

直並列グラフの支配数

広島大学 工学部 菊野 亨
角田 良明

1. ま え が き

無向グラフ $G = (V, E)$ と V の部分集合 D に対し, D に属さないどの節点も D の節点のどれかと隣接するなら, D を G の支配集合 (dominating set) という. 最小の支配集合に属する節点の数を G の支配数 (domination number) という. 支配集合の概念はかなりの応用範囲をもっている. 例えば 8×8 のチェス盤上に5個のクイーンを置いて64個のマス目全部を支配するようにする問題がそれである.

文献(2)と(3)に従って, これまでに求まっている主な結果について簡単に紹介しておく.

[F1]⁽²⁾ 任意に与えられる無向グラフ G と非負整数 k に対し, k 個の節点からなる支配集合が G に存在するか否かの決定問題は NP - 完全となる.

[F2]⁽³⁾ 無向グラフ $G = (V, E)$ が特に木の場合,

その支配数は $O(|V|)$ のステップで求まる。

本稿では、閉路を有する無向グラフとしてDチャート状グラフとともによく知られている、直並列グラフ $G = (V, E)$ に対し、その支配数が $O(|V|^2)$ のステップで求まることを示す。

2. 準備

無向グラフ $G = (V, E)$ を通常通り定義する⁽¹⁾。ここで、 V は節点の空 ($\emptyset$) でない有限集合、 E は $V \times V$ の部分集合で枝の集合である。

〔定義1〕 無向グラフ $G = (V, E)$ において、 $(u, v) \in E$ なら u と v は隣接しているといい、又、 (u, v) は u, v を接続しているという。節点 $u \in V$ は隣接する全ての節点及び u 自身を支配するという。 G の任意の節点 u が、 V のある部分集合 D に属する節点に支配されるなら、 D を G の支配集合という。支配集合 D の任意の真部分集合がもはや支配集合でなくなってしまうなら、 D を特に極小支配集合という。要素の数が最も少ないような、 G の極小支配集合を最小支配集合といい、その要素の数を G の支配数といい、 $d(G)$ と表す。

〔定義2〕 無向グラフ $G = (V, E)$ の2つの枝 $e' = (u', v')$ 、 $e'' = (u'', v'')$ において、 $v' = u''$ かつ $u' \neq v''$ な

ら e' と e'' は直列に, $u' = u''$ かつ $v' = v''$ なら e' と e'' は並列に接続しているという. G に対し, 次の直列簡約と並列簡約を繰り返し適用して, 図1のグラフが得られるとき, G は直並列グラフであるという.

直列簡約: 直列に接続している2つの枝の片方を短絡除去する操作(図2).

並列簡約: 並列に接続している2つの枝の片方を開放除去する操作(図3).

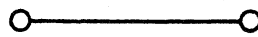


図1 最小直並列グラフ $G_{\min}$

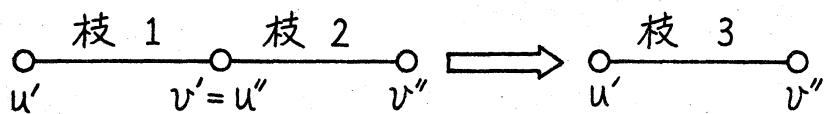


図2 直列簡約

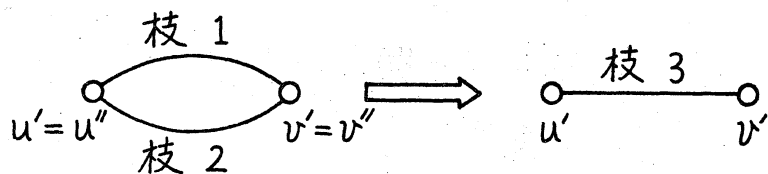


図3 並列簡約

〔定義3〕 次のように帰納的に定義される1端子対グラフを直並列グラフという.

(1) 異なる2つの節点 u, v を接続している枝 (u, v) は, u と v を端子対とする直並列グラフである.

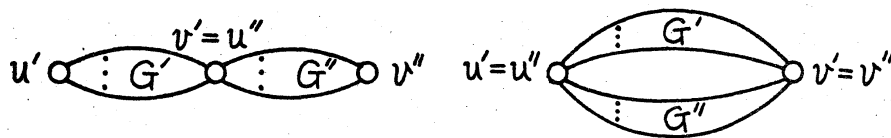
(2) G' を u' と v' を端子対とする直並列グラフとし, G'' を

u'' と v'' を端子対とする直並列グラフとするとき,

(a) 図4(a)に示すように, G' と G'' を直列接続したグラフは, u' と v'' を端子対とする直並列グラフである.

(b) 図4(b)に示すように, G' と G'' を並列接続したグラフは, u' と v' を端子対とする直並列グラフである.

(3) (2)を有限回繰り返して得られるものそれだけが直並列グラフである.



(a) 直列接続

(b) 並列接続

図4 グラフの接続

3. 直並列グラフの支配数

アルゴリズムを述べる前に, 以下で必要となる概念を導入する.

[定義4] G を直並列グラフとし, $\hat{G}$ を u と v を端子対とする G の部分直並列グラフとする. 2つの集合を $V_B = \{u^{0-0}, u^{0-1}, u^1, v^{0-0}, v^{0-1}, v^1\}$, $E_B = \{(u^{0-0}, v^{0-0}), (u^{0-0}, v^{0-1}), (u^{0-0}, v^1), (u^{0-1}, v^{0-0}), (u^{0-1}, v^{0-1}), (u^{0-1}, v^1), (u^1, v^{0-0}), (u^1, v^{0-1}), (u^1, v^1)\}$

$v^1\}$ と定義する. このとき, ラベル付き2分グラフ $B = (\hat{V}_B, \hat{E}_B)$ を $\hat{G}$ に対するブロックという. 但し, $\hat{V}_B$ は節点の集合で, $\hat{V}_B = V_B$, $\hat{E}_B$ は枝の集合で, $\hat{E}_B \subseteq E_B$ とする. B の各枝 $(u^\alpha, v^\beta) \in \hat{E}_B$ ($\alpha, \beta \in \{0-0, 0-1, 1\}$ とする) には非負整数がラベルとして付けられるが, それを $N(u^\alpha, v^\beta)$ で表す.

なお, G の支配集合を D と仮定するとき, ブロックの節点 u^α, v^β , 枝 (u^α, v^β) , ラベル $N(u^\alpha, v^\beta)$ のもつ意味は次の通りである.

まず, 節点 u^α は肩につけられた α に応じて次のような意味をもつ.

u^{0-0} : 節点 u と u に隣接する $\hat{G}$ 内の全ての節点が D に属さないことを示す. このままでは, u は $\hat{G}$ 内の D に属する節点に支配されないが, 直列接続あるいは並列接続によって, $\hat{G}$ 外の D に属する節点 w に支配されることを想定している (図5 (a) 参照).

u^{0-1} : 節点 u は D に属さないが, u に隣接する $\hat{G}$ 内のある節点 w が D に属することを示す. 即ち, u は D に属する節点 w に支配されている (図5 (b) 参照).

u^1 : 節点 u は D に属することを示す. 即ち, u は D に属する u 自身に支配されている (図5 (c) 参照).

節点 v^β も同様の意味をもっている。

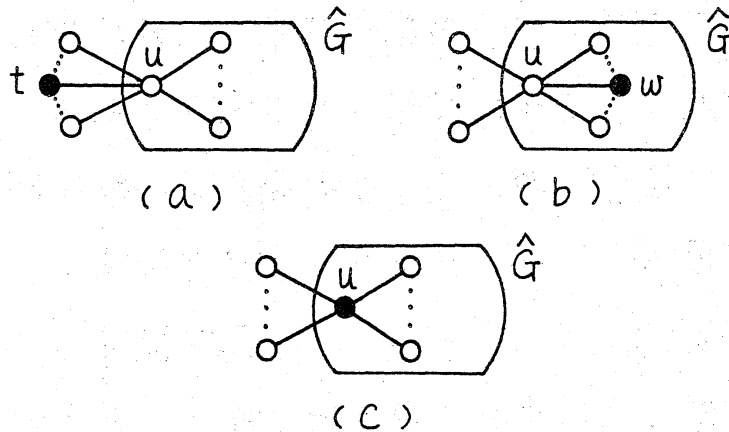


図5 ブロック上の各節点が表示支配関係
(黒丸●は、その節点が D に属することを示す)

無向枝 $(u^\alpha, v^\beta) \in \hat{E}_B$ は、 u^α 及び v^β で述べた支配関係の組合せが許されることを示す。したがって、枝の存在しない節点の対に対してはその組合せが禁じられることを意味する。

ラベル $N(u^\alpha, v^\beta)$ は、 u^α 及び v^β で指定するように D (のうち $\hat{G}$ に属する部分だけ) を決めたときの $\hat{G}$ の支配数を表す。

3. 1 アルゴリズム

直並列グラフ G の支配数を求めるアルゴリズムSPDは、 G の直列簡約及び並列簡約に伴って行われる。主な手順を以下に示す。

アルゴリズムSPD

- (1) G 上の各枝に対して、初期ブロックを構成する。
- (2) G に対して、直列簡約を可能な限り行う (その結果得

られるグラフを G^S と表す)。その個々の直列簡約に伴ってブロックを再構成する。これがブロック間直列接続操作 S （単に操作 S とよぶ）である。

(3) その後 G^S に対して、並列簡約を可能な限り行う（その結果得られるグラフを $(G^S)^P$ と表す）。その個々の並列簡約に伴ってブロックを再構成する。これがブロック間並列接続操作 P （単に操作 P とよぶ）である。

(4) 以上(2)，(3)の直列簡約及び並列簡約を最小直並列グラフ $G_{\min}$ が得られるまで行う。

(5) $G_{\min}$ に対するブロックから G の支配数を求める。

直並列グラフの一例 G_1 にSPDを適用して、簡約されていく様子(図6参照)と，これに伴う操作 S 及び操作 P につい

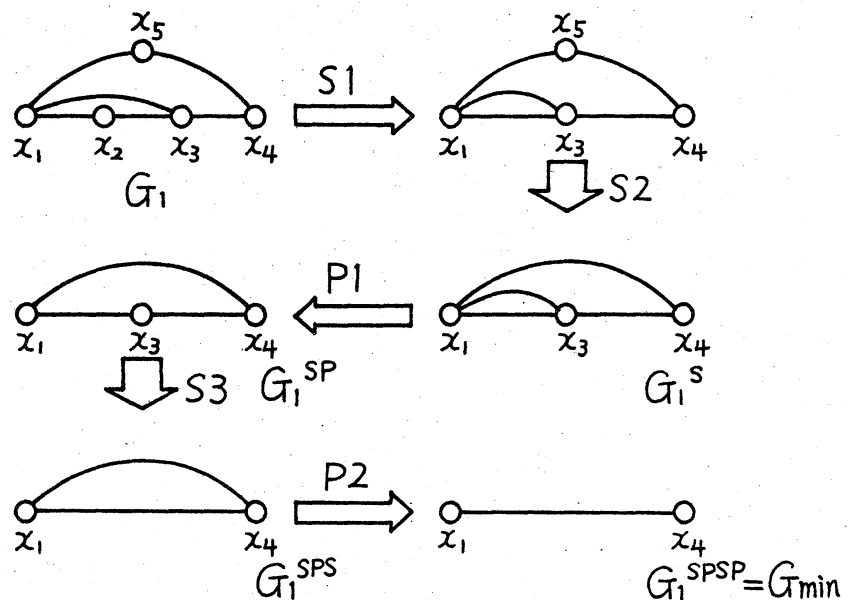
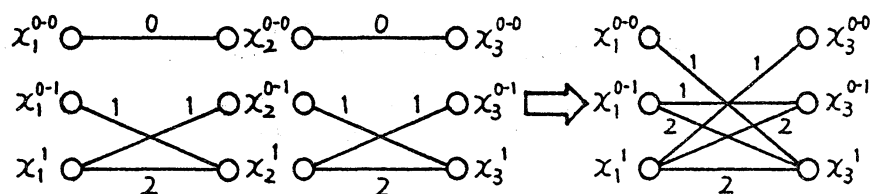


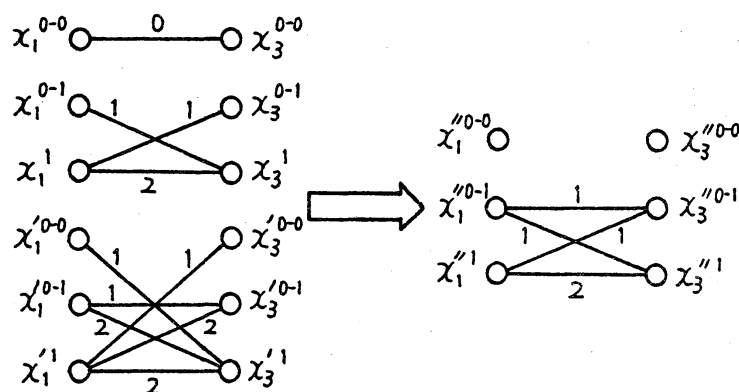
図6 G_1 の簡約されていく様子

て述べる.

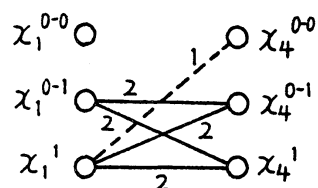
直列簡約 $S1$ に対する操作 S は以下の通り.



並列簡約 $P1$ に対する操作 P は以下の通り.



G_{min} に対するブロック B_f は次の通り求まる.



B_f から G_1 の支配数を求めると

$$d(G_1) = 2$$

3. 2 正当性と時間計算量

[定理1] アルゴリズム SPD は, u と v を端子対とする直並列グラフ G の支配数を正しく出力する.

〔定理2〕 アルゴリズムSPDは、直並列グラフ $G = (V, E)$ の支配数を $O(|V|^2)$ で決定する。

直並列グラフ G の支配数を求める多項式時間アルゴリズムを与えた。なお、このアルゴリズムを直並列グラフ G の最小支配集合を求めるように改訂することは容易である。

文 献

- (1) A. V. Aho, J. E. Hopcroft and J. D. Ullman,
"The design and analysis of computer algorithms,"
Addison-Wesley (1974).
- (2) K. S. Notarajan and Lee J. White, "Optimum
domination in weighted tree," Information
Processing Letters, Vol.7, No.6, pp.261-265
(Oct. 1978).
- (3) E. Cockayne, S. Goodman and S. Hedetniemi,
"A linear algorithm for the domination number
of a tree," Information Processing Letters,
Vol.4, No.2, pp.41-44 (Nov. 1975).