

p -進古典群の表現と有限群の Hecke 環に関する注意

尾道大学経済情報 刈山和俊 (Kazutoshi Kariyama)

Department of Economics, Management and Information Science,
Onomichi University

1 紹介

C. J. Bushnell と P. C. Kuzko は非アルキメデスの局所体 k 上の一般線形群 $G = GL_n(k)$ の既約 smooth 表現を分類した. 彼らの初期の仕事 [2] において, simple type の概念がその分類に重要な役割を演じた. その simple type は G のある開コンパクト部分群 J とある cuspidal 性をもつその既約 smooth 表現 λ の組として与えられた. その simple type の群 J はある principal hereditary 多元環 $\mathfrak{A}$ によって与えられ, またその Hecke 環 $\mathcal{H}(G, \lambda)$ は, ある自然数 e に対して, 既約な $\tilde{A}_e$ 型の affine Weyl 群を基底にもつ (extended) affine Hecke 環に同型であることが示された. またその affine Hecke 環は e 次の対称群 S_e を基底にもつ有限 Hecke 環を含む. とりわけ, G のすべての既約 supercuspidal 表現は, その有限 Hecke 環が自明, すなわち, $e = 1$ である simple type (J, λ) の表現 λ を, G の中心 $k^\times$ を法としてコンパクトな部分群に拡張し, そしてそれを G 全体に誘導して得られる表現に同値であることが示された. これらの結果を $GL_n(k)$ 以外の古典群に拡張すること, すなわち, simple type の類似物を定義することが望まれる. 一般線形群におけるその affine Hecke 環の同型が, その拡張にある示唆を与える事を見る.

もう少し詳しく説明しよう. その simple type は principal hereditary 多元環 $\mathfrak{A}$ と k の有限次拡大体 E を生成する単純元 β から出発して構成される. J は唯一の pro- p -unipotent 部分群 J^1 を含み, その商群 J/J^1 は E の剰余類体 $\bar{E}$ 上の一般線形群 $GL_R(\bar{E})$ のある Levi 部分群 $M = M(\bar{E})$ に同型となる. $GL_R(\bar{E})$ の Weyl 群におけるこの M の正規化部分群は対称群 S_e に同型である. その M のある '単純' な既約 cuspidal 表現を取り, これを持ち上げた J の既約 smooth 表現を σ と表す. この σ ともうひとつ別の β -extension と呼ばれる J の既約 smooth 表現 κ から, 表現 λ は $\kappa \otimes \sigma$ と定義される. 他方, その多元環 $\mathfrak{A}$ から $GL_R(E)$ の parahoric 部分群 P とその唯一の pro- p -unipotent 部分群 U が得られ, $M \simeq P/U$ となる. したがって, この同型によって, M のその既約 cuspidal 表現を P/U に移し, そして P の表現に持ち上げて, いわゆ

る, $GL_R(E)$ の tamely ramified 表現を得る. それを再び σ と表せ. これから tamely ramified intertwining algebra と呼ばれる別の Hecke 環

$$\mathcal{H}(\sigma) = \text{End}_{GL_R(E)}(c - \text{Ind}_P^{GL_R(E)}(\sigma))$$

を得る. このとき Bushnell-Kutzko [2] によって決定された Hecke 環 $\mathcal{H}(G, \lambda)$ の構造と Morris [19] 8.2 によって決定された Hecke 環 $\mathcal{H}(\sigma)$ の構造を比較して, 自然な同型

$$\mathcal{H}(G, \lambda) \simeq \mathcal{H}(\sigma)$$

を得る. この事実から, 一般の reductive 群 G に関する simple type の類似物は, そのような 2 つの Hecke 環の間の同型が存在し, それらがより単純なものとなるように定義されるべきである.

この論文において, 以下の結果を得る. Hecke 環 $\mathcal{H}(\sigma) = \text{End}_G(\text{Ind}_P^G(\sigma))$ の定義を, 有限体と非アルキメデスの局所体上のある非連結群 G に, 特に Chevalley 型の直交群 O_{2n+1}, O_{2n} に拡張する. ここで, 非アルキメデスの局所体の場合, 誘導作用素 Ind は $c\text{-Ind}$ を意味する. 実際, Goldberg-Herb [11] の方法を適用して, Hecke 環 $\mathcal{H}(\sigma)$ に関する有限群の Howlett-Lehrer [16] と p -進群の Morris [19] の結果を G/G^0 が有限 abel 群となる非連結群 G に拡張する. ここで, G^0 は G の単位元を含む連結成分を表す. さらに G が古典群 $Sp_{2n}, O_{2n+1}, O_{2n}$ の場合に, 上のような一般線形群と類似の, parahoric 部分群 P , その商群 $M = P/U$, そして, 既約 cuspidal Deligne-Lusztig 表現達のテンソル積である既約表現 σ を取り挙げ, Howlett-Lehrer [16] (4.15), Morris [19] 8.2, そして Howlett [15] の方法に従って, Hecke 環 $\mathcal{H}(\sigma) = \text{End}_G(c - \text{Ind}_P^G(\sigma))$ の基底 $W(\sigma)$ を具体的に計算して決定する. 最後に, 以上の結果から, 非アルキメデスの局所体 k 上の古典群 G に関して, simple type の類似を定義するために用いられる G 上の filtration の候補を挙げる.

2 Hecke algebras for finite groups

2.1 Non-connected finite algebraic groups

$k = \mathbb{F}_q$ を位数 q の有限体とし, G を有限体 k 上定義された reductive 代数群とする. G は必ずしも連結としない. そこで, G^0 をその単位元を含む連結成分とする. 簡単のため, G^0 を単純とする. また G^0 は必ずしも古典型とはしない.

今後, k 上の代数群 H に対して, $H = H(k)$ を H における k -有理点からなる群を表わす. $G^0 = G^0(k)$ は, ある Frobenius 写像 $F: G^0 \rightarrow G^0$ による G^0 における固定点からなる群 $(G^0)^F$ に同一視してよい. G^0 は次の 3 つの条件を満たす (cf. [6] 1.10, 1.18).

- (1) G^0 は split BN-pair (B, N) をもち, $W = N/N \cap B$ は生成系 $S = \{s_i | i \in I\}$ をもつ有限 Coxeter 群である.
- (2) G^0 は交換子関係を満たす.
- (3) 各元 $w \in W = N/N \cap B$ に対して, もしそれが簡約表示 $w = s_{i_1} s_{i_2} \cdots s_{i_r}$ をもつならば, N におけるその coset 代表 $\dot{w}$ を $\dot{w} = s_{i_1} s_{i_2} \cdots s_{i_r}$ となるようにとれる. ここで, S における添字集合 I を, ある自然数 ℓ に対して, $I = \{1, 2, \dots, \ell\}$ とする.

I の各部分集合 J に対して, G^0 の標準 parabolic 部分群 P_J とその Levi 分解 $P_J = L_J U_J$ が付随する. ここで, U_J は P_J の最大正規 unipotent 部分群であり, $U_J \cap L_J = 1$, そして L_J は P_J の Levi 部分群である. このとき, 連結簡約部分群 L_J と unipotent 部分群 U_J があって, $L_J = L_J(k)$ そして $U_J = U_J(k)$ となる. さらに G^0 の parabolic 部分群 $P_J = L_J U_J$ があって, $P_J = P_J(k)$ となる. A を L_J の split component とする. このとき, G^0 の極大 k -split トーラス T で, N は G^0 における T の正規化群 $N_{G^0}(T)$ であり, そして $A \subset T$ を満たすものが存在する. また L_J は G^0 における A の中心化群 $Z_{G^0}(A)$ である.

σ を L_J の既約 cuspidal 表現とする. この表現を U_J 上自明にして P_J に拡張した表現を再び σ と表し, そしてこれを G^0 に誘導した表現を $\text{Ind}_{P_J}^{G^0}(\sigma)$ と表す. このとき, $\text{Ind}_{P_J}^{G^0}(\sigma)$ の自己準同型環

$$\mathcal{H}^0(\sigma) = \text{End}_{G^0}(\text{Ind}_{P_J}^{G^0}(\sigma))$$

の構造は Howlett-Lehrer [16] によって決定された. G が連結でない場合, σ を G に誘導した表現を $\text{Ind}_{P_J}^G(\sigma)$ と表す. このとき, $\text{Ind}_{P_J}^G(\sigma)$ の自己準同型環

$$\mathcal{H}(\sigma) = \text{End}_G(\text{Ind}_{P_J}^G(\sigma))$$

を p -進群に関する Goldberg-Herb [11] の方法に従って調べる.

2.2 Dimensions of $\mathcal{H}^0(\sigma)$ and $\mathcal{H}(\sigma)$

[11] と同じように, G/G^0 は abel 群と仮定する. 古典群 G は明らかにこの仮定を満たしている.

π_1, π_2 を G の 2 つの表現とし, $I(\pi_1, \pi_2)$ でそれらの絡数 (interwining number) を表す. V_1, V_2 をそれぞれ π_1, π_2 の表現空間とする. このとき,

$$I(\pi_1, \pi_2) = \dim_{\mathbb{C}}(\text{Hom}_G(V_1, V_2))$$

ここで, $\text{Hom}_G(V_1, V_2)$ は G -準同型 $V_1 \rightarrow V_2$ からなる複素数体 $\mathbb{C}$ 上のベクトル空間を表す. とくに, $V_1 = V_2$ のとき, それは $\text{End}_G(V_1)$ であった.

π を G^0 の既約表現, V をその表現空間とする. π の G への誘導表現 $\text{Ind}_{G^0}^G(\pi)$ は空間

$$\mathcal{F} = \{f: G \rightarrow \mathbb{C} \mid f(g_0g) = \pi(g_0)f(g), g \in G, g_0 \in G^0\}$$

上の右移動 (right translation) に同値である. G^0 は G の正規部分群であるから, π と $g \in G$ に対して, G^0 の表現 ${}^g\pi$ を

$${}^g\pi(x) = \pi(g^{-1}xg), x \in G^0$$

で定義できる. さらに

$$G_\pi = \{g \in G \mid {}^g\pi \sim \pi\}$$

ここで, ${}^g\pi \sim \pi$ は ${}^g\pi$ と π が同値であることを表す. G_π は G の部分群である.

補題 2.2.1. (Clifford) Π を G の既約表現, π を重複度 r の Π の G^0 への制限 $\Pi|_{G^0}$ のある既約成分とせよ. このとき, 同値

$$\Pi|_{G^0} \sim r \sum_{g \in G/G_\pi} {}^g\pi$$

が存在する.

命題 2.2.2. (Gelbart-Knapp-Tadic) π を G^0 の既約表現とし, G の既約表現 Π を G^0 に制限すると π が重複度 $r > 0$ で現れるとせよ. $X = (G/G^0)^\wedge$ を *abel* 群 G/G^0 の Pontrjagin 双対とし, $X(\Pi) = \{\chi \in X \mid \Pi \otimes \chi \sim \Pi\}$ とおけ. このとき, 同型

$$\text{Ind}_{G^0}^G(\pi) \sim r \sum_{\chi \in X/X(\Pi)} \Pi \otimes \chi$$

が存在し, 等号 $r^2|X/X(\Pi)| = |G_\pi/G^0|$ が成り立つ, ここで, $|Y|$ は集合 Y の位数を表す.

補題 2.2.3. π_1, π_2 を G^0 の 2 つの既約表現とせよ. このとき, $\text{Ind}_{G^0}^G(\pi_1)$ と $\text{Ind}_{G^0}^G(\pi_2)$ がある共通の既約成分を含むための必要十分条件は, $\pi_2 \sim {}^g\pi_1$ を満たす元 $g \in G$ が存在する. このとき, $\text{Ind}_{G^0}^G(\pi_1)$ は $\text{Ind}_{G^0}^G(\pi_2)$ に同値である.

補題 2.2.4. π を $\text{Ind}_{L_J}^{G^0}(\sigma)$ のある既約成分とせよ. もし ${}^g\pi$ がまた $\text{Ind}_{L_J}^{G^0}(\sigma)$ の既約成分となるような元 $g \in G$ が存在するならば, $x_0g \in N_G(\sigma)$ となる元 $x_0 \in G^0$ が存在する. 逆に, もし $g \in G^0 N_G(\sigma)$ ならば, ${}^g\pi$ は $\text{Ind}_{L_J}^{G^0}(\sigma)$ の既約成分となり, ${}^g\pi$ の重複度は π の重複度に等しい.

補題 2.2.5. π を $\text{Ind}_{L_J}^{G^0}(\sigma)$ のある既約成分とせよ. このとき, 自然な全単射

$$N_{G_\pi}(\sigma)/N_{G^0}(\sigma) \simeq G_\pi/G^0$$

が存在する.

以上の結果から次を示せる.

補題 2.2.6. $\dim \mathcal{H}(\sigma) = |N_G(\sigma)/N_{G^0}(\sigma)| \dim \mathcal{H}^0(\sigma)$.

補題 2.2.7. $N_{G^0}(\sigma)$ は L_J と $\{\dot{w}|w \in W^{J,\sigma}\}$ によって生成される G^0 の部分群であり, そして $W_{G^0}(\sigma)$ は $W^{J,\sigma}$ に同型である.

証明. [6] Lemma 10.3.1 より, 主張の同型を導ける.

命題 2.2.8. $\dim \mathcal{H}(\sigma) = |W_G(\sigma)|$.

証明. 補題 2.2.7 と [16] (3.9) または [6] (10.1.5) より

$$\dim \mathcal{H}^0(\sigma) = |W_{G^0}(\sigma)|.$$

そこで, 補題 2.2.6 より

$$\begin{aligned} \dim \mathcal{H}(\sigma) &= |N_G(\sigma)/N_{G^0}(\sigma)| \dim \mathcal{H}^0(\sigma) \\ &= |W_G(\sigma)/W_{G^0}(\sigma)| |W_{G^0}(\sigma)| \\ &= |W_G(\sigma)|. \end{aligned}$$

2.3 Knapp-Stein intertwining operators

2.1 におけるように, $J \subset I$ に対して, $P_J = L_J U_J$ を G^0 の標準 parabolic 部分群とその Levi 分解とし, そして (σ, V) を L_J の既約 cuspidal 表現とする. さらにそれを U_J 上自明にして, P_J の表現に拡張する. これを再び σ とかく. G^0 と G 上の V に値をもつ関数の集合を

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^0(P_J, \sigma) &= \{f: G^0 \rightarrow V | f(\ell u x) = \sigma(\ell) f(x), \ell \in L_J, u \in U_J, x \in G^0\} \\ \mathcal{F}(P_J, \sigma) &= \{f: G \rightarrow V | f(\ell u x) = \sigma(\ell) f(x), \ell \in L_J, u \in U_J, x \in G\} \end{aligned}$$

とおけ. $\mathcal{F}^0(P_J, \sigma)$ と $\mathcal{F}(P_J, \sigma)$ 上のそれぞれ G^0 と G による右移動は誘導表現 $\text{Ind}_{P_J}^{G^0}(\sigma)$ と $\text{Ind}_{P_J}^G(\sigma)$ に同値である.

各元 $w \in W_{G^0}(\sigma) = N_{G^0}(\sigma)/L_J$ に対して, 2.1 における代表元 $\dot{w} \in N \cap N_{G^0}(\sigma)$ をとる (補題 2.2.7 を参照). $w \in W_{G^0}(\sigma)$ に対して, $\mathcal{F}^0(w^{-1} P_J w, \sigma)$ と $\mathcal{F}(w^{-1} P_J w, \sigma)$ を同様に定義できる. そこで, 各元 $w \in W_{G^0}(\sigma)$ に対して, intertwining 作用素 (intertwining operator)

$$J^0(w^{-1} P_J w : P_J : \sigma) : \mathcal{F}^0(P_J, \sigma) \rightarrow \mathcal{F}^0(w^{-1} P_J w, \sigma)$$

を次のように定義する: $f \in \mathcal{F}^0(P_J, \sigma)$ と $x \in G^0$ に対して

$$(J^0(w^{-1}P_Jw : P_J : \sigma)f)(x) = |\bar{U}_J \cap \dot{w}^{-1}U_J\dot{w}|^{-1} \sum_{u \in \bar{U}_J \cap \dot{w}^{-1}U_J\dot{w}} f(ux),$$

ここで, $\bar{U}_J$ は U_J の opposite を表す, すなわち $\bar{P}_J = L_J\bar{U}_J$ が $P_J = L_JU_J$ の opposite parabolic 部分群である ([6] 2 章を参照). これは次のように積分で表示される: $x \in G^0$ に対して

$$(J^0(w^{-1}P_Jw : P_J : \sigma)f)(x) = \int_{\bar{U}_J \cap \dot{w}^{-1}U_J\dot{w}} f(ux) du, \quad (2.1)$$

ここで, du は適当な測度である.

補題 2.2.7 の証明により, $N_{G^0}(L_J) \cap N_{G^0}(\sigma) \supset L_J$. そこで, [6] (10.3.2) より, L_J の表現 σ を $N_{G^0}(\sigma)$ のある射影表現 $\bar{\sigma}$ に拡張できる. また, $w \in W_{G^0}(\sigma)$ に対して, intertwining 作用素

$$A_{P_J}^0(w) : \mathcal{F}^0(w^{-1}P_Jw, \sigma) \rightarrow \mathcal{F}^0(P_J, \sigma)$$

を次のように定義する: $f \in \mathcal{F}^0(w^{-1}P_Jw, \sigma)$ と $x \in G^0$ に対して

$$(A_{P_J}^0(w)f)(x) = \bar{\sigma}(\dot{w})f(\dot{w}^{-1}x).$$

結局, $w \in W_{G^0}(\sigma)$ に対して, $\mathcal{F}^0(P_J, \sigma)$ 上の intertwining 作用素を

$$R^0(w, \sigma) = A_{P_J}^0(w) \circ J^0(w^{-1}P_Jw : P_J : \sigma)$$

で定義する.

他方 [16] あるいは [6] において, $w \in W_{G^0}(\sigma)$ に対して, $\mathcal{F}^0(P_J, \sigma)$ 上の intertwining 作用素 B_w^0 が, $f \in \mathcal{F}^0(P_J, \sigma)$ と $x \in G^0$ に対して

$$(B_w^0f)(x) = |U_J|^{-1}\tilde{\sigma}(\dot{w}) \sum_{u \in U_J} f(\dot{w}^{-1}ux)$$

で与えられる. 次の結果は直接示せる.

補題 2.3.1. $w \in W_{G^0}(\sigma)$ に対して, $R^0(w, \sigma) = B_w^0$.

2.4 Hecke algebras for non-connected groups

$w \in W_G(\sigma) = N_G(\sigma)/L_J$ に対して, $\mathcal{F}(P_J, \sigma)$ 上の intertwining 作用素 $R(w, \sigma)$ を同様に定義しよう. $w \in W_G(\sigma)$ に対して, 代表元 $\dot{w} \in N_G(\sigma)$ を次のように選ぶ: まず, もし $w \in W_{G^0}(\sigma)$ ならば, $\dot{w}$ を上で選らんだ通りとする. そうでなければ, $\dot{w}$ は適当に選ぶ. 各 $w \in W_G(\sigma)$ に対して, L_J と $\dot{w}$ によって生成される G の部分群を $K_{J,w}$ と表せ. このとき, L_J の表現 σ を $K_{J,w}$ の

ある射影表現 σ に拡張でき, そして作用素 $\sigma(\dot{w})$ を得る. もし $w \in W_{G^0}(\sigma)$ ならば, $K_{J,w} \subset N_{G^0}(\sigma)$ となる. そこで, もし $w \in W_{G^0}(\sigma)$ ならば, 上で定義した $N_{G^0}(\sigma)$ の射影表現 σ による $\sigma(\dot{w})$ に等しくなるように, $K_{J,w}$ のその射影表現 σ を ($\mathbb{C}^\times$ の元の積により) 調整できる.

各 $w \in W_G(\sigma)$ に対して, intertwining 作用素

$$\begin{aligned} J(w^{-1}P_Jw : P_J : \sigma) : \mathcal{F}(P_J, \sigma) &\rightarrow \mathcal{F}(w^{-1}P_Jw, \sigma) \\ A_{P_J}(w) : \mathcal{F}(w^{-1}P_Jw, \sigma) &\rightarrow \mathcal{F}(P_J, \sigma) \end{aligned}$$

を定義する: $f \in \mathcal{F}(P_J, \sigma)$ と $x \in G$ に対して

$$(J(w^{-1}P_Jw : P_J : \sigma)f)(x) = \int_{\bar{U}_J \cap \dot{w}^{-1}U_J\dot{w}} f(ux) du, \quad (2.2)$$

そして $f \in \mathcal{F}(w^{-1}P_Jw, \sigma)$ と $x \in G$ に対して

$$(A_{P_J}(w)f)(x) = \sigma(\dot{w})f(\dot{w}^{-1}x)$$

ここで, $\sigma(\dot{w})$ は上で定義した作用素である.

注意 1. (2.4) の定義において, $\bar{U}_J \subset G^0$ は U_J の opposite であり, そして $\dot{w}^{-1}U_J\dot{w} \subset G^0$. また du は (2.3) と類似の測度である.

$\mathcal{F}(P_J, \sigma)$ 上の intertwining 作用素 $R(w, \sigma)$ を $w \in W_G(\sigma)$ に対して

$$R(w, \sigma) = A_{P_J}(w) \circ J(w^{-1}P_Jw : P_J : \sigma)$$

と定義する.

$$G = \prod_{i=1}^k G^0 x_i$$

ここで, $x_1 = 1$ とする. $f \in \mathcal{F}(P_J, \sigma)$, $1 \leq i \leq k$ に対して

$$f_i(x) = \begin{cases} f(x) & (x \in G^0 x_i \text{ のとき}) \\ 0 & (\text{そうでないとき}) \end{cases}$$

とおけ. このとき, $f_i \in \mathcal{F}(P_J, \sigma)$ そして $f = \sum_{i=1}^k f_i$ となる.

各 $1 \leq i \leq k$ に対して, 2つの写像

$$\lambda_i : \mathcal{F}^0(P_J, \sigma) \rightarrow \mathcal{F}(P_J, \sigma), \quad \delta_i : \mathcal{F}(P_J, \sigma) \rightarrow \mathcal{F}^0(P_J, \sigma)$$

を次のように定義する: $f \in \mathcal{F}^0(P_J, \sigma)$ に対して

$$(\lambda_i f)(x) = \begin{cases} f(x_0) & (x = x_0 x_i, x_0 \in G^0 \text{ のとき}) \\ 0 & (\text{そうでないとき}) \end{cases}$$

また $f \in \mathcal{F}(P_J, \sigma)$ に対して

$$(\delta_i f)(x_0) = f(x_0 x_i), \quad x_0 \in G^0.$$

このとき, $\delta_i \circ \lambda_i = \text{Id}$, また $f = \sum_{i=1}^k f_i$ に対して, $\lambda_i \circ \delta_i(f) = f_i$.

作用素 $J^0(w^{-1}P_J w : P_J : \sigma)$ は (2.3) によつて $w \in W_{G^0}$ 上定義された. 等号 $\dot{w}^{-1}L_J \dot{w} = L_J$ と注意 1 とより, それは $w \in W_G(\sigma)$ 上に拡張できる.

以下の一連の結果の証明は [11] に見出せる.

補題 2.4.1. $w \in W_G(\sigma)$ とせよ. このとき

$$J(w^{-1}P_J w : P_J : \sigma) = \sum_{i=1}^k \lambda_i \circ J^0(w^{-1}P_J w : P_J : \sigma) \circ \delta_i.$$

系 2.4.2. $f \in \mathcal{F}(P_J, \sigma), x \in G, x_0 \in G^0$, そして $w \in W_G(\sigma)$ とせよ. このとき

$$J(w^{-1}P_J w : P_J : \sigma)f(x_0) = J^0(w^{-1}P_J w : P_J : \sigma)\phi(x_0)$$

ここで, $\phi = \gamma(x)f|_{G^0}$.

上で定義した λ_i に対して

$$\Phi = \lambda_1$$

とかけ. このとき, $\phi \in \mathcal{F}^0(P_J, \sigma)$ に対して, $f = \Phi(\phi) = \lambda_1(\phi)$ は, もし $x \in G^0$ ならば, $f(x) = \phi(x)$ であり, さもなければ, $f(x) = 0$, を満たす. また

$$W_G(\sigma) = \prod_{i=1}^{\ell} w_i W_{G^0}(\sigma) \quad (2.3)$$

ここで, $w_1 = 1$ と約束する.

補題 2.4.3. 各 $1 \leq i \leq \ell$ に対して, 関数 $\eta_i : W_{G^0}(\sigma) \rightarrow \mathbb{C}^\times$ で, $w \in W_{G^0}(\sigma)$ に対して

$$R(w_i, \sigma)R(w, \sigma) = \eta_i(w)R(w_i w, \sigma) \quad (2.4)$$

を満たすものが存在すると仮定せよ. $\phi \in \mathcal{F}^0(P_J, \sigma)$ そして $f = \Phi(\phi)$ を上で定義したとおりとせよ. 今 $w_i \in W_G(\sigma)$ を固定せよ. このとき, $w \in W_G(\sigma), x_0 \in G^0$ に対して, もし $w = w_i w_0, w_0 \in W_{G^0}(\sigma)$ でないなら,

$$R(w, \sigma)f(\dot{w}_i x_0) = 0,$$

そして, もし $w = w_i w_0, w_0 \in W_{G^0}(\sigma)$ なら,

$$R(w, \sigma)f(\dot{w}_i x_0) = \eta_i(w_0)\bar{\sigma}(\dot{w}_i)J^0(w_i^{-1}P_J w_i : P_J : \sigma)R^0(w_0, \sigma)\phi(x_0).$$

以上の結果から, 次を得る.

定理 2.4.4. (2.6) を満たす関数 $\eta_i: W_{G^0}(\sigma) \rightarrow \mathbb{C}^\times$, $1 \leq i \leq \ell$ が存在すると仮定せよ. このとき, 集合 $\{R(w, \sigma) | w \in W_G(\sigma)\}$ は $\mathcal{H}(\sigma) = \text{End}_G(\text{Ind}_{P_J}^G(\sigma))$ のある基底を形成する.

命題 2.4.5. もし $W_G(\sigma) = W_{G^0}(\sigma)$ なら, $\mathcal{H}(\sigma)$ は多元環として $\mathcal{H}^0(\sigma)$ に同型である.

p -進古典群 $G = O_{2n+1}$ ($n \geq 2$) を考察する. このとき, $G^0 = SO_{2n+1}$ として $G = SO_{2n+1} \times \{\pm 1\}$. この部分群 $\{\pm 1\}$ は G の中心である.

$J \subset I = \{1, 2, \dots, n\}$ に付随する $G^0 = SO_{2n+1}$ の標準的 parabolic 部分群 $P_J = L_J U_J$ とその Levi 部分群 L_J の既約 cuspidal 表現 σ をとれ. このとき, $\{\pm 1\} \subset W_G(\sigma)$ は明らかである. そこで

$$W_G(\sigma) = W_{G^0}(\sigma) \cup (-1)W_{G^0}(\sigma). \quad (2.5)$$

2.2 における $\bar{\sigma}$ の定義から, 各 $w \in W_{G^0}(\sigma)$ に対して,

$$\bar{\sigma}((-w)) = \bar{\sigma}(w)$$

としてよい. これから, $f \in \mathcal{F}(P_J, \sigma)$ に対して

$$R(-1, \sigma)f(x) = f(-x), \quad x \in G.$$

補題 2.4.6. $w \in W_{G^0}(\sigma)$ に対して

$$R(-1, \sigma)R(w, \sigma) = R(w, \sigma)R(-1, \sigma) = R(-w, \sigma).$$

この命題は, その作用素 $R(-1, \sigma)$ は多元環 $\mathcal{H}(\sigma)$ において中心的 (central) かつ対合的 (involutive) であることを示す. そこで $G = O_{2n+1}$ は定理 2.4.4 の条件を満たす. したがって, その定理 2.4.4. と命題 2.4.5 から次の結果を得る.

定理 2.4.7. $G = O_{2n+1}$ に関して, 多元環 $\mathcal{H}(\sigma)$ は $\mathcal{H}^0(\sigma) \times \langle R(-1, \sigma) \rangle$ に同型である.

2.5 Howlett-Lehrer theory for non-connected groups

2.2 におけるように, G を有限体 k 上定義されたある reductive 代数群とし, G^0 をその単位元を含む連結成分とする.

それらの k -有理点からなる群 $G = G(k)$, $G^0 = G^0(k)$ に関して, 2.3 と同じように G/G^0 は abel 群であると仮定する. 2.2 において, G^0 は BN-pair (B, N) をもつことを見た. 今後, その N を N' と書き換え, $W' = N'/B \cap N'$ と書く. さらに, この BN-pair (G^0, B, N') に対して, G はある generalized BN-pair (G, B, N) をもつと仮定せよ. すなわち, (G, B, N) は次の性質を満たす (cf. [17], [19] (3.2)):

- (1) $B \cap N$ は N の正規部分群である。
 (2) 商群 $W = N/B \cap N$ は正規部分群 W' を含み、そしてその部分群 Ω に対して、 W は Ω と W' の半直積である。
 (3) $S = \{s_a \mid a \in \Pi\}$ は Weyl 群 W' における基本鏡映 (fundamental reflection) の集合である。ここで、 Π は G^0 の (relative) ルート系のある基底とする。
 (a) $n \in N$ が $w \in W$ に射影し、 $n_a \in N$ が $s_a \in S$ に射影するならば、

$$nBn_a \subset Bnn_aB \cup BnB.$$

- (b) $a \in \Pi$ に対して、 $n_aBn_a \neq B$.
 (4) $\rho \in \Omega$ に対して、 $\rho S \rho^{-1} = S$.
 (5) $\rho \in \Omega - \{1\}$ に対して、 $\rho B \rho^{-1} = B$.
 (6) G は B と N によって生成される。

$J \subset I$ に対して、 $P_J = L_J U_J$ を G^0 の標準的 parabolic 部分群とし、 σ をその Levi 部分群 L_J の既約 cuspidal 表現とせよ。このとき、(連結) 有限群に関する Howlett-Lehrer 理論を拡張した Morris による p -進群に関する証明 [19, 20] は、命題 2.2.8 から始め、Carter [6] の 2.5-2.8 そして 10.2-10.8 を参照することによって、上の仮定を満たす有限群 G に対しても有効であることを確かめられる。すなわち、[16] Theorem 4.14 の類似を得る：多元環 $\mathcal{H}(\sigma) = \text{End}_G(\text{Ind}_{P_J}^G(\sigma))$ の構造が決定される。

古典群 $G = O_{2n} (n \geq 4)$ が上の仮定を満たすことを注意する。それは anti-diagonal $2n$ 次正方行列 $J_{2n} = (g_{ij})$, ここで、 $g_{ij} = \delta_{2n+1-i,j}$ (Kronecker デルタ) ($1 \leq i, j \leq 2n$) に対応する $V = k^{2n}$ 上の非退化 2 次形式の直交群である。このとき、 $G^0 = SO_{2n}$. T を G^0 の diagonal 行列からなる極大トーラス、 B を T を含む G^0 の上半三角行列からなる Borel 部分群とする。 $N' = N_{G^0}(T)$ とせよ。このとき、 (G^0, B, N') が 2.2 の条件を満たす BN-pair である。行列

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 0 & 1 & \\ & & & 1 & 0 & \\ & & & & & 1 \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

を ε と書け。このとき、 $G = G^0 \cup G^0 \varepsilon$. B の行列の形から、その元 ε は T および B を正規化する (cf. [9] 15.3). 実際、 ε は G^0 の Dynkin graph の自己同型 (その位数は 2 である) を導く。したがって、[1] IV, §2, Exercise 8 より、 G は

ある generalized BN-pair (G, B, N) をもつ. ここで, $G = G^0 \cdot \langle \varepsilon \rangle$, $N = N' \cdot \langle \varepsilon \rangle$.

3 Hecke algebras for p -adic groups

3.1 Affine BN-pairs

k を非アルキメデスの局所体, $\mathcal{O}$ をその極大 order, そして $\mathfrak{P}$ を $\mathcal{O}$ の極大イデアルとする. ϖ を $\mathcal{O}$ のある素元とする. その剰余類体 $\bar{k} = \mathcal{O}/\mathfrak{P}$ はその位数 q が素数 p のある巾である有限体 $\mathbb{F}_q$ とせよ.

G を k 上定義された reductive 代数群とし, G^0 を G の単位元を含む連結成分とする. T を G^0 の極大 k -分裂トーラスとし, N を T の G^0 における正規化部分群とする. $X_k(T)$ を T の k -有理指標のなす lattice とする.

2.2 と同様に k 上の代数群 H に対して, $H = H(k)$ を H における k -有理点からなる群を表わす.

$G = G(k)$ と $G^0 = G^0(k)$ は totally disconnected, locally compact 群であり, また unimodular である.

Φ を (G^0, T) に関する relative ルートからなる $X_k(T)$ の部分集合とし, Δ を Φ の単純ルートの集合とする. vW を Φ の Weyl 群とする. V^* を $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間 $X_k(T) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ の Φ によって生成される部分空間とする. Σ を V^* における reduced ルート系 ${}^v\Sigma$ をもつ affine ルートの集合とし, W' を Σ の affine Weyl 群とする. V を V^* の $\mathbb{R}$ -dual とし, A を V 下の affine 空間とせよ. このとき, Σ の元は A 上の affine 関数であり, W' は A 上の affine 自己同型からなる群 $\text{Aff}(A)$ の部分群である.

各 $a \in \Sigma$ に対して, a の gradient とよばれる ${}^v\Sigma$ の元 Da が定まる. ${}^v\Sigma$ と Φ は同じ Weyl 群 vW をもつと仮定する. Φ_{nd} で Φ の non-divisible 元となる集合とする. このとき, [4] で定義される échelonnage を通して, 各 $\alpha \in \Phi$ に対して, $a \in \Sigma$ が存在して

$$\alpha = \mu_\alpha \rho(Da), \mu_\alpha > 0$$

となる 1 対 1 対応

$$\rho: {}^v\Sigma \longrightarrow \Phi_{\text{nd}}$$

が唯一通り存在する. とくに G^0 が Chevalley 型ならば, $\Phi = {}^v\Sigma$, そして $\Sigma = \{\alpha + k \mid \alpha \in {}^v\Sigma, k \in \mathbb{Z}\}$, ここで, $\alpha + k$ は A 上の affine 関数である.

[5] 5.2.11 により, affine ルート系 Σ とその基底 Π に付随して $G^0 = G^0(k)$ に以下の性質を満たす 4 つ組 (G', B, N', S) が存在する:

- (1) G' は G^0 の正規部分群である.
- (2) N' は $T = T(k)$ の G' における正規化群 $N_{G'}(T)$ である.

- (3) (G', B, N', S) は G' において BN-pair の公理 (cf. [1] IV, n° 1, § 2) を満たす.

$$H = B \cap N'$$

とおけ. このとき, $W' = N'/H$, $S \subset W'$ は Π の元 a に付随する基本鏡映 s_a からなる集合であり, そして (W', S) は Coxeter 系である. W' は無限群であり, affine Weyl 群とよばれる. また (G', B, N', S) は affine BN-pair とよばれる.

[19] 3.3(e) と 3.12 より, その affine BN-pair (G', B, N', S) に対して, G^0 はある generalized affine BN-pair (G^0, B, N) をもつ (cf. 2.5). そして $G^0 = G' \cdot \Gamma$ (半直積), $\Gamma/\Gamma \cap B \simeq G^0/G'$ を満たす G^0 の部分群 Γ が存在する. G^0 が半単純で Chevalley 型の場合, この事実が岩堀・松本 [18] により証明された.

$G = G(k)$ は G^0 を正規部分群として含む. その affine BN-pair (G', B, N', S) に対して, G もある generalized affine BN-pair (G, B, N) を場合がある. その例として, 有限群の場合の 2.5 と類似で, $G = O_{2n}$ ($n \geq 4$) がある. この事実は 2.5 の結果から [1] IV, §2, Exercise 8 を適用して直ちに示される. または, building 理論を用いた [10] §5 と §20 から導かれる.

3.2 Parahoric subgroups

今後, G は連結であるか, または G^0 の affine BN-pair (G', B, N', S) に対して, ある generalized affine BN-pair をもつと仮定する. また (G, B, N) をその generalized affine BN-pair とする. したがって, $G \supset G^0 \supset G'$. われわれは G の parahoric 部分群を定義する.

[4] より, affine BN-pair (G', B, N') から, Bruhat-Tits building $\mathcal{B}$ が構成される. $\mathcal{B}$ 上に G^0 および G' が作用する. これは次の性質を満たす (cf. [23] 2.1):

- (1) $\mathcal{B}$ は 3.1 の affine 空間 A を含む.
- (2) $\mathcal{B}$ は G' -集合であり, $\mathcal{B} = \bigcup_{g \in G'} gA$.
- (3) N' は A を安定化し, それが準同型 $\nu : N' \rightarrow \text{Aff}(A)$ を導く, そして $W' = \nu(N')$.
- (4) $H = B \cap N' = \text{Ker}(\nu)$.
- (5) A の面分 (facet) は $\mathcal{B}$ の面分であり, そして $\mathcal{B}$ の面分は G' の元によって A の面分に移される.

$G(k)$ が $\mathcal{B}$ 上 simplicial complex の自己同型として作用すると仮定せよ. $\mathcal{B}$

の面分 F の G' -中心化群

$$P_F = \{g \in G' \mid g.x = x, x \in F\}$$

を G' の parahoric 部分群とよぶ. P が G の parahoric 部分群とは, $P = P_F$ を満たす $\mathcal{B}$ のある面分 F が存在するときとする. すなわち, $P = P_F$ は G' の parahoric 部分群に他ならない.

affine ルート系 Σ の基底 Π に, A の alcove C_0 が対応して

$$\Pi = \{a \in \Sigma \mid a|_{C_0} \equiv 0\}$$

となる. ここで, $a|_{C_0}$ は affine 関数 a を C_0 に制限したものを表す.

$J \subset \Pi$ とせよ. J に対して, C_0 の閉包 $\overline{C_0}$ の面分 F が対応する.

$$\Sigma_F = \{a \in \Sigma \mid a|_F \equiv 0\}$$

さらに 3.1 の Σ と Φ の関連から, ルート系

$$\Phi_F = \{\alpha \in \Phi \mid \exists a \in \Sigma_F \text{ s.t. } \alpha = \mu_\alpha \rho(Da)\}$$

を得る. 今後

$$\Sigma_J = \Sigma_F, \Phi_J = \Phi_F$$

と書く. このとき, Φ_J は必ずしも Φ において closed とは限らない.

W_J を基本鏡映 s_a , $a \in J$ によって生成される W' の部分群とせよ. このとき, W_J は Φ_J の Weyl 群である. さらに

$$P_J = P_F$$

と書け. これを G の標準的 parahoric 部分群とよぶ. この P_J に付随して, G^0 のコンパクト開 pro- p -unipotent 部分群 U_J と連結 reductive $\mathbb{F}_q$ -代数群 M_J が存在する. $M_J = M_J(\mathbb{F}_q)$ と書くとき, exact 列

$$1 \rightarrow U_J \rightarrow P_J \rightarrow M_J \rightarrow 1 \quad (3.1)$$

を得る.

各 $\alpha \in \Phi_{\text{nd}}$ に対して, U_α を G^0 における対応するルート部分群とする. $J \subset \Pi$ とし, $F \subset A$ を J に対応する面分とせよ. このとき, $a = a(\alpha, J)$ で, $a|_F \geq 0$ かつ $\rho(Da) = \alpha$ となる (選択 $\Pi \subset \Sigma$ が定める順序に関して) 最小の affine ルートを表す. このとき, 各 $a \in \Sigma$ に対して, $\alpha = \rho(Da)$ となる $\alpha \in \Phi_{\text{nd}}$ が定まり, そして $U_\alpha = U_\alpha(k)$ のコンパクト開部分群 U_α が定まる.

Φ^+ を基底 Δ に関する Φ の正ルートの集合とする. このとき, G' の部分群を以下のように定義する:

$$\begin{aligned}
U_J^+ &= U_F^+ = \langle U_{\alpha(\alpha, J)} \mid \alpha \in \Phi_{\text{nd}}^+ = \Phi_{\text{nd}} \cap \Phi^+ \rangle, \\
U_J^- &= U_F^- = \langle U_{\alpha(\alpha, J)} \mid \alpha \in \Phi_{\text{nd}}^- = \Phi_{\text{nd}} \cap (-\Phi^+) \rangle, \\
N_J' &= \{n \in N' \mid n.x = x, x \in F\}.
\end{aligned}$$

${}^c\Phi_J$ で Φ における Φ_J の閉包を表す. G^0 の部分群

$$\mathfrak{M} = \langle T, U_\alpha \mid \alpha \in {}^c\Phi_J \rangle$$

を定義する. このとき, $\mathfrak{M}$ は T を含む G^0 の連結 reductive k -代数部分群であり, ${}^c\Phi_J$ が $(\mathfrak{M}, T)$ のルート系である. $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}(k)$ の部分群

$$\begin{aligned}
\mathfrak{M}' &= \langle H, U_\alpha \mid \alpha \in {}^c\Phi_J \rangle, \\
\mathcal{M}_J &= \mathfrak{M}' \cap P_J, \quad \mathcal{U}_J = \mathfrak{M}' \cap U_J
\end{aligned}$$

を定義する. このとき, [20] 1.10 から, exact 列

$$1 \rightarrow \mathcal{U}_J \rightarrow \mathcal{M}_J \rightarrow M_J \rightarrow 1 \quad (3.2)$$

を得る.

3.3 Generalized affine Hecke algebras

G および (G, B, N) を前の 3.2 の初めに仮定した通りとする. $J \subset \Pi$ とし, P_J, M_J そして $\mathcal{M}_J$ を 3.2 の通りとせよ. (σ, V) を連結 reductive $\mathbb{F}_q$ -代数群の $\mathbb{F}_q$ -有理点の群 $M_J = \mathbf{M}_J(\mathbb{F}_q)$ の既約 cuspidal 表現とせよ. exact 列 (3.1) から, σ を P_J の表現に持ち上げることができる. これもまた σ と表す. この表現 σ の G への compact 誘導表現を $c\text{-Ind}_{P_J}^G(\sigma)$ と書く. このとき, その自己同型群を有限群の場合と同じように

$$\mathcal{H}(\sigma) = \text{End}_G(c\text{-Ind}_{P_J}^G(\sigma))$$

と書く. われわれはこの多元環の基底を与え, それらの間の乗法関係を計算し, そしてそれがある generalized affine Hecke algebra であることを 2 章の有限群と同じ方法で見ると, M_J の表現 σ は exact 列 (3.2) から $\mathcal{M}_J$ の表現, σ と表す, に持ち上げられる. G における generalized affine BN-pair (G, B, N) から, $W = N/H = \Omega \cdot W'$ (半直積) を得る. W の部分群

$$S_J = \{w \in W \mid w(J) = J\}$$

を定義する. そして, N_J を射影 $N \rightarrow W = N/H$ のもと, 3.2 で定義した $W_J (\subset W')$ の逆像とせよ. このとき, [19] 4.16 より, $N_J = N \cap \mathcal{M}_J$ そしてこれは N における $\mathcal{M}_J$ の正規化群 $N_N(\mathcal{M}_J)$ において正規である. したがって, [6] 9.2.1 と [16] (2.2) とから,

$$N_N(\mathcal{M}_J)/N_J \simeq N_W(W_J)/W_J \simeq S_J.$$

$\mathcal{M}_J$ の表現 σ に対して

$$W_G(\sigma) = \{w \in S_J \mid {}^w\sigma \sim \sigma\}$$

と定義せよ. ここで, ${}^w\sigma$ を有限群の 2.2 の通りに定義する.

$W = \Omega \cdot W'$ の元 w の長さ $\ell(w)$ を Coxeter 系 (W', S) の長さから定義できる. $w \in W$ に対して, $\dot{w} = n_w$ を N におけるある代表元を表す. [19] 5.2 より, 2.1 の有限群と同じように, もし $\ell(w_1 w_2) = \ell(w_1) + \ell(w_2)$ ならば, $n_{w_1 w_2} = n_{w_1} n_{w_2}$ となるように n_w をとることができる.

G 上 $\mathbb{C}$ -ベクトル空間 V に値をもちコンパクトな台 (support) をもつ関数の集合を $C_c(G, V)$ と表す. このとき

$$\mathcal{F}(P_J, \sigma) = \{f \in C_c(G, V) \mid f(px) = \sigma(p)f(x), p \in P_J, x \in G\}$$

とおけ. この $\mathbb{C}$ -ベクトル空間 $\mathcal{F}(P_J, \sigma)$ 上の G による右移動 (right translation) は compact 誘導表現 $c\text{-Ind}_{P_J}^G(\sigma)$ に同値である. 各 $w \in W_G(\sigma)$ に対して, [11] に従って, $\mathcal{F}(P_J, \sigma)$ 上の intertwining 作用素 $R(w, \sigma)$ を定義する.

そのために準備をする. $w \in W$ とせよ. 3.2 の記号を用いる. [19] 5.6 と [20] Corrigendra とより, U_{wJ} の部分群

$$\begin{aligned} U_{w,J}^+ &= \langle H^*, U_a \mid a \notin \Sigma_{wJ}, a > 0, w^{-1}a > 0 \rangle, \\ U_{w,J}^- &= \langle U_a \mid a \notin \Sigma_{wJ}, a > 0, w^{-1}a < 0 \rangle \end{aligned}$$

を定義する. ここで, 定理 3.2.1 のように $H^* = H \cap U_{wJ}$. このとき, [19] 5.7 と定理 3.2.1 より, $U_{wJ} = \langle U_{w,J}^-, U_{w,J}^+ \rangle$ そして

$$U_{w,J}^+ \backslash U_{wJ} \simeq U_{w,J}^+ \cap U_{w,J}^- \backslash U_{w,J}^-.$$

さて, 各 $w \in W_G(\sigma)$ に対して, intertwining 作用素

$$J(w^{-1}P_J w : P_J : \sigma) : \mathcal{F}(P_J, \sigma) \rightarrow \mathcal{F}(w^{-1}P_J w, \sigma)$$

を次のように定義する: $f \in \mathcal{F}(P_J, \sigma)$ に対して,

$$(J(w^{-1}P_J w : P_J : \sigma)f)(x) = \frac{1}{|U_{w,J}^-|} \int_{U_{w,J}^-} f(ux) du, \quad x \in G$$

ここで, $U_{w,J}^- = U_{w,J}^+ \backslash U_{wJ}$ とする. これは有限集合であり, $|U_{w,J}^-|$ はその位数を表す. さらに, du は適当な測度である.

今 $N_G(\sigma) = \langle \mathcal{M}_J \cup \{\dot{w} \mid w \in W_G(\sigma)\} \rangle$ とおけ. このとき

$$N_G(\sigma) / \mathcal{M}_J \simeq W_G(\sigma)$$

だから, $\mathcal{M}_J$ の表現 σ を $N_G(\sigma)$ の射影表現 $\bar{\sigma}$ に拡張できる:

$$({}^w\sigma)(x) = \bar{\sigma}(\dot{w})^{-1} \sigma(x) \bar{\sigma}(\dot{w}), \quad x \in N_G(\sigma).$$

そこで, $w \in W_G(\sigma)$ に対して, intertwining 作用素

$$A_{P_J}(\sigma) : \mathcal{F}(w^{-1}P_Jw, \sigma) \rightarrow \mathcal{F}(P_J, \sigma)$$

を次のように定義する: $f \in \mathcal{F}(w^{-1}P_Jw, \sigma)$ に対して

$$(A_{P_J}(\sigma)f)(x) = \bar{\sigma}(\dot{w})f(\dot{w}^{-1}x), \quad x \in G.$$

結局, $w \in W_G(\sigma)$ に対して, $\mathcal{F}(P_J, \sigma)$ 上の intertwining 作用素を

$$R(w, \sigma) = A_{P_J}(\sigma) \circ J(w^{-1}P_Jw : P_J : \sigma)$$

と定義する.

今 G は連結と仮定せよ. このとき, [19] 5.4 において, $w \in W_G(\sigma)$ に対して, $\mathcal{F}(P_J, \sigma)$ 上の intertwining 作用素 B_w が定義されている. これは [19] 5.9 より

$$R(w, \sigma) = B_w, \quad w \in W_G(\sigma)$$

と一致する. したがって, [19] 5.4 と 5.5 から次の命題を得る.

命題 3.3.1. $R(w, \sigma), w \in W_G(\sigma)$ は多元環 $\mathcal{H}(\sigma)$ のある基底を形成する.

$W = N/H$ の部分群 $W_G(\sigma)$ の構造が [19] 7.3 により次のように決定される.

命題 3.3.2. G は連結とせよ. このとき, $W_G(\sigma)$ はある *affine Coxeter* 群に同型なある正規部分群 $R(\sigma)$ を含む. $C(\sigma)$ をその *complement* とすると, $W_G(\sigma) = R(\sigma) \cdot C(\sigma)$ (半直積) となる. さらに, 正ルートの集合 Σ^+ から $R(\sigma)$ に付随する *affine* ルート系の単純ルートの集合を自然に得る.

[19] §6, §7 において, 分解 $W_G(\sigma) = R(\sigma) \cdot C(\sigma)$ に従って intertwining 作用素 $R(w, \sigma), w \in W_G(\sigma)$ の間の乗法関係が計算される. さらに [19] 7.7 と 7.8 において, それらを正規化して作用素 $T_w, w \in W_G(\sigma)$ が得られる. [19] 6.2 と 7.11 より, また $C(\sigma) \times C(\sigma)$ 上のみ非自明なある 2-cocycle

$$\mu : W_G(\sigma) \times W_G(\sigma) \rightarrow \mathbb{C}^\times$$

が得られる.

定理 3.3.3. G は連結とせよ. 多元環 $\mathcal{H}(\sigma)$ は次の関係の下, 元 $T_w, w \in W_G(\sigma)$ によって生成される. $v = v[a, J]$ をある単純ルート $a \in \Pi$ に対応する $R(\sigma)$ の鏡映, そして $w \in W_G(\sigma), t \in C(\sigma)$ とせよ. このとき

$$(1) T_w T_t = \mu(w, t) T_{wt}$$

$$(2) T_t T_w = \mu(t, w) T_{tw}$$

(3)

$$T_v T_w = \begin{cases} T_{vw}, & w^{-1}a > 0 \\ p_a T_{vw} + (p_a - 1)T_w, & w^{-1}a < 0 \end{cases}$$

(4)

$$T_w T_v = \begin{cases} T_{wv}, & wa > 0 \\ p_a T_{wv} + (p_a - 1)T_w, & wa < 0 \end{cases}$$

ここで, p_a は k の剰余標数 p のある非負整数巾, そして T_w は $P_J w P_J$ を台にもつ.

以上の結果 3.3.1 から 3.3.3 は [19, 20] において示された. しかしながら, それらの証明は $G = G(k)$ が generalized affine BN-pair をもつ場合にもそのまま有効であることがわかる.

定理 3.3.4. 上のような generalized affine BN-pair をもつ G に関して, 命題 3.3.1, 3.3.2, そして定理 3.3.3 が成立する.

3.1 の最後の注意から, とくに $G = O_{2n}$ ($n \geq 4$) に関して, 定理 3.3.3 が成立している.

最後に $G = O_{2n+1}$ ($n \geq 2$) を考察する. $J \subset \Pi$ とし, (σ, V) を $M_J = \mathbf{M}_J(\mathbb{F}_q)$ の既約 cuspidal 表現とせよ. $(\sigma^\vee, V^\vee)$ を (σ, V) の contragredient 表現とせよ. このとき, $\mathcal{H}(\sigma)$ は Hecke 環 $\mathcal{H}(G, \sigma^\vee)$ に同型であり (cf. [2] §4), さらにこれは

$$\{f \in C_c^\infty(G, \text{End}(V)) \mid f(p_1 x p_2) = \sigma(p_1) f(x) \sigma(p_2), x \in G, p_1, p_2 \in P_J\}$$

に同型である. ここで, $C_c^\infty(G, \text{End}(V))$ は locally constant かつ compactly supported 関数 $f: G \rightarrow \text{End}(V)$ からなる $\mathbb{C}$ -ベクトル空間を表す. したがって, $\mathcal{H}(\sigma)$ をその空間と同一視してよい. G^0 に関して, $\mathcal{H}(\sigma)$ と区別して,

$$\mathcal{H}^0(\sigma) = \text{End}_{G^0}(c - \text{Ind}_{P_J}^{G^0}(\sigma))$$

と書く. [19] 4.9 より, Mackey intertwining 定理

$$\mathcal{H}(\sigma) \simeq \bigoplus_{x \in P_J \backslash G / P_J} \text{Hom}_{P_J \cap x P_J x^{-1}}({}^x \sigma, \sigma)$$

を得る. $G = G^0 \times \{\pm 1\}$ また $P_J \subset G^0$ だから

$$P_J \backslash G / P_J = (P_J \backslash G^0 / P_J) \cup (P_J \backslash \pm P_J / P_J).$$

また $W_G(\sigma) \supset \{\pm 1\}$ だから

$$W_G(\sigma) = W_{G^0}(\sigma) \times \{\pm 1\}.$$

もし関数 $f \in C_c^\infty(G, \text{End}(V))$ がある $x \in G^0$ に対して, $P_J x P_J$ を台にもつならば, $f|_{G^0}$ は $\mathcal{H}^0(\sigma)$ に属し $P_J x P_J$ を台にもつ. そこで, [19] 4.14 より, $x \in W_{G^0}(\sigma)$. intertwining 作用素 $R(\pm w, \sigma)$, $w \in W_{G^0}(\sigma)$ を上と同じように定義できる. 有限体の場合と同じように,

$$R(-w, \sigma) = R(-1, \sigma)R(w, \sigma), w \in W_{G^0}(\sigma)$$

そして $f \in \mathcal{F}(P_J, \sigma)$ に対して,

$$R(-1, \sigma)f(x) = f(-x), x \in G$$

を得る. $R(-1, \sigma)$ は可逆だから, $R(-w, \sigma) \neq 0$. $-w$ の代表元 $-n$ に対して,

$$\text{Hom}_{P_J \cap (-n)P_J}({}^{(-n)}\sigma, \sigma) = \text{Hom}_{P_J \cap {}^n P_J}({}^n\sigma, \sigma) \simeq \mathbb{C}$$

だから, $\text{Hom}_{P_J \cap (-n)P_J}({}^{(-n)}\sigma, \sigma) = \mathbb{C}R(-w, \sigma)$. したがって, $R(\pm w, \sigma), w \in W_{G^0}(\sigma)$ が $\mathcal{H}(\sigma)$ を生成する.

定理 3.3.5. $G = O_{2n+1}$ に関して, $R(w, \sigma), w \in W_G(\sigma)$ は多元環 $\mathcal{H}(\sigma)$ のある基底を与える.

証明. $R(w, \sigma), w \in W_G(\sigma)$ が $\mathbb{C}$ 上一次独立であることを示せばよい. 有限群の場合の定理 2.4.4 の主張および証明は p -進群に関するしても有効である. したがって, この定理の主張を示せる.

系 3.3.6. $G = O_{2n+1}$ に関して, $\mathcal{H}(\sigma) \simeq \mathcal{H}^0(\sigma) \times \langle R(-1, \sigma) \rangle$.

証明. この主張は有限群の場合の定理 2.4.7 と全く同じである. その証明は p -進群に関するしても有効である.

4 Examples

4.1 Preliminary

今後, G を非アルキメデス的局所体 k 上の Chevalley 型の単純古典群とし, $G = G(k)$ をその k -有理点の群とする. また k の剰余標数 p は 2 でないと仮定する. このとき, G はある正の整数 n に対して

$$Sp_{2n}(k) (n \geq 2), O_{2n+1}(k) (n \geq 2), O_{2n}(k) (n \geq 4)$$

のいずれかである. これらを簡単に Sp_{2n} , O_{2n+1} , O_{2n} とおのおの書く.

G の affine ルート系 Σ は次の形の基底 Π をもつ:

$$\Pi = \{a_0 = 1 - \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n\}.$$

ここで, $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ は G^0 のルート系 Φ の基底であり, α_0 は Φ における最大ルートである. G の階数 n が, 正の整数 m, λ に対して

$$n = m\lambda$$

を満たすと仮定する. このとき, Π の部分集合 J に関して, 以下の4つの型のものを考察する.

$$(1) J = \Pi - \{a_0, \alpha_\lambda, \alpha_{2\lambda}, \dots, \alpha_{(m-1)\lambda}, \alpha_{m\lambda} = \alpha_n\},$$

$$(2) J = \Pi - \{a_0, \alpha_\lambda, \alpha_{2\lambda}, \dots, \alpha_{(m-1)\lambda}\},$$

$$(2') J = \Pi - \{\alpha_\lambda, \alpha_{2\lambda}, \dots, \alpha_{(m-1)\lambda}, \alpha_n\},$$

$$(3) J = \Pi - \{\alpha_\lambda, \alpha_{2\lambda}, \dots, \alpha_{(m-1)\lambda}\}.$$

3章の結果, このような $J \subset \Pi$ から, k の剰余類体 $\mathbb{F}_q$ 上の連結 reductive 代数群 $M_J = U_J \backslash P_J$ が決まる. M_J のある既約 cuspidal 表現 σ' をとる. 3.3 において, G の generalized BN-pair の Weyl 群 W の部分群

$$S_J = \{w \in W \mid w(J) = J\},$$

$$W(\sigma') = \{w \in S_J \mid {}^w\sigma' \sim \sigma'\}$$

を定義した. 定理 3.3.3, 3.3.4 における鏡映 $v[a, J]$ と $W(\sigma')$ の部分群 $R(\sigma')$ は, [19] 2.4 (cf. [15]) によって, 以下のように定義される: ある $w \in W$ に対して, $w(J \cup \{a\}) \subset \Pi$ を満たすような $a \in \Sigma$ に対して,

$$v[a, J] = (w_0)_{J \cup \{a\}}(w_0)_J$$

とおけ. ここで, 例えば, $J \cup \{a\}$ の各元に対応する基本鏡映によって生成される W (実際, W') の部分群を $W_{J \cup \{a\}}$ と表せ. これは仮定から Coxeter 群であるから, 唯一の長さ最大の元をもつ. それを $(w_0)_{J \cup \{a\}}$ と表す.

$v[a, J] \in S_J$ となるための必要十分条件は $v[a, J]$ が $v[a, J]^2 = 1$ を満たすことである. このような元 $[a, J]$ によって生成される S_J の正規部分群を R_J と表す. このとき, S_J の部分群 C_J があって, $S_J = C_J \cdot R_J$ (半直積) となる (cf. [15] Lemma 2).

(1) $v[a, J]^2 = 1$, (2) 定理 3.3.3, 3.3.4 におけるパラメータ p_a に対して, $p_a \neq 1$, そして (3) $v[a, J] \in W(\sigma')$ を満たす $v[a, J]$ によって生成される $W(\sigma')$ の正規部分群を $R(\sigma')$ と表す. このとき, 定理 3.3.3, 3.3.4 より,

$$W(\sigma') = C(\sigma') \cdot R(\sigma') \text{ (半直積)}$$

を満たす $W(\sigma')$ の部分群 $C(\sigma')$ が存在する (cf. [19] Proposition 7.7).

古典群 G における上のような $J \subset \Pi$ に対して, [2] (5.5.10) あるいは [19] 8.1 の一般線形群と類似の既約 cuspidal 表現 σ' を与え, そして [19] 8.1, 8.2 および [15] の方法に従って, 群 $W(\sigma')$ を決定する (cf. [16] (4.15) または [14] Ch. 1, Theorem 5). 紙数の関係で, ここでは Sp_{2n} における群 $W(\sigma')$ の構造のみを以下に示す. 他の古典群に関しても同様の結果を得る.

C_n 型 ($n \geq 2$)

(I) $M_J = (GL_\lambda(\mathbb{F}_q))^m$, $\sigma' = \sigma \otimes \cdots \otimes \sigma$,

$$W(\sigma') = \begin{cases} W'(\tilde{C}_m) & (\sigma^* \sim \sigma) \\ W(\tilde{A}_{m-1}) & (\sigma^* \not\sim \sigma) \end{cases}$$

(II) $M_J = (GL_\lambda(\mathbb{F}_q))^{m-1} \times Sp_{2\lambda}(\mathbb{F}_q)$, $\sigma' = \sigma \otimes \cdots \otimes \sigma \otimes \sigma_C^*$,

$$W(\sigma') = \begin{cases} \mathbb{Z} \times W'(\tilde{C}_{m-1}) & (\sigma^* \sim \sigma) \\ \mathbb{Z} \times W(\tilde{A}_{m-2}) & (\sigma^* \not\sim \sigma) \end{cases}$$

(III) $M_J = Sp_{2\lambda}(\mathbb{F}_q) \times (GL_\lambda(\mathbb{F}_q))^{m-2} \times Sp_{2\lambda}(\mathbb{F}_q)$, $\sigma' = \sigma_C^* \otimes \sigma \otimes \cdots \otimes \sigma \otimes \sigma_C^*$,

$$W(\sigma') = \begin{cases} (\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}) \times W'(\tilde{C}_{m-2}) & (\sigma^* \sim \sigma) \\ (\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}) \times W(\tilde{A}_{m-3}) & (\sigma^* \not\sim \sigma) \end{cases}$$

ここで, $W(\tilde{A}_m)$ は $\tilde{A}_m$ 型の generalized affine Weyl 群, また $W'(\tilde{C}_m)$ は $\tilde{C}_m$ 型の affine Weyl 群を表す.

5 Filtrations on classical groups

k をその剰余標数が 2 でない非アルキメデスの局所体とし, $x \rightarrow \bar{x}$ を k 上の Galois involution を表す ($\bar{x} = x$, $x \in k$ も許す). $\mathcal{O}_k$ を k の極大多元環, $\mathcal{P}_k$ をその極大イデアルとし, $\bar{k} = \mathcal{O}_k / \mathcal{P}_k$ をその剰余類体とする. V を有限次元 k -ベクトル空間とし, $h: V \times V \rightarrow k$ をある非退化 ± 1 -hermitian form とする. このとき

$$G = \{g \in GL_k(V) \mid h(gv, gw) = h(v, w), v, w \in V\}$$

とし, そして $G^0 = \{g \in G \mid \det(g) = 1\}$ とする.

4 章の結果から, 古典群 G において, 対応する tamely ramified intertwining algebra $\mathcal{H}(\sigma')$ またはその基底の $W(\sigma')$ がより単純になる, 一般線形群と類似の, $J \subset \Pi$ と M_J の既約 cuspidal 表現 σ' は 4.5 の表における (I), (II), そして (II') である. さらに, 一般線形群の [2] 7 章の議論, とくに Theorema 7.2.17 から, simple type の類似を定義するための G 上の filtration の候補として, (I) または '(II) かつ $m = 1$ ' を導くものを挙げることができる. そのような G 上の filtration を与える V の $\mathcal{O}_k$ -lattice sequence の条件を記述しよう.

Λ が V の $\mathcal{O}_k$ -lattice sequence とは, 次の条件を満たす関数 $\Lambda: \mathbb{Z} \rightarrow \{V \text{ の } \mathcal{O}_k\text{-lattice}\}$ のことである:

(1) $n \geq m$ ならば, $\Lambda(n) \subset \Lambda(m)$,

(2) $\Lambda(n+e) = \mathcal{P}_k \Lambda(n)$, $n \in \mathbb{Z}$ を満たす自然数 e が存在する.

$\mathcal{O}_k$ -lattice sequence から $A = \text{End}_k(V)$ の filtration

$$\mathfrak{a}_n(\Lambda) = \{x \in A \mid x\Lambda(m) \subset \Lambda(m+n), m \in \mathbb{Z}\} \quad (n \in \mathbb{Z})$$

を得る. とくに, $\mathfrak{a}_0(\Lambda)$ は A の hereditary $\mathcal{O}_k$ -多元環であり, $\mathfrak{a}_1(\Lambda)$ はその Jacobson 根基である. $\mathcal{O}_k$ -lattice sequence Λ に対して, $L_\Lambda = \{\Lambda(k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ とせよ. すなわち, L_Λ は $\Lambda(k)$, $k \in \mathbb{Z}$ の内の相異なる $\mathcal{O}_k$ -lattice からなる lattice chain とする. Λ に対するのと同じように, $\mathfrak{a}_n(L_\Lambda)$ を定義せよ. このとき,

$$\mathfrak{a}_n(\Lambda) = \mathfrak{a}_n(L_\Lambda) \quad (n = 0, 1)$$

が成り立つ.

V の $\mathcal{O}_k$ -lattice sequence が *self-dual* とは,

$$\Lambda(n)^\# = \Lambda(d-n), \quad n \in \mathbb{Z}$$

を満たす整数 d を見出せることとする (cf. [24]). V の $\mathcal{O}_k$ -lattice sequence Λ が self-dual とせよ. このとき, もし $L \in L_\Lambda$ ならば, $L^\# \in L_\Lambda$ となる. そこで, [21] Proposition 1.7 より, L_Λ の中に, ある自然数 r が存在して,

$$L_{r-1}^\# \supsetneq \cdots \supsetneq L_0^\# \supset L_0 \supsetneq \cdots \supsetneq L_{r-1} \supset \varpi L_{r-1}^\#$$

これから [21] 1.12 (1) の同型から $M_J = U_J \backslash P_J$ を決定できる. そして, その $J \subset \Pi$ が (I) を満たすための必要十分条件は

$$r = m + 1, L_m = \varpi L_m^\#, L_0^\# = L_0, \dim_{\bar{k}}(L_{i-1}/L_i) = \lambda, \quad 1 \leq i \leq m,$$

であり, また $J \subset \Pi$ が '(II) かつ $m = 1$ ' を満たすための必要十分条件は

$$r = m = 1, L_0^\# \supsetneq L_0 = \varpi L_0^\#$$

であることがわかる. このとき, いずれの場合も, $\mathfrak{a}_0(\Lambda) = \mathfrak{a}_0(L_\Lambda)$ は principal である.

最後に, (I) と '(II) かつ $m = 1$ ' に対する Hecke 環 $\mathcal{H}(\sigma')$ の構造を決定すること, すなわち, 定理 3.3.3, 3.3.4 において, 分解 $W(\sigma') = C(\sigma') \cdot R(\sigma')$ とパラメータ p_a の値を決定することが今後の課題である.

参考文献

- [1] N. Bourbaki, Groupes et algèbres de Lie IV, V, VI, Paris, Hermann 1968.

- [2] C. J. Bushnell and P. C. Kutzko, The admissible dual of $GL(N)$ via compact open subgroups, *Ann. Math. Stud.* **129**, Princeton Univ. Press, 1993.
- [3] C. J. Bushnell and P. C. Kutzko, *Semisimple types in GL_n* , *Compositio Math.* **119**, 53-97 (1999).
- [4] F. Bruhat and J. Tits, *Groupes réductifs sur un corps local. I. Données radicielles valuées*, *Publ. Math., Inst. Hautes Étud. Sci.* **41**, 5-251 (1972).
- [5] F. Bruhat and J. Tits, *Groupes réductifs sur un corps local. II. Schémas en groupes. Existence d'une donnée radicielle valuée* *Publ. Math., Inst. Hautes Étud. Sci.* **60**, 5-184 (1984).
- [6] R. W. Carter, *Finite groups of Lie type*, Wiley-Interscience, 1985.
- [7] C. W. Curtis and I. Reiner, *Representation theory of finite groups and associative algebras*, Wiley-Interscience, 1988.
- [8] P. Deligne and G. Lusztig, *Representations of reductive groups over finite fields*, *Ann. of Math. (2)* **103**, 103-161 (1976).
- [9] F. Digne and J. Michel, *Representations of finite groups of Lie type*, *London Math. Soc. Student Texts* **21**, Cambridge University Press, 1991.
- [10] P. Garret, *Buildings and classical groups*, Chapman and Hall, 1997.
- [11] D. Goldberg and R. Herb, *Some results on the admissible representations of non-connected reductive p -adic groups*, *Ann. Scient. Éc. Norm. Sup., 4 série, t. 30*, 97-146 (1997).
- [12] S. S. Gelbart and A. Knapp, *L -indistinguishability and R groups for the special linear group*, *Adv. in Math.*, Vol. **43**, 101-121 (1982).
- [13] R. Howe, *Affine-like Hecke algebras and p -adic representation theory*, In : I. Cherednik, Ya. Markov, R. Howe and G. Lusztig, *Iwahori-Hecke Algebras and their Representation Theory*, Lectures given at the C.I.M.E. Italy 1999, *Lecture Notes in Math.*, **1804**, 27-69, Springer-Verlag, Berlin and New York, 2002.
- [14] R. Howe and A. Moy, *Harish-Chandra homomorphisms for p -adic groups*, *CBMS Regional Conf. Series in Math.* **59** (Amer. Math. Soc., Providence RI, 1985).

- [15] R. B. Howllet, *Normalizers of parabolic subgroups of reflection groups*, J. London Math. Soc. **21**, 62-80 (1980).
- [16] R. B. Howllet and G. I. Lehrer, *Induced cuspidal representations and generalized Hecke rings*, Invent. Math. **58**, 37-64 (1980).
- [17] N. Iwahori, *Generalized Tits system (Bruhat decomposition) on p -adic semisimple groups*, Proc. Symposia Pure Math. **IX**, 71-63 (A.M.S, Providence, 1966).
- [18] N. Iwahori and H. Matsumoto, *On some Bruhat decomposition and the structure of the Hecke rings of the p -adic Chevalley groups*, Publ. Math., Inst. Hautes Étud. Sci. **25**, 5-48 (1965).
- [19] L. Morris, *Tamely ramified intertwining algebras*, Invent. Math. **114**, 1-54 (1993).
- [20] L. Morris, *Level zero G -types*, Compositio Math. **118**, 135-157 (1999).
- [21] L. Morris, *Tamely ramified supercuspidal representations of classical groups. II. Representation theory*, Ann. Sci. Ec. Norm. Sup. (4) **25**(3), 233-274 (1992).
- [22] M. Tadic, *Notes on representations of non-archimedean $SL(n)$* , Pacific J. Math., Vol. **152**, 375-396 (1992).
- [23] J. Tits, *Reductive groups over local fields*, In: A. Borel, W. Casselman (eds.) Automorphic forms, representations and L-functions, (Proc. Symp. Pure Math., vol. 33, part 1, pp.29-69) Providence, RI: A.M.S. 1979.
- [24] S. Stevens, *Intertwining and supercuspidal types for p -adic classical groups*, Proc. London Math. Soc. (3) **83** (2001) 120-140.