

非線型確率微分方程式の解の積分表現

京大 理 物理系 I 中澤 宏

Kraichnan-Wyld 的な Formulation での乱流理論においては、
いわゆる Renormalized Perturbation expansion を求める多くの努力が
なされて来た。ここでは積分表現 (= Wiener-Hermite Expansion) が
1 つの完成型としての Renormalized Perturbation Series を与えるこ
とを指摘し、その他に

- (1) 積分表現を確率微分方程式に応用するための基本的処
方の開発。
- (2) 実際応用上導入すべきいくつかの近似とその性質の一
般的議論。
- (3) 簡単な非線型確率微分方程式を例として解き、近似の
精度を定常分布に属する諸平均値の厳密値との比較及
び数値実験による Power Spectrum との比較、によって評
価。
- (4) Fourth Cumulant Discard 近似と積分表現の最低近似とは、非

線型項が奇数次のベキのみから成る場合には一致し、

偶数次ベキがあれば一致しないこと。

(5) *Equivalent Linearization* と積分表現の最低近似との一致。

等が論じられた。これらの詳細に関しては *Prog. Theor. Phys.* に投稿中であるので、あまゝいは、かなりの Space を必要とし、ここに記すのは实际的でないのと、省略し、次のような補足的説明のみと記す。

§ 1. 積分表現

確率変数 v がある white noise $f(t)$:

$$\langle f(t) \rangle = 0, \quad \langle f(t) f(t') \rangle = \delta(t-t')$$

の functional であって、条件 $\langle v^2 \rangle$ が有限；を満たすときには、kernels と呼ばれる 1 組の deterministic 関数 $\{K_n(t_1, \dots, t_n); n=0, 1, \dots\}$ が存在して

$$v = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \cdots \int_{-\infty}^{\infty} dt_n K_n(t_1, \dots, t_n) G_n(t_1, \dots, t_n)$$

と表現される。ここで $G_0 \equiv 1$, $G_1(t_1) \equiv f(t_1)$, $G_2(t_1, t_2) \equiv f(t_1)f(t_2) - \delta(t_1 - t_2)$, ... である。無限和は次の意味で v に収束する：

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \langle (v - \sum_{n=0}^N \int \cdots \int K_n G_n)^2 \rangle = 0.$$

積分表現の m 次、 n 次の項は 2 次平均ノルムの意味の内積 $(A, B) \equiv \langle AB \rangle$ に関して直交している：

$$(\int \cdots \int K_m G_m, \int \cdots \int K_n G_n) = \delta_{mn} n! \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \cdots \int_{-\infty}^{\infty} dt_n K_n^2(t_1, \dots, t_n).$$

これから直ちに公式: $\langle v^2 \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} n! \|K_n\|^2$, $\langle v \rangle = K_0$, が得られる。但し $\|\cdot\|$ は通常の L_2 ノルムである。確率微分方程式

$$dx/dt = A(x) + \sigma f(t),$$

但し x は一般に多成分でよく, $A(x)$ は x (n 成分) の多項式, の形のものを, $x(t)$ は明らかに $f(t')$ ($s \leq t' \leq t$, 但し s は初期時刻) の関数であるので, $x(t)$ の積分表現は

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_s^t dt_1 \cdots \int_s^t dt_n K_n(t; t_1, \dots, t_n) G_n(t_1, \dots, t_n)$$

の形でなければならぬ。従ってこれをもとの確率微分方程式に代入し, $K_0, K_1, \dots$ を決定すれば, それらにより $x(t)$ に関する必要な情報が次式で与えられる:

$$\langle x(t) \rangle = K_0(t),$$

$$\langle x(t) x(t') \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} n! \int_s^{\min(t, t')} dt_1 \cdots \int_s^{\min(t, t')} dt_n K_n(t; t_1, \dots, t_n) K_n(t'; t_1, \dots, t_n).$$

§ 2. 参考文献

1. Cameron and Martin, Ann. Math. 88: 385 (1967).
2. Itô, J. Math. Soc. Japan 3: 157 (1951).
3. Wiener, "Homogeneous Chaos", Amer. J. Math. 60: 897 (1938).
4. Nisio, J. Math. Soc. Japan 12: 207 (1960).
5. McKean, "Stochastic Differential Equations," Proceedings of a Symposium in Applied Mathematics of AMS and SIAM (Keller and McKean, eds.,

(1973), p. 197.

§3. 積分表現における近似について

例之ば方程式 $dx/dt = -\gamma x - \lambda x^3 + \sigma f(t)$ では、短い時間 Δt の間で $x(t)$ の increment は $\Delta x \sim -(\gamma x + \lambda x^3)\Delta t + \sigma f(t)\Delta t$ で与えられる。 $\langle f(t)f(t') \rangle = \delta(t-t')$ からは $f(t)$ の order を評価することが困難であるが、 $\int_t^{t+\Delta t} f(t') dt' \equiv \Delta B(t)$ を考えると、 $\langle (\Delta B(t))^2 \rangle = \Delta t$ であり、従って $\Delta B(t) \sim O(\sqrt{\Delta t})$ と考えてよい。従って Δt が小さいならば、 Δx の主要部は $f(t)\Delta t \equiv \int_t^{t+\Delta t} f(t') dt' \equiv \Delta B(t)$ から成り立っている。次にこれが非線型の x^3 等を通じて積分され、 $f(t)$ の 2 次・3 次... の量が出て来る。この picture は $x(t)$ の擾動展開の底にあるものであり、同時にその有効性が short time に限られることを示唆している。

積分表現による解法では、方程式の右辺、特に上の例では $x^3(t)$ 、を再び積分表現に書き、2 次平均ノルムの意味で互いに直交する（相関のない）ものの和に分解しておく、各次の部分空間毎に左右両辺が等しいことを要請する。実際には積分表現の kernel としてはいくつかの n 個しかとれないから、このような要請も近次の n 個の部分空間でしか満たすことができない。しかし $x(t)$ の順次の積を作るとき、この n 個の部分空間から 1 度は外に出るが、最後に 0 次 $\sim (n-1)$ 次空間

に戻す項はすべて取り入れた形で方程式が構成される。例えば $x(t) \sim K_0(t) + \int_0^t K_1(t;t_1) G_1(t_1) dt_1 \equiv K_0 + K_1 G_1$ のように近似するとき、 $x^2(t) \cong \{K_0^2 + \|K_1\|^2\} + \iint K_1(t;t_1) K_1(t;t_2) G_2(t_1, t_2) dt_1 dt_2$ のように 0 次と 2 次の項しか出ない。この $K_1 K_1 G_2$ の項は、例えば方程式の右辺に $x^2(t)$ の項がある場合でも、実際に解く kernel の方程式には入って来ない。したがって $x^2(t)$ を作ると、 $(\underset{\substack{\uparrow \\ x^2(t) \text{ の } K_1 K_1 G_2}}{K_1 K_1 G_2}) \times (\underset{\substack{\uparrow \\ x(t) \text{ の } K_1 G_1}}{K_1 G_1}) = 2\|K_1\|^2 K_1 G_1 + \iiint K_1(t;t_1) K_1(t;t_2) K_1(t;t_3) G_3(t_1, t_2, t_3) dt_1 dt_2 dt_3$ の形となり、再び 1 次の項が生じる。このように項はすべて、この近似において、捨てる、ということになる。

結果として $K_0(t)$ と $K_1(t;t_1)$ について、Hartree-Fock 的な self-consistent equation が得られる。