

V. I. Arnold の仕事の周辺からの 二・三の話題

京大 理 丹羽敏雄

理大 工 大槻舒一

我々がこれから問題にしようとするものは大別すれば二つにわけられる。一つは 積分可能な系を擾動して得られる系の解の time global な性質 特に 不変概周期運動の存在と、その近傍における解の $-\infty < t < \infty$ における振舞いを調べることである。もう一つは微分方程式の局所的な性質 特に singular point のまわりの解の性質を調べることである。この事は normal form の問題と密接に関連するか、resonance がある場合、困難な問題であって、それは自然に singular point をもつ微分方程式の deformation とその bifurcation の問題につながる。

(I) Time global problem.

微分方程式を調べるのによく使われる武器は“変換”と“擾動”である。

system (M, X) も考える. M は phase space であり X は系の運動を定める M 上の微分方程式 $\dot{m} = X(m)$ を vector field である. X から定まる解を表わす 1 parameter group を $\{\varphi_t\}$ で表わす: $\varphi_t = \text{Exp } tX$.

さて system (M, X) に特別なしくみ. 例えは 流れの線型性をもつとか. お互いに独立な subsystems の和にわかれるとか. 対称性があるとか といった場合には.

system (M, X) の性質がよくわかる事がある. 変換理論はいわば, かくされたところの「しくみ」を見い出す方法であるといえよう. (石井氏の講演を参照せよ) それに対して摂動の方法は, 調べたい system (M, X) からこういう特別な system $(M^{(0)}, X^{(0)})$ に近い場合には $(M^{(0)}, X^{(0)})$ の性質から (M, X) のどんな性質がええられるかを見る.

例として, 2次元トーラス T^2 の cotangent bundle $M = T^*(T^2) \cong T^2 \times \mathbb{R}^2$ は phase space として Hamiltonian system を考える. Hamiltonian とは 2 次の形のものをもつものとする.

$$\begin{aligned} H(q_1, q_2; p_1, p_2) &= \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2) + \varepsilon(\omega q_1 - 1 \\ &\quad + \frac{\mu}{2} p_1^2 \omega q_2) \\ &\equiv H_0(p) + \varepsilon H_1(p, q) \quad (H_\varepsilon) \end{aligned}$$

$\varepsilon = 0$ の場合は 系は直ちに積分可能であつて

$\phi = (p, p_*) = (\omega_1, \omega_2) = \omega = \text{一定}$ は不変な submanif. を定め. その上の運動は ω を振動数とする概周期運動である. $\omega_1/\omega_2 = \text{有理数}$ の場合は. 周期的であつて. submanif. はさらに小さな submanif. に分割される. これらのことは図式的に... 2 は次の 1) に... いる。

(i) $\omega_1/\omega_2 = \text{無理数}$ の場合.

$(T^2, \tau_t^\omega) \in T^2$ 上の ω を振動数とする概周期運動とある: $\tau_t^\omega g = g + t\omega \pmod{2\pi}$

$\exists \psi^\omega: T^2 \longrightarrow M$: injection

$$\begin{array}{ccc} & \downarrow \tau_t^\omega & \supset \downarrow \varphi_t^{(\omega)} \\ \psi^\omega & T^2 & \longrightarrow M \end{array}$$

(ii) $\omega_1/\omega_2 = \text{有理数}$ の場合

$(T^1, \tau_t^{\theta(\omega_1, \omega_2)}) \in T^1$ 上の rotation.

$$\tau_t^\theta x = x + t\theta \pmod{1}$$

$\exists \psi^\theta: T^1 \longrightarrow M$: injection.

$$\begin{array}{ccc} & \downarrow \tau_t^\theta & \supset \downarrow \varphi_t^{(\omega)} \\ \psi^\theta & T^1 & \longrightarrow M \end{array}$$

問題は $\varepsilon < 1$ ($\varepsilon \neq 0$) とした場合と) なるか) である。

結果は (i) の場合、大部分の ω に対して 概周期運動 (T^2, τ_ω) は保存される。その理由の一つは次のようなものである。

摂動系 (H_ε) の $M = T^*(T^2)$ 上の vector field $\varepsilon X^{(\varepsilon)}$ で表わすとき、 (H_0) の不変多様体 $Z^\omega(T^2)$ 上の $X^{(\varepsilon)}$ の normal component to $Z^\omega(T^2)$ の平均がきえる：

$$\int_{Z^\omega(T^2)} X^{(\varepsilon)} \text{ の normal component to } Z^\omega(T^2) \\ = 0$$

$$(\because \oint_{Z^\omega(T^2)} H_1 dg = 0)$$

この結果はただちに (T^2, τ_ω) の保存を意味しないが、根拠の一つにはなりえる。それに并して (ii) の場合 (我々は以下 resonance がある場合という) は事情はだいぶ異なる。まずもって上の平均がきえないのである。この事情と上の例でみてみよう。

例えば $\omega = (\omega_1, \omega_2)$ とし $\omega_1 = 0, \omega_2 \neq 0$ の場合を考えるとよい。この場合 inv. manif

(T^1, τ_t^0) は

$$T^1 = \{ (q_1, q_2, p_1, p_2) ; \quad q_1 = q_1^{(0)}, \quad p_1 = 0, \quad p_2 = \omega_2 \}$$

$$\tau_t^0 = \tau_t^\omega : \quad q_2 \rightarrow q_2 + \omega_2 t \pmod{2\pi}$$

で与えられる。 (H_ε) の $\tau^0(T^1)$ の近傍におけるものを 1 次近似として

$$\begin{aligned} \bar{H} &= \frac{1}{2\pi} \oint H(q, p) dq_2 \\ &= \frac{1}{2} (p_1^2 + p_2^2) + \varepsilon (\cos q_1 - 1) \end{aligned}$$

ε Hamiltonian とし $\omega > 0$ system を考えるのが妥当である (averaging method) 但しこの場合は $\mu = 0$ の場合に当る。

$$\dot{p}_1 = -\frac{\partial \bar{H}}{\partial q_1} = \varepsilon \sin q_1$$

$$\dot{q}_1 = \frac{\partial \bar{H}}{\partial p_1} = p_1 \quad (\bar{H}_\varepsilon)$$

$$\dot{p}_2 = -\frac{\partial \bar{H}}{\partial q_2} = 0$$

$$\dot{q}_2 = \frac{\partial \bar{H}}{\partial p_2} = p_2$$

この system は積分可能であり、次の図で示される。

これは (H_0)
 の resonance-torus
 $(T^2, \tau^{(0, \omega_2)})$
 か $|p_1| \sim \sqrt{\epsilon}$
 の幅にふくらんだことを
 意味する。

(かも invariant
 tori $(T^1, \tau^{(\omega_2)})$
 達は

$$T_{\omega_2}^1(0) = \{(g, p);$$

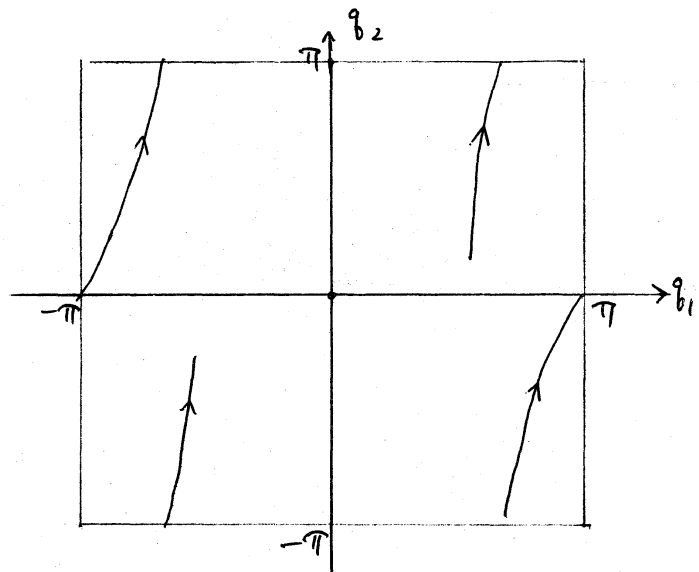
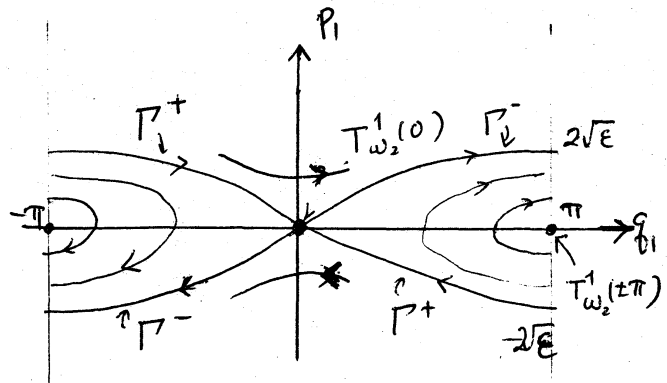
$$p_1 = 0, p_2 = \omega_2, g_1 = 0\}$$

と

$$T_{\omega_2}^1(\pm\pi) = \{(g, p);$$

$$p_1 = 0, p_2 = \omega_2, g_1 = \pm\pi\}$$

を除いてはわかれとれる。後者は "elliptic" invariant
 torus であり、その周りには invariant quasi-periodic
 motions とかこまれる。前者の存在は特に面白い
 "hyperbolic" invariant torus である。それは
 安定な separatrix Γ^+ と不安定な separatrix Γ^-
 (この場合 Γ^+ と Γ^- は重なっている) から出ている。
 system (H_ϵ) に戻す。



$$\dot{p}_1 = -\frac{\partial H}{\partial q_1} = \varepsilon \sin q_1$$

$$\dot{q}_1 = \frac{\partial H}{\partial p_1} = (1 + \varepsilon \mu \cos q_2) p_1 \quad (H_\varepsilon)$$

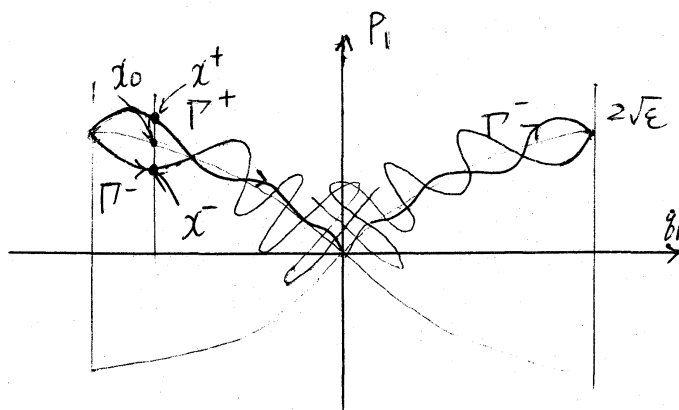
$$\dot{p}_2 = -\frac{\partial H}{\partial q_2} = \frac{\varepsilon \mu}{2} p_1^2 \sin q_2$$

$$\dot{q}_2 = \frac{\partial H}{\partial p_2} = p_2$$

一般に 摂動した場合 "elliptic" invariant torus はつぶれるか. "hyperbolic" invariant torus は保存される. 我々の場合は $T_{\omega_2}(0)$, $T_{\omega_2}(\pm\pi)$ は共に不変のものを保存されている. それでは separatrices $T^\pm$ はどうなるであろうか. 結果はそれぞれを少し変形されたものに残り、摂動前に重なっていた T^+ と T^- が分離される. (かもそれらは交わる. これは hyperbolic invariant torus $T_{\omega_2}(0)$ のまわりの様子を非常に複雑にし. (H_ε) の積分不可解性の原因となる. この現象は最初 Poincaré によって発見された. 以下にこの現象を説明する.

まず T^+ がどのようにに変化するかをみよう. そのためには $q_2 = 0$, $H = h = \text{一定}$ で定まる cross section を考えるのが有効である. この上での T^+ の動きと見てみる.

これをみるには
 Γ^+ 上の軌道に
 着ての H_0 の変
 化を扱うのが便利
 である。



cross-section $q_2=0, H=h=\text{一定}$

$$\frac{dH_0}{dt}$$

$$= \{H, H_0\}$$

$$= -\varepsilon^2 \mu \sin q_1 \cos q_2 \cdot P_1$$

$$H_0(x^+) - H_0(\infty)$$

$$x^+ \in \Gamma^+$$

$$= H_0(x^+)$$

$$\because H_0(\infty) = 0$$

$$= \int_{-\infty}^0 \{H, H_0\} dt$$

$$= \int_{-\infty}^0 \{H, H_0\} dt + o(\mu)$$

お1の積分は真の解にそっての積分であり、お2の積分
 は $(H\varepsilon)$ の解にそっての積分である。

同様に $x^- \in \Gamma^-$ に対し

$$H_0(x^-) = \int_{-\infty}^0 \{H, H_0\} dt + o(\mu)$$

$$\therefore H_0(x^-) - H_0(x^+) = \int_{-\infty}^{\infty} \{H, H_0\} dt + o(\mu)$$

= 2 積分は (H_ε) の解に τ, t_0 による。と τ の解は次のように表わされる。

$$p_1(t) = 2\sqrt{\varepsilon} / \operatorname{ch} \sqrt{\varepsilon}(t-t_0)$$

$$q_1(t) = 2 \cot^{-1}(-\operatorname{sh} \sqrt{\varepsilon}(t-t_0))$$

$$q_2(t) = \cos \omega_2 t \equiv \cos \omega t$$

これは $t=t_0$ のとき $p_1=2\sqrt{\varepsilon}$, $q_1=-\pi$ なる解である。

従って

$$\begin{aligned} & H_0(x^-) - H_0(x^+) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} -\varepsilon^2 \mu \frac{2\sqrt{\varepsilon}}{\operatorname{ch} \sqrt{\varepsilon}(t-t_0)} \sin(2 \cot^{-1}(-\operatorname{sh} \sqrt{\varepsilon}(t-t_0))) \cos \omega t dt \\ &= -4\sqrt{\varepsilon} \varepsilon^2 \mu \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sh} \sqrt{\varepsilon} t}{\operatorname{ch} \sqrt{\varepsilon} t} \sin \omega t dt \right) \sin \omega t_0 \\ &= \left(-\varepsilon \mu \frac{\pi \omega^2}{2 \operatorname{sh} \frac{\pi}{2} \frac{\omega}{\sqrt{\varepsilon}}} \right) \sin \omega t_0 + o(\mu) \end{aligned}$$

おまけの考察. q_2 に関する対称性から $t_0=0$ のとき、
即ち $q_1=-\pi$ において $H_0(x^+) = H_0(x^-)$ である。

自由度が3以上の場合は、さらに複雑な現象がおこる。
このことから instability zone の topological instability を引きおこすことが P. I. Arnold によって示された。

(II) Local Problem.

原点の近傍において微分方程式を考える。

$$\dot{x} = v(x) \quad x \in U \subset \mathbb{R}^n \quad (1)$$

(U: open nbd of 0)

a) (I) から原点において non-singular な場合。すなわち $v(0) \neq 0$ の場合、次のことが知られている。

$$\exists \tau: \mathbb{R}^n \supset V \longrightarrow U \subset \mathbb{R}^n : \text{diffeo}$$

$0 \longmapsto \tau(0) = 0$

s.t. $\dot{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}$ の解は (I) の解になる。

(I) から parameter に依存する場合、微分同型 τ も parameter に smooth に依存する。

このように、non-singular な点の近傍において (I) は局所的にはほとんど完全にわかったといえる。それでは singular な点の近傍において τ はどうだろうか？

$$v(0) = 0 \quad \text{と} \quad \text{c.}$$

$$A = \frac{\partial v}{\partial x}(0) \quad \text{と} \quad \text{ある.}$$

A の固有値を $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$

$$n^+ = \#\{k; \operatorname{Re} \lambda_k > 0\}$$

$$n^- = \#\{k; \operatorname{Re} \lambda_k < 0\}$$

$$n^0 = \#\{k; \operatorname{Re} \lambda_k = 0\}$$

と仮定. $n^0 = 0$ の場合, A は (1) は non-degenerate singular point である.

b) (1) の原点が non-degenerate sing. pt である場合
 もはや a) のようにある微分同型でもって (1) をかんたんな形に写換えるわけにはいかない.

しかしながら topological equivalence
 の class にはいってはいない. したがってある 位相同型によっ
 て (1) をかんたんな形に写換えることはできない.

$$\exists h: \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n^+} \times \mathbb{R}^{n^-} \supset \nabla \rightarrow U \subset \mathbb{R}^n: \text{homeo.}$$

$$(y^+, y^-) \mapsto x$$

s. 4.

$$\begin{cases} \dot{y}^+ = y^+ \\ \dot{y}^- = y^- \end{cases}$$

の解は (1) の解になる.

parameter に依存する場合も a) と同様である。

それでは degenerate な場合はどうであろうか？

この問題を考えるに、いわゆる "generic" な観測からなかにめてみると、もし単独の微分方程式であった場合は、たいてい重要なこともないことかわかる。すなわち、もし(1)が non degenerate sing pt をもっているとしても、少し(1)を摂動させるだけで non-degenerate sing pt をもつものにかわるからであり、一般に non-degen. sing pt をもつ系が generic であるからである。しかしながら system が近似ではしか知りえないとか、あるいは、

parameter に depend (した system の族を考えた場合) には、"generic" な観測からしても degenerate sing pt をとけて通ることはできない。この間の事情をうまく定式化する¹²には、singularity の codimension なる概念が必要になるのでそれを少し説明する：

J^k を $\mathbb{R}^n$ の原点の近傍における vector field の k -jets の作る k -jet space とする。座標系を固定すれば、 k 階までの Taylor 級数の係数と考えよう。例えば $k=1, 2$ に対しては、

$$J^1 \cong \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n^2} \rightarrow (x, u_0(x), \frac{\partial u}{\partial x}(x))$$

$$J^2 \cong \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n^2} \times \mathbb{R}^{n \times \frac{n(n+1)}{2}} \rightarrow (x, u_0(x), \frac{\partial u}{\partial x}(x), \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x))$$

$$\mathcal{S} = \{ (x, u_0(x), \frac{\partial u}{\partial x}(x), \dots) \in J^k; u_0(x) = 0 \}$$

この $\mathcal{S}$ は k に 無関係に

$$\text{codim } \mathcal{S} = n$$

である。従って $b)$ の場合の singularity は codim n である (注)。単独の方程式 (1) は J^k の中で

$$U: X \rightarrow (x, u_0(x), \frac{\partial u}{\partial x}(x), \dots) \in J^k$$

1) $\mathcal{S}$ と $\dim n$ の submanif. を定める。従ってそれは一般に $\mathcal{S}$ と transversal に交わるから (1) は (non-degenerate の) singular pt が表われるのはさけがたい。非-degenerate の sing. pt は codim は $\frac{n(n+1)}{2}$ であるから一般には交わらない、すなわち、単独の方程式に対しては generic の観点から見て deg. sing. pt を考える必要はない。しかしながら方程式が parameter に依存する場合一般に deg. sing. pt が現われるのはさけがたい。一般に k -parameters に depend する方程式の後を考察する場合 $k+n$ 以下の codim をもつ singularity をさけることは正しくないのである。(以下、通常行なわれる) 1) $k+n$ の codim. を codim. k とする)

±2 11) が codim k の singular pt をもつ (2) の deformation を考える。その場合ある意味で一番大事な deformation (そう) ものかある (2) を考えるのが重要である。(かかる deformation を versal deformation とする。) 例えは topological orbital equivalence のカテゴリー - その定義を与える。

定義 1. (1) $_{\varepsilon}$ $\dot{X} = v(X, \varepsilon)$ と
(2) $_{\varepsilon}$ $\dot{Y} = w(Y, \varepsilon)$ か

top. orb. equivalent であるとは、 $\varepsilon \rightarrow 0$ に依存する X から Y への同相写像 $h(\cdot, \varepsilon)$ の族があって (1) $_{\varepsilon}$ の (oriented) phase curves と (2) $_{\varepsilon}$ のそれらに写すものがあるときをいう。

2. (3) $_{\mu}$ $\dot{X} = u(X, \mu)$

か (1) $_{\varepsilon}$ から induce されたとは、連続写像 $\varepsilon = \varphi(\mu)$ があって $u(X, \mu) = v(X, \varphi(\mu))$ となるときをいう。

3. deformation (1) $_{\varepsilon}$ (= family (1) $_{\varepsilon}$ の germ) が $\dot{X} = v(X, 0)$ の (topological) versal deformation であるとは、任意の他の $\dot{X} = v(X, 0)$ の deformation か (1) から induce された deformation

に equivalent なる ε がある。

例として (b) の結果は $\text{codim } 0$ の singular pt の versal deformation は存在し $\mathbb{C}^1$ かつ $\mathbb{C}$ で述べられる $\mathbb{C}^1$ の trivial な deformation かつ $\mathbb{C}$ であることとを示すことができる。

それでは $\text{codim } 1$ の singularity ε がある場合はどうだろうか？ この場合は次の二つの場合があることがわかる。

(i) $n_0 = 1$ であって $\lambda_1 = 0$

(ii) $n_0 = 2$ であって λ_1, λ_2 が pure imaginary かつ $\lambda_1 = \bar{\lambda}_2$.

これらの場合はいつでも versal deformation ε があり、それは次のようである。

$$(i) \quad \begin{cases} \dot{x} = \pm x^2 + \varepsilon & x \in \mathbb{R}, \varepsilon \in \mathbb{R} \\ \dot{x}^+ = x^+ & x^+ \in \mathbb{R}^{n^+} \\ \dot{x}^- = -x^- & x^- \in \mathbb{R}^{n^-} \end{cases}$$

$$(vi) \quad \begin{cases} \dot{z} = z(i + \varepsilon \pm z\bar{z}) & z \in \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2, \quad \varepsilon \in \mathbb{R} \\ \dot{x}^+ = x^+ & x^+ \in \mathbb{R}^{n_+} \\ \dot{x}^- = -x^- & x^- \in \mathbb{R}^{n_-} \end{cases}$$

方法12の Reduction Theorem と normal form
への変換の理論を用いる。

Reduction Th.

$$\dot{x} = v(x, \varepsilon) \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad \varepsilon \in \mathbb{R}^l$$

$$v(0, 0) = 0, \quad \text{かつ} \quad n^0 = k \geq 0 \text{ である}$$

これらの条件は次の後に equivalent である。

$$\begin{cases} \dot{p} = w(p, \varepsilon) & p \in \mathbb{R}^k, \quad \varepsilon \in \mathbb{R}^l \\ \dot{q} = -q & q \in \mathbb{R}^{n_-} \\ \dot{r} = r & r \in \mathbb{R}^{n_+} \end{cases}$$

codim 2 以上の場合は余りわかっていない。

References

- [1] V. I. Arnold : Small denominators I, on the mapping of a circle into itself, Izv. Akad. Nauk. serie Math, 25. 1 (1961) p. 21-86 $\cong$ Transl. Amer. Math. Soc. serie 2. V. 46 (1965) p. 213-284
- [2] ——— : Proof of a theorem of A. N. Kolmogorov on the invariance of quasi-periodic motions under small perturbations of the hamiltonian, Usphi. Math. Nauk. V18 N5 (1963) p. 13-40 $\cong$ Russian Math. Surveys V18 N5 (1963) p. 9-36
- [3] ——— : Small denominators and problems of stability of motion in classical and celestial mechanics, Usphi Math. Nauk. V18 N6 (1963) p. 91-196 $\cong$ Russian Math. Surveys V18 N6 (1963) p. 85-193
- [4] ——— : Instability of dynamical systems with many degrees of freedom, D. A. N. 156 N1

(1964) p 9~12 $\cong$ Sov. Math. Dok. V5 N3 (1964) p581-585

[5] ——— ; A. Avez : Problèmes ergodiques de la mécanique classique, Gauthier Villard.

[6] C.L. Siegel - J.K. Moser : Lectures on celestial mechanics, Springer

[7] V.I. Arnold : On matrices depending on parameters,
Uspchi. Math. Nauk 26. 2 (1971) p101~104
 $\cong$ Russian Math. Surveys 26. 2 (1971) p29~43

[8] ——— : Lectures on Bifurcations in Versal families, Uspchi Math. Nauk 27. 5 (1972) $\cong$ Russian Math. Surveys 27. 5 p 54~123.

[註] [5], [8] には詳しい文献表がある。