2}[\text{m}]$ の場合

【図 12】に示すサンプルに対しては、次のような結果を得た。

$$t_n = 94.2[\text{ms}]$$

$$\tau = 81.2[\text{ms}]$$

$$T = 175.8[\text{ms}]$$

Antibubble の直径は約 1cm であった。

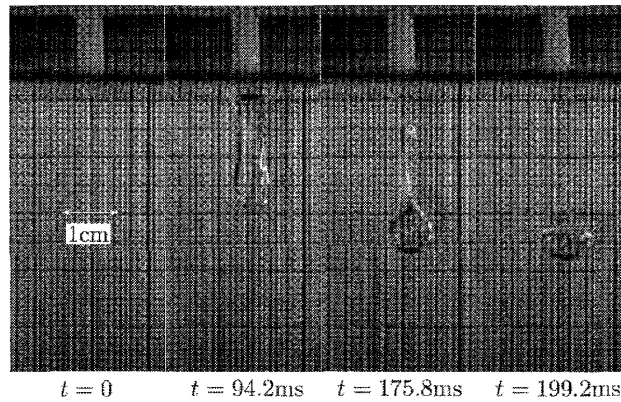


図 12: 実験結果 4

他のサンプルでも同様の傾向が確認でき、誤差を含めると、この初期条件に対する実験値は次のようになる。

$$t_n = 99.6 \pm 7.6[\text{ms}]$$

$$\tau = 78.8 \pm 8.0[\text{ms}]$$

$$T = 178.3 \pm 6.9[\text{ms}]$$

一方、これに対応した理論値は次のようになる。

$$t_n = 114.8[\text{ms}]$$

$$\tau = 75.7[\text{ms}]$$

$$T = 190.4[\text{ms}]$$

比較すると、実験値はどれも理論値より小さくなっていることがわかる。Antibubble の半径は理論で予測した値 $5.24 \times 10^{-3}\text{m}$ に近づいている。

また、この初期状態ではどのサンプルもくびれが二つになり、二個の Antibubble が生成された。

4.2 議論

理論値と実験値のずれの原因として、jet の底面を平面としたこと、形状粘性を円板としたことの二つが大きいと考えられる。

また、 $l_f = l_1$ 、つまり一個の Antibubble を生成するのに最低限必要な量の jet のときでも二つのくびれが多く観測された。したがって、Antibubble の生成に最低限必要な量は、実際は理論値よりも少ないことが予想され、そのこともずれの原因の一つと考えられる。

とはいえ、本研究で導出した理論値と今回行った実験の結果は、線形近似の範囲ではかなり一致しており、その振る舞いの特徴(くびれの数や h および l_f による振る舞いの違いなど)も理論と実験で合っていることから、**本研究で構築したモデルは妥当なものである**といえる。このように簡単なモデルで、比較的良い近似で現象を再現できたことは特筆すべきことであろう。

5 まとめ

本研究では、Antibubble という現象を「剛体」と「流体」の二つの過程に分け、剛体部では「剛体円柱の運動方程式」を、流体部では「jet の安定性解析」を行うことで、Antibubble の生成過程を線形化した簡単なモデルを構築した。そして、そのモデルを用いて、**jet の半径と初期高度から、生成される Antibubble の最大の半径とその生成時間を導出することに成功した。**

さらに、そのモデルを用いて導出された時間に関する理論値と実験値との比較を行い、モデルの妥当性を考えた。その結果、生成時間や半径などは全体的にオーダーが一緒であり、**線形近似の範囲ではかなり一致している**ことが示された。また、理論的にくびれ数を予測したが、それが実験的に示された。線形近似で導出した理論値と実験値がこれだけ一致することは驚くべきことであり、本研究で構築したモデルは Antibubble の生成過程をうまく表していると考えられる。

しかし、この理論値と実験値の一致は、あくまで線形近似の範囲である。例えば、jet の底面が液面に到達してから沈み込むまでの様子において、モデルでは「円柱形の jet がある深さまで潜り込んでからくびれる」としているが、実際はそうではない。したがって、底面を半球にする、形状抵抗係数は円板ではなく円柱のものを用いる、体積保存と臨界体積を考慮するなど、実際の現象により近い状態でモデルの構築を行う必要がある。また、本研究で構築したモデルには Stokes 近似を用いたが、実際の現象に近いモデルを構築するには線形近似ではなく、より複雑な非線形方程式を解くことが必要であろう。

本研究の生成過程モデルは、Antibubble を対象として構築した。しかし、このモデルは、粘性比、密度比を変えることで、内部と外部が異なる液体の沈み込みにも用いることができる。そのモデルが実際の現象をどこまであらわすことができるかにも非常に興味がある。

謝辞

本研究を進めるにあたり、多くの方々にご協力いただきました。

小西哲郎准教授には、学部生のころから多大なご指導をいただき、Antibubble を研究する機会と環境を与えていただきました。野崎一洋教授にはコロキウムの際に、大変有意義な助言をい

いただきました。お二人の指導と助言があったからこそ、ここまで研究することができたと思っています。

また、実験に際しましては、榎本義之氏に高速度カメラ (CASIO EXILIM EX-F1) を快く貸していただきました。そのおかげで Antibubble をより詳しく解析することができました。深く感謝いたします。

そして、巖佐正智氏、武居佑二氏には、大学院生活にあたって私の研究をずっと支えていただきました。ときには議論を通して非常に貴重な意見をくださり、ときにはビールやコーヒーで Antibubble ができることを確認するための現象観察や Antibubble の生成の解析を快く手伝ってくださいました。お二人のおかげで、楽しく充実した研究生活を送ることができました。本当にありがとうございました。

その他にも多くの方に支えていただきました。この場を借りて心より感謝申し上げます。

参考文献

- [1] Y. Amarouchene, G. Cristobal, and H. Kellay. *Noncoalescing Drops*, Phys. Rev. Lett. **87**, 206104 (2002)
- [2] S. Dorbolo, H. Caps and N Vandewalle. *Fluid instabilities in the birth and death of antibubbles*, New Journal of Physics **5**, 161.1-161.9 (2003)
- [3] S. Dorbolo, E. Reyssat, N Vandewalle and D. Quéré. *Aging of an antibubble*, Europhys. Lett. **69**, 996-970 (2005)
- [4] P. Geon Kim, Jerusha Vogel. *Antibubbles: Factors that affect their stability*, Physicochem. Eng. Aspects **289**, 237-244 (2006)
- [5] P. G. Kim and H. A. Stone. *Dynamics of the formation of antibubbles*, European Physical Letter **83**, 54001 (2008)
- [6] Veniamin G. Levich. *Physicochemical Hydrodynamics*, Prentice-Hall, Inc. Englewood Cliff, N. J.(1962)
- [7] H. Lamb 著 『流体力学 2』 第2版 東京図書 (1981)
- [8] S. Tomotika. *On the Instability of a Cylindrical Thread of a Viscous Liquid surrounded by Another Viscous Fluid*, Proc. Roy. Soc. **153**, 322 (1935)
- [9] C. M. Kinoshita, H. Teng, and S. M. Masutani. *A Study of the Instability of Liquid Jets and Comparison with Tomotika's Analysis*, Int. J. Multiphase Flow **20**, 523-533 (1994)
- [10] エリ・ランダウ, イェ・リフシッツ著 『流体力学 1』 第22版 東京書籍 (1998)
- [11] de Gennes, Brochard-Wyart, and Quéré 著 『表面張力の物理学-しずく、あわ、みずたま、さざなみの世界-』 第2版 吉岡書店 (2004)
- [12] H. Lamb 著 『流体力学 3』 第1版 東京図書 (1988)
- [13] 神部勉、P.G.Drazin 著 『流体力学 安定性と乱流』 第2版 東京図書 (2004)
- [14] C.T. Nadovich. *Antibubbles* [<http://www.antibubble.org/>] (2002)

A 実験

ここでは、本研究で行った実験の内容、およびその結果を示す。

実験内容

水(水道水)400mlに、台所用洗剤2.5mlを溶解させた溶液を用いる。半径(内径)2.5mmのストローを用いて、液面上方8mm、または0mmから $l_f = l_2 = 4.38 \times 10^{-2}\text{m}$ 、および $l_f = l_1 = 3.51 \times 10^{-2}\text{m}$ のjetを滴下し、Antibubbleを生成させる。その生成の様子を高速度カメラ(CASIO EXILIM EX-F1)を用いて、1200frame/sで撮影し、Antibubbleの生成時間(t_h 、 t_n 、 τ 、 T)の解析を行う。【図13】

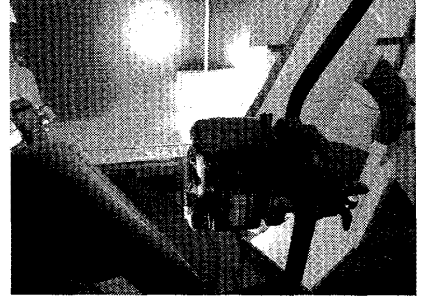


図13: 実験装置

実験結果

$h = 8[\text{mm}]$ 、 $l_f = l_2 = 4.38 \times 10^{-2}[\text{m}]$ のとき

- (1) $t_h = 50.0[\text{ms}]$ 、 $t_n = 59.2[\text{ms}]$ 、 $\tau = 67.5[\text{ms}]$ 、 $T = 176.7[\text{ms}]$
- (2) $t_h = 43.3[\text{ms}]$ 、 $t_n = 64.2[\text{ms}]$ 、 $\tau = 65.8[\text{ms}]$ 、 $T = 173.3[\text{ms}]$
- (3) $t_h = 39.2[\text{ms}]$ 、 $t_n = 70.8[\text{ms}]$ 、 $\tau = 64.2[\text{ms}]$ 、 $T = 174.2[\text{ms}]$
- (4) $t_h = 40.0[\text{ms}]$ 、 $t_n = 69.2[\text{ms}]$ 、 $\tau = 66.7[\text{ms}]$ 、 $T = 175.8[\text{ms}]$
- (5) $t_h = 39.2[\text{ms}]$ 、 $t_n = 64.2[\text{ms}]$ 、 $\tau = 65.0[\text{ms}]$ 、 $T = 168.3[\text{ms}]$
- (6) $t_h = 44.2[\text{ms}]$ 、 $t_n = 67.5[\text{ms}]$ 、 $\tau = 64.2[\text{ms}]$ 、 $T = 175.8[\text{ms}]$
- (7) $t_h = 40.8[\text{ms}]$ 、 $t_n = 67.5[\text{ms}]$ 、 $\tau = 66.7[\text{ms}]$ 、 $T = 175.0[\text{ms}]$
- (8) $t_h = 40.0[\text{ms}]$ 、 $t_n = 70.0[\text{ms}]$ 、 $\tau = 74.2[\text{ms}]$ 、 $T = 184.2[\text{ms}]$

$$t_h = 42.1 \pm 3.7[\text{ms}]、t_n = 66.6 \pm 3.9[\text{ms}]、\tau = 66.8 \pm 3.2[\text{ms}]、T = 175.4 \pm 4.4[\text{ms}]$$

本論文では、(6)の結果を記してある。

$h = 0[\text{mm}]$ 、 $l_f = l_2 = 4.38 \times 10^{-2}[\text{m}]$ のとき

- (1) $t_n = 95.0[\text{ms}]$ 、 $\tau = 70.8[\text{ms}]$ 、 $T = 165.8[\text{ms}]$
- (2) $t_n = 93.3[\text{ms}]$ 、 $\tau = 70.8[\text{ms}]$ 、 $T = 164.2[\text{ms}]$
- (3) $t_n = 100.8[\text{ms}]$ 、 $\tau = 66.7[\text{ms}]$ 、 $T = 167.5[\text{ms}]$
- (4) $t_n = 100.0[\text{ms}]$ 、 $\tau = 63.3[\text{ms}]$ 、 $T = 163.3[\text{ms}]$
- (5) $t_n = 99.2[\text{ms}]$ 、 $\tau = 80.8[\text{ms}]$ 、 $T = 180.0[\text{ms}]$
- (6) $t_n = 90.8[\text{ms}]$ 、 $\tau = 81.7[\text{ms}]$ 、 $T = 172.5[\text{ms}]$
- (7) $t_n = 98.3[\text{ms}]$ 、 $\tau = 68.3[\text{ms}]$ 、 $T = 166.7[\text{ms}]$

$$(8) \ t_n = 93.3[\text{ms}], \ \tau = 75.0[\text{ms}], \ T = 168.3[\text{ms}]$$

$$t_n = 96.4 \pm 3.7[\text{ms}], \ \tau = 72.2 \pm 6.5[\text{ms}], \ T = 168.5 \pm 5.4[\text{ms}]$$

本論文では、(7) の結果を記してある。

$h = 8[\text{mm}]$ 、 $l_f = l_1 = 3.51 \times 10^{-2}[\text{m}]$ のとき

$$(1) \ t_h = 50.8[\text{ms}], \ t_n = 63.3[\text{ms}], \ \tau = 74.2[\text{ms}], \ T = 188.3[\text{ms}]$$

$$(2) \ t_h = 51.7[\text{ms}], \ t_n = 61.7[\text{ms}], \ \tau = 74.2[\text{ms}], \ T = 187.5[\text{ms}]$$

$$(3) \ t_h = 54.2[\text{ms}], \ t_n = 63.3[\text{ms}], \ \tau = 71.7[\text{ms}], \ T = 189.2[\text{ms}]$$

$$(4) \ t_h = 53.3[\text{ms}], \ t_n = 59.2[\text{ms}], \ \tau = 65.0[\text{ms}], \ T = 177.5[\text{ms}]$$

$$(5) \ t_h = 46.7[\text{ms}], \ t_n = 62.5[\text{ms}], \ \tau = 65.8[\text{ms}], \ T = 175.0[\text{ms}]$$

$$(6) \ t_h = 56.7[\text{ms}], \ t_n = 57.5[\text{ms}], \ \tau = 69.2[\text{ms}], \ T = 183.3[\text{ms}]$$

$$(7) \ t_h = 51.7[\text{ms}], \ t_n = 60.8[\text{ms}], \ \tau = 77.5[\text{ms}], \ T = 190.0[\text{ms}]$$

$$(8) \ t_h = 54.2[\text{ms}], \ t_n = 61.7[\text{ms}], \ \tau = 65.8[\text{ms}], \ T = 181.7[\text{ms}]$$

$$t_h = 52.4 \pm 3.0[\text{ms}], \ t_n = 61.3 \pm 2.0[\text{ms}], \ \tau = 70.4 \pm 4.7[\text{ms}], \ T = 184.1 \pm 5.6[\text{ms}]$$

本論文では、(7) の結果を記してある。

$h = 8[\text{mm}]$ 、 $l_f = l_1 = 3.51 \times 10^{-2}[\text{m}]$ のとき

$$(1) \ t_n = 90.0[\text{ms}], \ \tau = 81.2[\text{ms}], \ T = 171.2[\text{ms}]$$

$$(2) \ t_n = 94.2[\text{ms}], \ \tau = 81.7[\text{ms}], \ T = 175.8[\text{ms}]$$

$$(3) \ t_n = 94.2[\text{ms}], \ \tau = 83.3[\text{ms}], \ T = 177.5[\text{ms}]$$

$$(4) \ t_n = 94.2[\text{ms}], \ \tau = 89.2[\text{ms}], \ T = 183.3[\text{ms}]$$

$$(5) \ t_n = 101.7[\text{ms}], \ \tau = 65.0[\text{ms}], \ T = 166.7[\text{ms}]$$

$$(6) \ t_n = 103.3[\text{ms}], \ \tau = 80.8[\text{ms}], \ T = 184.2[\text{ms}]$$

$$(7) \ t_n = 107.5[\text{ms}], \ \tau = 80.0[\text{ms}], \ T = 187.5[\text{ms}]$$

$$(8) \ t_n = 111.7[\text{ms}], \ \tau = 68.3[\text{ms}], \ T = 180.0[\text{ms}]$$

$$t_n = 99.6 \pm 7.6[\text{ms}], \ \tau = 78.8 \pm 8.0[\text{ms}], \ T = 178.3 \pm 6.9[\text{ms}]$$

本論文では、(2) の結果を記してある。

B 記号

第 2.3 節	第 3 章
B 浮力	I_m 修正された m 次の第 1 種 Bessel 関数
E 運動エネルギー	K_m 修正された m 次の第 2 種 Bessel 関数
F 抵抗力	R jet の半径
R 定常半径	S 表面積
S 面積	T Antibubble の生成時間
U 定常速度	V 体積
V 体積	h 液面から jet 底面までの初期の高さ
g 重力定数	g 重力定数
n 法線成分	k 波数
p 圧力	l_f jet の初期の高さ
r, θ 極座標の成分	l_m 半径 r_{AB} の Antibubble を一個、半径 r_{ab} の Antibubble を $m-1$ 個生成するために必要な jet の高さ
t 時間	n 法線成分
u 速度	p 圧力
x xyz 座標での x 成分	r, z 円柱座標の成分
γ 表面張力係数	r_{AB} Antibubble の最大半径
ϵ 空気膜の厚さ	r_{ab} 複数個できる場合の Antibubble の半径
μ 粘性係数	r_s 側面表面
ξ 微小摂動	t 時間
ρ 密度	u, w 円柱座標での速度成分
ϕ 速度ポテンシャル	γ 表面張力係数
Re レイノルズ数	ϵ 空気膜の厚さ
	ϵ_{ij} 歪みテンソル
	κ Euler の定数
	λ 波長
	μ 粘性係数
	ν 動粘性係数
	ξ 微小摂動
	ρ 密度
	σ 形状抵抗係数
	τ 時定数
	τ_{ij} 応力テンソル
	ϕ 速度ポテンシャル
	ψ 流れの関数
	Re レイノルズ数
	$\wedge$ 外部の流体の変数