

|             |                                                                                              |
|-------------|----------------------------------------------------------------------------------------------|
| 氏 名         | 上 松 和 弘                                                                                      |
| 学位(専攻分野)    | 博 士 (理 学)                                                                                    |
| 学 位 記 番 号   | 論 理 博 第 1374 号                                                                               |
| 学位授与の日付     | 平 成 12 年 3 月 23 日                                                                            |
| 学位授与の要件     | 学 位 規 則 第 4 条 第 2 項 該 当                                                                      |
| 学 位 論 文 題 目 | Numerical classification of singular fibers in genus 3 pencils<br>(種数 3 のペンシルの特異ファイバーの数値的分類) |

論文調査委員 (主 査) 教授 上野健爾 教授 丸山正樹 教授 西田吾郎

### 論 文 内 容 の 要 旨

2次元複素多様体  $X$  から開円板  $D = \{t \in \mathbb{C} \mid |t| < \varepsilon\}$  への全射固有正則写像  $\pi: X \rightarrow D$  が性質

1. 写像  $\pi$  は  $D' = D \setminus \{0\}$  上の各点で極大ランクを持つ
2.  $\pi$  の各ファイバーは連結であり、第一種例外曲線を含まない
3.  $t \in D'$  に対してファイバー  $\pi^{-1}(t)$  は種数  $g$  の閉リーマン面 (非特異複素代数曲線) である

を持つとき、種数  $g$  の代数曲線の退化族である。  $t \in D$  に対して  $\pi = t$  は複素多様体  $X$  の因子  $L_t$  を定める。  $t \in D'$  のとき因子  $L_t$  を族  $\pi: X \rightarrow D$  の一般ファイバーと呼ぶ。これは仮定より種数  $g$  の非特異複素代数曲線である。原点  $0 \in D$  から定まる因子  $L_0$  を族  $\pi: X \rightarrow D$  の特異ファイバーと呼ぶ。因子  $L_0$  を

$$L_0 = \sum_{i=1}^r n_i \Gamma_i$$

( $\Gamma_i$  は被約かつ既約な代数曲線)

( $n_i$  は  $\Gamma_i$  の重複度)

と記すとき、 $L_0$  から定まる整数の組

$$\{r, n_i, p(\Gamma_i), \Gamma_i \cdot \Gamma_j (1 \leq i < j \leq r)\}$$

を特異ファイバー  $L_0$  の数値的タイプと呼ぶ。ここで  $p(\Gamma_i)$  は  $\Gamma_i$  の仮想種数を表す。

種数  $g = 1$  の場合は小平が楕円曲面の研究に関連して特異ファイバーの数値的タイプを決定し 10 タイプしかないことを示した。この小平の結果は楕円曲面の研究で決定的な役割を果たしている。小平の研究に刺激を受けて、種数  $g = 2$  のとき、飯高と Ogg は独立に特異ファイバーの数値的タイプの分類を行い、上野・浪川はさらに複素解析的な細かい分類を行って、すべてのタイプの特異ファイバーを決定しかつ具体的に構成した。この場合の特異ファイバーのタイプは 140 タイプである。

本申請論文は種数  $g = 3$  の代数曲線の退化族の特異ファイバーの数値的な分類を考察したものである。本論文によって  $g = 3$  の代数曲線の退化族の特異ファイバーは基本的に 4343 タイプあることが判明した。ただし、この分類数は単なる数値的タイプの分類よりは少し精密な分類になっている。

申請者による特異ファイバーの分類の概略は以下の通りである。種数  $g$  の曲線の退化の数値的タイプの分類に関する一般論は既に申請者が参考論文で得ており、種数 3 の場合に適用することができる。ただし、その過程で種数 3 の場合の特殊性を考慮して最終的な分類を行う必要がある。申請者は  $L_0$  が可約因子の場合には  $L_0$  の成分に

$$\Gamma_i^2 < 0, \Gamma_i \cdot K_X \geq 0$$

を満足するものが存在することに注目し、このような性質を持つ  $L_0$  の成分すべてをまとめて“幹”と読んだ。申請者は、まず、幹のタイプが有限個であることを示し、そのすべてのタイプを書き上げた。次に問題になるのが、幹を結ぶ  $(-2)$  曲線 (自己交点数が  $-2$  である射影直線) の配置である。このような配置を申請者は“枝”と呼んだ。枝の形に関しては既に

参考論文にある程度の分類がなされており、それをもとにして申請者は種数3の場合の特殊性を考慮して枝の形をすべて分類した。最後に、種数3の曲線の退化となる可能性のある枝と幹との組み合わせをすべて決定した。このようにして得られる因子が種数3の退化に実際に登場することは、すなわち可能な数値的タイプをもった因子が実際に種数3の曲線の退化に出てくることは、一般の種数の場合を考察した Winters によって示されている。したがって、以上によって種数3の代数曲線の数値的タイプはすべて決定されたことになる。申請者は申請論文で枝と幹との組み合わせに関して、単に数値的タイプを考察するのではなく、さらに精密な組み合わせを考察して、種数3の代数曲線に関しては4343タイプの退化が存在することを見いだした。

### 論文審査の結果の要旨

代数曲線の1次元族を考察し、曲線の退化を研究することは小平邦彦の楕円曲面の研究に始まる。小平は楕円曲線、すなわち種数1の曲線の退化を考察して、その数値的タイプの分類を行い、数値的分類で登場するすべてのタイプの退化が実際に実現することを退化を具体的に構成することによって証明した。この構成法はさらに小平の楕円曲面の構成理論で重要な役割を果たしている。小平の研究に刺激を受けて、研究は二方向で行われた。一つは種数2の代数曲線の退化の研究を行うこと、もう一つは一般の種数に関して退化で登場する因子の持つ性質を明確にする研究である。第一の方向は、飯高、Oggによって独立に行われ、さらに上野・浪川は種数2の代数曲線の退化をその複素構造も加味する形で行い、精密な結果を得た。一方、M. Artin, Winters は代数曲線の退化の一般論を取り扱い、退化で出てくる因子の持つ性質を研究した。Winters はこうした性質を持つ因子は実際に曲線の退化として登場することを示している。

こうした一連の研究の後、曲線の退化の研究に関してはほとんど進展がなかった。それは、種数3の曲線の退化を考える場合、退化して出てくる因子のタイプは数千種類あることが、単純な考察から判明しており、実際に分類を行うことは不可能に近いと思われていたからである。こうした中で、申請者は種数3の曲線の退化を数値的に分類するための考察を行い、その具体的な分類に成功したことは高く評価できる。しかも、その分類の方法は種数3の代数曲線に固有のものではなく、一般の種数にも適用できる形であることは特筆に値する。種数4以上の代数曲線の退化の分類は、手計算で行うのはほとんど不可能であると思われるが、申請者の手法により、分類をコンピュータに行わせるためのプログラムを作成することは可能と思われ、本申請論文はそのための基本的な第一歩であると考えることができる点も重要である。

種数3の代数曲線の退化の分類によって、代数曲線上に種数3の曲線を一般ファイバーとして持つ代数曲面の研究に関して詳細な情報が得られ、この方面の研究に資することが期待される。また、参考論文では、一般の種数の代数曲線の退化の分類に関して基本的な結果が得られておりこれも重要な結果である。

よって本申請論文は博士（理学）の学位論文として価値あるものと認める。

平成12年1月31日、主論文および参考論文に報告されている研究業績を中心として、これと関連した研究分野について口頭試問をした結果、合格と認めた。